

05.1

© 1991

ФРАКТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА РАЗРУШЕНИЯ

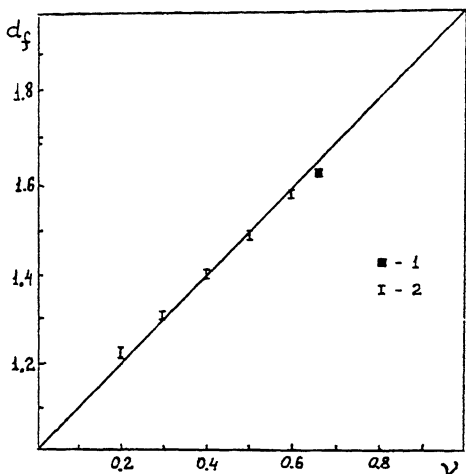
А.С. Баланкин

Экспериментально установлено [1, 2], что конфигурации трещин, образуемых при разрушении твердых тел, имеют самоподобную мультифрактальную структуру. Численное моделирование разрушения плоских решеток, динамика которых задавалась уравнениями упругости сплошной среды, а распространение трещин определялось правилом, согласно которому вероятность разрыва связи пропорциональна n -й степени действующего на нее напряжения σ , показало [3, 4], что фрактальная размерность d_f самоподобных конфигураций трещин не зависит ни от вида граничных условий (имитирующих различные виды нагружения – растяжение, сжатие, сдвиг и т.п.), ни от n . Для случая выполнения условий Коши, приводящих к равенству коэффициентов Ламэ $\lambda = \mu$, рассчитанные значения $d_f = 1.62 \pm 0.05$ – при растяжении и $d_f = 1.64 \pm 0.05$ – при сдвиге [3] в пределах погрешности совпали с размерностью перколяционных кластеров и кластеров, образуемых при ограниченной диффузии агрегации (ОДА) частиц, которая равна $d_f = 5/3$ [5].

Повторив расчеты [3] для треугольной решетки размером 100×100 с базисом $a_1 = a(1, 0)$ и $a_2 = a(1/2, \sqrt{3}/2)$, но при различных соотношениях между λ и μ , мы получили зависимость d_f от коэффициента Пуассона $\nu = 2\lambda/(2\lambda + \mu)$, показанную на рисунке.

Геометрический образ автомодельных конфигураций трещин существенно определяется симметрией, налагаемой граничными условиями, что обусловлено фундаментальным свойством упругоизотропных сред – поле деформаций определяется граничными условиями и не зависит от упругих постоянных [3, 6]. В то же время граничные условия не влияют на величину d_f , которая определяется только значением ν . Полученный результат позволяет утверждать, что самоподобие конфигураций трещин, образуемых при крупном разрушении упругоизотропных тел, обусловлено эффектом поперечных деформаций. Поэтому вопрос о физической природе эффекта поперечных деформаций имеет принципиальное значение. Отметим, что этот вопрос многократно поднимался в связи с рядом других проблем [7–9].

Особое внимание в последнее время уделяется исследованиям упругих свойств фракталов [5, 9–14]. Обычно при моделировании упругости самоподобных структур ограничиваются рассмотрением



Зависимость фрактальной размерности самоподобных конфигураций трещин, образуемых при хрупком разрушении плоских ($d = 2$) решеток, от коэффициента Пуассона ν : 1 – данные [3]; 2 – данные настоящей работы (при моделировании растяжения); сплошной линией показана теоретическая зависимость (9).

двух предельных случаев изотропных [12] и центральных [13] сил упругости. Численные эксперименты [14] показали, что задачи об упругости полимерной сетки в случае изотропных и центральных сил упругости принадлежат к различным классам универсальности. К неожиданным результатам привело численное моделирование упругости перколяционных сеток [9, 11] – установлено, что независимо от соотношения постоянных гамильтониана, определяющих упругость сетки, коэффициент Пуассона сеток, размер которых меньше радиуса корреляции ξ_c , имеет отрицательные значения, причем в пределе $L \ll \xi_c$ $\nu_0 = -1/3$, а для сеток, размер которых $L \gg \xi_c$, значение ν стремится к $\nu_\infty \approx 0.08 \pm 0.05$.

