

01

© 1992

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА
ПРИ ОБЪЕМНОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ

А.А. У г л о в, О.Г. С а г д е д и н о в

Решению задач плавления (Стефана) при воздействии поглощаемых на поверхности мишени потоков энергии посвящены, например, работы [1-10]. В работе [11] и ряде других рассматривался экспоненциально убывающий объемный источник тепла без учета поглощения теплоты плавления. В предлагаемой заметке приводится приближенное аналитическое решение задачи плавления при воздействии объемного источника тепла с прямоугольным распределением мощности тепловыделения при учете поглощения теплоты плавления. Такой источник энергии возникает, например, при действии электронного луча [12] или же быстром движении потока тепла по поверхности термически тонкой пластины. Для определения температурного поля в теле и глубины проплавления мишени получены аналитические выражения, включающие в себя параметры теплофизических характеристик материала, возникающего теплового источника и состоящие только из элементарных функций. При этом точность расчетов по этим формулам составляет около 1 %.

Пусть постоянный по времени поток энергии падает на мишень и создает в ней объемный источник тепла с прямоугольным распределением мощности тепловыделения. Будем рассматривать область мишени вблизи центра пятна нагрева до тех пор, пока выполняется условие $R \gg \sqrt{a\tau}$, где R - радиус поперечной локализации потока энергии на поверхности мишени, a - коэффициент температуропроводности мишени, τ - время действия потока энергии. Тогда задачу можно решать в одномерной постановке. Будем также предполагать, что поглощенная плотность потока энергии больше, чем 10^9 Вт/м², а температура поверхности мишени не превосходит температуры кипения металла. Тогда, как показывают соответствующие оценки, тепловыми потерями с поверхности мишени за счет конвекции, излучения и испарения можно пренебречь по сравнению с поглощаемой при плавлении плотностью потока тепла и, тем более, с полной поглощаемой в мишени плотностью потока энергии. После нагрева поверхности мишени до температуры плавления образуется приповерхностный слой расплава, внутренняя граница раздела жидкой и твердой фаз которого начинает продвигаться вглубь мишени, а внешняя считается неподвижной. На движущемся фронте плавления происходит поглощение теплоты фазового перехода. Теплофизические характеристики металла и его расплава будем

считать одинаковыми и постоянными. Тогда математическая постановка задачи запишется следующим образом:

$$T_t = aT_{zz} + \frac{Q\eta(kz)}{c\rho}, \quad \eta(0 \leq y \leq 1) = 1, \quad \eta(y > 0) = 0,$$

$$T(t=0) = T(z=\infty) = T_0, \quad T_z(z=0) = 0, \quad t \geq t_1;$$

$$T(z=s) = T_m, \quad -\lambda T_z(z=s-0) = -\lambda T_z(z=s+0) + \rho L s_t,$$

где t – время тепловыделения, t_1 – время начала плавления, z – пространственная координата, отсчитываемая вглубь мишени от ее поверхности, $T(t, z)$ – температурное поле в мишени, T_0 – начальная температура, T_m – температура плавления, λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, Q – объемная мощность тепловыделения, k – коэффициент сосредоточенности тепловыделения, $s(t)$ – глубина проплавления мишени, L – удельная теплота плавления.

Введем безразмерные величины:

$$z = zk, \quad s = sk, \quad t = tak^2, \quad T = \frac{T - T_0}{T_m - T_0},$$

$$A = Q(c\rho ak^2(T_m - T_0))^{-1}, \quad B = L(2\sqrt{\pi}c(T_m - T_0))^{-1}.$$

Используя функцию теплового источника [6] и взяв приближенно все интегралы аналогично [10], получаем температурное поле после начала плавления:

$$T = A(f_1(t, z) + f_2(t, z) - f_3(z)) - \frac{2Bs}{t - t_1} \times$$

$$\times (f_1(t - t_1, z - s) + f_1(t - t_1, z + s)),$$

$$f_1(t, z) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{|z|\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} - \frac{z^2(\sqrt{\pi}-2)}{8t}\right),$$

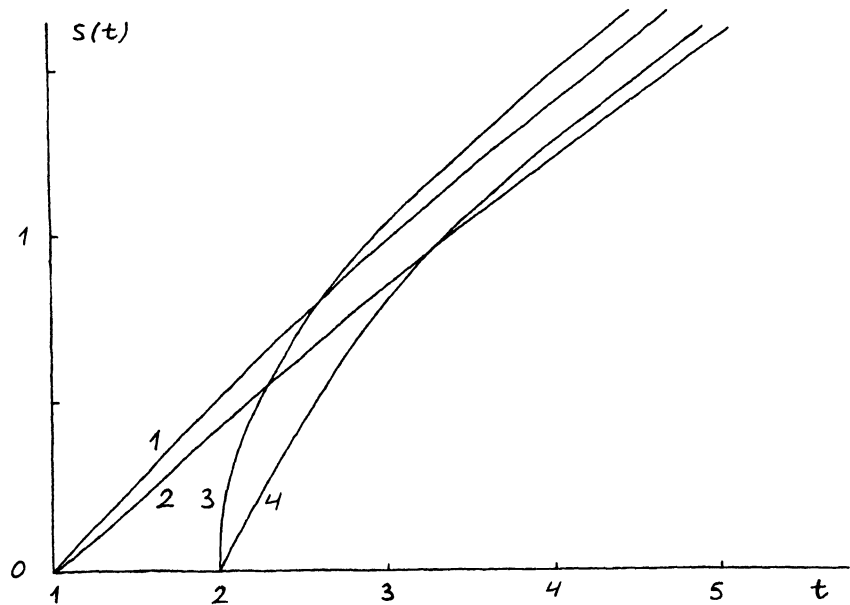
$$f_3(0 \leq z \leq 1) = \frac{1}{2}(1-z)^2, \quad f_3(z > 1) = 0,$$

