Письма в ЖТФ, том 17, вып. 14 26 июля 1991 г.

03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ю.Н. З а й к о

Исследование поперечной устойчивости решений нелинейных одномерных уравнений является важным этапом на пути изучения эффектов турбулентности в реальных средах. Рассмотрим уравнения Навье–Стокса, описывающие волны в вязких жидкостях и газах [1]:

$$mn\left[v_t+(v\nabla)v\right]=-\nabla p+\nu\Delta v+\left(\zeta+\frac{1}{3}\nu\right)\nabla\left(\nabla v\right),$$
$$n_t+\nabla(nv)=0. \tag{1}$$

Обозначения в (1) общепринятые [1]. Система (1) дополняется уравнением состояния среды в форме: $p-p_0=a(n-n_0)+b(n-n_0)^2$, достаточной для исследования; p_0, n_0 – некоторые значения давления и концентрации, которые мы выберем позже, a, b – постоянные коэффициенты. Для одномерных слабонелинейных возмущений из (1) можно получить уравнение Бюргерса (Б), решением которого является ударная волна [2], исследованию поперечной устойчивости которой посвящена настоящая работа. Ранее с аналогичной целью было использовано уравнение Заболотской–Хохлова–Кузнецова (ЗХК) [3], которое, однако, было выведено в предположении о том, что зависимость от поперечных координат более сильная, чем от продольной [4], поэтому вряд ли пригодно для этой цели, поскольку не является слабонеодномерным обобщением уравнения Б. Получим такое уравнение. Представим переменные и координаты в виде разложений (предполагается, что основной поток направлен вдоль z):

$$v_z=\sum_{i=0}\varepsilon^i v_z^{(i)};\quad v_{x,y}=\sum_{i=1}\varepsilon^i v_{x,y}^{(i)};\quad n=\sum_{i=0}\varepsilon^i n^{(i)};\quad p=\sum_{i=0}\varepsilon^i p^{(i)};$$
$$\xi=\varepsilon^{\gamma}(z-ut),\quad \tau=\varepsilon^{\beta}t,\quad \chi=\varepsilon^{\mu}x,\quad \eta=\varepsilon^{\mu}y;\quad \varepsilon\ll 1. \tag{2}$$

Полагая $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta=\mu=\frac{3}{2}$, и $\varepsilon\sim\nu^2$ $(\nu\sim\zeta)$, получаем в первом порядке по ε соотношения $v_z^{(1)}=\frac{u-v_0}{n_0 a}p^{(1)}$, $n^{(1)}=\frac{1}{a}p^{(1)}$, $u=v_0\pm c$, где $c=\sqrt{\frac{a}{m}}$. Если p_0 – давление в спокойной области среды, то c совпадает со скоростью звука.

Во втором порядке по ε получаем искомое уравнение:

$$\left(2p_{\tau}^{(1)}+\alpha p^{(1)}p_{\xi}^{(1)}-\sigma p_{\xi\xi}^{(1)}\right)_{\tau}-c^{2}\Delta_{\perp}p^{(1)}=0; \quad \Delta_{\perp}=\frac{\partial^{2}}{\partial\chi^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial\eta^{2}}, \tag{3}$$

где $\alpha = 2(u-v_0)\left[\frac{b}{a^2}+\frac{1}{n_0 a}\right]$, $\sigma = \frac{\zeta+\frac{4}{3}\nu}{n_0 m}$. При этом $\frac{\partial v_{x,y}^{(1)}}{\partial\tau}=-\frac{1}{mn_0}\nabla_{\perp}p^{(1)}$ и зависимость $\nabla_{\perp}p^{(1)}$ от ξ не должна проявляться в членах ниже третьего порядка по ε.

Если пренебречь в (3) зависимостью от x, y, то придем к уравнению Б, решением которого является ударная волна

$$p_{sh}(\theta)=p_2+\frac{\Delta p}{1+e^{\frac{\alpha}{2\sigma}\Delta p\cdot\theta}}, \quad \theta=\xi-V\tau, \quad V=\frac{\alpha}{4}(p_1+p_2), \quad \Delta p =$$

$= p_1 - p_2$ – перепад давления в волне, преполагается, что $\alpha > 0$. Поскольку p имеет смысл добавки к постоянному давлению p_0 (здесь и далее мы опускаем знак $^{(1)}$), мы можем положить $V = 0$ за счет выбора p_0; это не ограничивает общности результата.

Представим решение (3) в виде $p=p_{sh}(\theta)+\sum\limits_{j} p_j(\xi,\eta,\chi)e^{-\lambda_j\tau}$, где $\sum p_j \ll p_{sh}$. Линеаризуем (2) по p_j и разделяем переменные: $p_j=q_j(\xi)\cdot r_j(\eta,\chi)$; $r_j(\eta,\chi)\sim e^{i(k_x\chi+k_y\eta)}$. Для $q_j(\xi)$ получаем уравнение

$$q_{j\xi\xi}-\frac{\alpha}{\sigma}p_{sh}(\xi)q_{j\xi}+E_j q_j=0; \quad E_j=\frac{2\lambda_j^2+c^2k_{\perp}^2}{\sigma\lambda_j}; \quad k_{\perp}^2=k_x^2+k_y^2. \tag{4}$$

Вводя функцию $s(\xi)=q_j(\xi)\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma}\int\limits_0^{\xi}p_{sh}(\xi)d\xi\right]$, получаем уравнение для $s(\xi)$: $s_{\xi\xi}+\left[E_j-U(\xi)\right]s=0$, где $U(\xi)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 p_1$. Такой простой вид $U(\xi)$ обусловлен выбором p_0, обеспечивающим $p_1=-p_2$. Из уравнения для s следует, что существуют $-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 p_1 < E_j < 0$, для которых $s(\xi)$, а с ней и $q_j(\xi)$ ограничены, равно как и $r_j(\eta,\chi)$ для $k_{\perp}^2 > 0$, и которым соответствуют $\lambda_j < 0$, что означает развитие неустойчивости.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

[2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[3] Пэсенсон М.З. Автореф. канд. дисс. Саратов. 1988. 15 с.

[4] Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.

Поступило в Редакцию
18 мая 1991 г.