Общая теория упругости изотропных фракталов может быть построена по аналогии с классической теорией упругости твердых тел [6]. При этом в отличие от последней нет необходимости постулировать эффект поперечных деформаций $\epsilon_{\perp}^i \approx -\nu \epsilon_{\parallel}$, сопровождающих продольную деформацию ϵ_{\parallel} в отсутствие соответствующих поперечных напряжений. Для фракталов достаточно, по аналогии с законом Гука, положить, что изменение продольного размера L_{\parallel} в d -пространстве под действием внешних сил равно

$$L_{\parallel} = l_{\parallel} (1 + \epsilon_{\parallel}) = l_{\parallel} \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right). \quad (1)$$

Поскольку, вследствие тонкой структуры фракталов

$$\epsilon = [\epsilon_{\parallel} + (1 - \frac{d_f}{d-1}) \epsilon_{\perp}] \left(\frac{l_{\parallel}}{L_{\parallel}} \right)^{\alpha-1}, \quad (2)$$

$$\text{где } \alpha = d - d_f, \quad (3)$$

то изменение L_{\parallel} сопровождается изменением поперечных размеров L_{\perp}^i , $i = 1, 2, \dots, (d-1)$ и плотности $\rho(\epsilon_{\parallel})$ фрактала:

$$L_{\perp}^i = l_{\perp}^i (1 + \epsilon_{\parallel})^{-\nu} = l_{\perp}^i \left(\frac{l_{\parallel}}{L_{\parallel}} \right)^{\nu}, \quad (4)$$

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1, \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \epsilon_{\parallel})^{-\alpha} = \rho_0 \left(\frac{l_{\parallel}}{L_{\parallel}} \right)^{\alpha}. \quad (6)$$

При малых деформациях $\epsilon_{\parallel} \ll 1$ уравнения (1)–(6) сводятся к системе уравнений, тождественно совпадающей с уравнениями линейной упругости d -мерного изотропного тела. Соотношения между параметрами упругости второго порядка (E , G , B и C_{\parallel} – модули Юнга, сдвига, объемной и продольной упругости), согласно (1)–(6) могут быть представлены в виде:

$$B = \frac{E}{d(d-d_f)}, \quad G = \frac{(d-1)}{2d_f} E, \quad C_{\parallel} = \frac{2+2(d-2)(d-d_f)}{(d-1)(d-d_f)} G, \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{(d_f+1-d)(d-1)}{2(d-d_f)} \mu. \quad (8)$$

Учитывая равенство

$$d_f = (d-1)(1+\nu), \quad (9)$$

при $d = 2$ и 3 соотношения (7), (8) тождественно совпадают с таковыми [6] для двух и трехмерных упругоизотропных тел.

Как следует из (8), равенство Коши $\lambda = \mu$ [15] выполняется для фракталов, размерность которых определяется равенством

$$d_f = \frac{d^2 + 1}{d + 1}. \quad (10)$$

Формула (10) совпадает с соотношением, определяющим размерность кластеров, образуемых при ОДА частиц в d -пространстве, которое было выведено авторами [16] в приближении среднего поля. Тот факт, что к соотношению (10) приводят два совершенно

независимых подхода указывает на то, что оно отражает фундаментальные свойства симметрии самоподобных структур.

Упругое поведение перколяционных сеток в пределе $L \ll \xi_c$ определяется размерностью блужданий, которая в случае $d = 2$ равна $d_f = 2/3$ [5], что при подстановке в (5) дает $\nu_0 = -1/3$. В обратном пределе $L \gg \xi_c$ упругое поведение сеток определяется размерностью химических связей $d_f = 1.10 \pm 0.02$ [5], поэтому $\nu_\infty = 0.1 \pm 0.02$. Видим, что теоретические значения ν_0 и ν_∞ , отвечающие различным классам универсальности, в пределах погрешности совпадают с результатами, полученными при численном моделировании упругости перколяционных сеток $\nu_0 = -1/3$ и $\nu_\infty = 0.08 \pm 0.05$ [9].