$$f_2(t, z) = (1-z)^2 g_1 + 2(1-z)g_2 + g_3,$$

$$g_1(t, z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(g_4\left(\frac{1-z}{2\sqrt{t}}\right) - g_4\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right) \right),$$

$$g_4(y) = a_1 y (\exp(-y^2) + \sqrt{a_2 \exp(-2y^2) + a_3 y^2})^{-1},$$

$$a_1 = \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)^{-1}, \quad a_2 = (a_1 - 1)^2, \quad a_3 = \frac{4a_1^2}{\pi},$$



Временные зависимости глубины проплавления мишени для поверхностного (1 - $B = 0$, 2 - $B = 0.055$) и объемного (3 - $A = 1$, $B = 0$, 4 - $A = 1$, $B = 0.055$) тепловыделения при одинаковом энергокладе (безразмерные координаты).

$$g_2(t, z) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{(1-z)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) \right),$$

$$g_3(t, z) = -\frac{\delta t}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(g_4\left(\frac{(1-z)\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}}\right) - g_4\left(\frac{z\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}}\right) \right) \right)_{\alpha=1}.$$

В полученное для $T(t, z)$ выражение входит при этом пока еще не определенная функция глубины проплавления $s(t)$. Для ее нахождения необходимо решить трансцендентное уравнение, удовлетворяющее граничному условию $T(t \geq t_1, z = s) = 1$.

Для металлов параметр B является малым. Так, например, для титана $B = 0.055$. Параметр A является свободным и может принимать любые значения. Для иллюстрации разработанного метода были проведены расчеты при $A = 1$ и $B = 0.055$. При этом было проведено сравнение результатов со случаем, когда тепловыделение при том же энергокладе происходило на поверхности мишени. На рисунке приведены соответствующие временные зависимости глубины проплавления S , полученные как с учетом, так и без

учета поглощения теплоты плавления на фронте фазового перехода. Видно, что в последнем случае скорость роста толщины слоя расплава в момент начала плавления бесконечна. При поверхностном же тепловыделении эта скорость конечна в обоих случаях (а при учете поглощения теплоты плавления даже равна нулю). При объемном тепловыделении начало плавления происходит примерно в 2 раза позже, зато глубина проплавления вскоре становится больше, чем при поверхностном. Благодаря этому в первом случае учет поглощения теплоты плавления дает более существенную поправку во временную зависимость глубины проплавления. Расчеты также показали, что при объемном тепловыделении температура поверхности мишени растет в начале существенно медленней, чем при поверхностном, соответственно пропорционально t и \sqrt{t} . С увеличением же времени кривые $s(t)$ при объемном и поверхностном тепловыделении асимптотически сходятся. С помощью представленного метода могут быть решены задачи плавления и при других формах пространственного распределения источника энергии (нормальной, экспоненциальной и т.д.).

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Л а н д а у Н.Г. // *Quarf. Appl. Math.* 1950. V. 8. P. 81-94.
- [2] Р у б и н ш т е й н Л.И. Проблема Стефана. Рига: Зинатне, 1967. 350 с.
- [3] М е й р м а н о в А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
- [4] Л ю б о в Б.Я. Кристаллизация в больших объемах. М.: Наука. 460 с.
- [5] У г л о в А.А., С м у р о в И.Ю., Г у с ь к о в А.Г. // *ФХОМ.* 1985. № 3. С. 3-8.
- [6] Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
- [7] К о з д о б а Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 324 с.
- [8] К о з д о б а Л.А. Решения нелинейных задач теплопроводности. Киев: Наукова думка, 1976. 284 с.
- [9] У г л о в А.А., С м у р о в И.Ю., Л а ш и н А.М. // *ТВТ.* 1989. Т. 27. № 1. С. 87-93.
- [10] У г л о в А.А., С а г д е д и н о в О.Г. // *ФХОМ.* 1991. № 5. С. 36-39.
- [11] Г о л о в е й к о А.Г. // *ИФЖ.* 1967. Т. 13. № 2. С. 215-224.
- [12] Р ы к а л и н Н.Н., З у е в И.В., У г л о в А.А. Основы электронно-лучевой обработки материалов. М.: Машиностроение, 1978. 236 с.

Поступило в Редакцию
25 ноября 1991 г.