Соотношения (1)–(9) остаются справедливыми и в пределе больших деформаций фракталов, вплоть до $\mathcal{E}_{//} > 1$. В случае $\mathcal{E}_{//} < 1$, разлагая (1)–(6) по степеням $\mathcal{E}_{//}$, можно получить уравнения нелинейной упругости фракталов любого порядка. При этом параметры упругости высших порядков (третьего, четвертого и т.д.) могут быть выражены через параметры (7)–(9). При $\mathcal{E}_{//} \geq 1$ имеет место переход от упругого поведения к „скалярному“ – влияние внешней нагрузки формально сводится к тому, что упругая энергия фрактала может быть заменена упругой энергией, описываемой выражением скалярного типа, рассмотренным в [10]. Учитывая принципиальную важность вопросов нелинейной упругости им будет посвящена самостоятельная работа.

Вследствие сдвиговой жесткости твердых тел, неоднородные флуктуации плотности сопровождаются сдвиговыми деформациями [6]. Поэтому, как следует из рассмотренной выше теории упругости, пространственное распределение неоднородных флуктуаций плотности и сдвига (как спонтанных – квантовых и тепловых, так и индуцированных внешним воздействием или изменением граничных условий) в твердых телах имеет фрактальный характер и характеризуется иерархией пространственных масштабов $k = L_{i+1}/L_i = C_{//}/G$ [17]. Это и обуславливает самоподобие конфигураций трещин, образуемых как при чисто силовом, так и при термофлуктуационном разрушении твердых тел.

В случае крупного разрушения, когда деформации носят чисто упругий характер вплоть до разрушения, что, в частности, имеет место при численном моделировании результатов которого приведены на рисунке, фрактальная размерность конфигураций трещин определяется соотношением (9). Как видно из рисунка, имеет место практически идеальное совпадение теории и результатов численного моделирования.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] M a n d e l b r o t B. Fractal Geometry of Nature. San Francisco. 1983. 460 p.
- [2] И в а н о в а В.С., Ш а н я в с к и й А.А. Количественная фрактография. М.: Металлургия, 1988. 400 с.

- [3] Луис Э., Гинеа Ф., Флорес Ф. // В кн.: Фракта-
лы в физике. М.: Мир, 1988. С. 244-248.
- [4] Такаясу Х. // Там же. С. 249-254.
- [5] Соколов И.М. // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 221-
255.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.:
Наука, 1987. 247 с.
- [7] Кузьменко В.А. Новые схемы деформирования твер-
дых тел. Киев: Наукова думка, 1973. 199 с.
- [8] Баланкин А.С. // ФНТ. 1988. Т. 14. № 4 С. 339-347.
№ 5. С. 498.
- [9] Bergman D.J., Duering E. // Phys.
Rev. 1986. V. B34. N 11. P. 8199-8200.
- [10] Уэбман И. // В кн.: Фракталы в физике. М.: Мир,
1988. С. 488-497.
- [11] Bergman D.J. // Phys. Rev. 1986. V. B33.
N 3. P. 2013-2016.
- [12] Duering E., Bergman D.J. // Phys.
Rev. 1988. V. B37. N 16. P. 9460-9476.
- [13] Bergman D.J., Kantor Y. // Phys. Rev.
Lett. 1984. V. 53. N 5. P. 511-514.
- [14] Feng S., Sen P.N. // Phys. Rev. Lett. 1984.
V. 52. N 3. P. 216-219.
- [15] Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических
и тепловых свойств кристаллов. М.: ГФМЛ, 1963. 312 с.
- [16] Muthukumar M. // Phys. Rev. Lett. 1983.
V. 50. N 9. P. 686-689.
- [17] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16.
№ 7. С. 14-20.

Поступило в Редакцию
5 апреля 1991 г.