

01; 03

© 1990

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ
С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ
В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В.С. Крутиков

При решении вопросов управления импульсными процессами (электрический разряд, лазерный импульс, взрыв взрывчатых веществ или газовых смесей и т.д.) в жидкости необходимо по заранее заданной форме функции давления $P(r_1, t)$ в определенной точке r_1 волновой зоны восстановить функцию давления $P(R(t), t)$ на изменяющейся во времени границе $R(t)$ плазменного поршня (обратная задача). При этом закон движения границы неизвестен и также подлежит определению. Для случая расширения плазменного поршня в безграничной сжимаемой жидкости, если при этом возмущения плотности невелики, движение среды описывается волновым уравнением. Случаи движения непроницаемых и проницаемых границ рассматривались в работах [1, 2]. При этом для реконструкции использовались значения $P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)$ в точке r_1 , находящейся на значительном расстоянии от подвижной границы — линейное дополнительное условие.

В настоящей работе делается попытка приближенной количественной оценки волновых явлений, когда дополнительное условие в фиксированной точке нелинейно. Такая задача возникает, когда r_1 находится в непосредственной близости к расширяющейся плазменной полости, величина начального радиуса r_0 может быть произвольной. Скорости частиц среды $v(r_1, t)$ соизмеримы со скоростями движения границы и нелинейным членом интеграла Коши-Лагранжа при задании дополнительного условия пренебрегать нельзя [3].

Решение волнового уравнения (сферическая симметрия), полученное операционным методом, начальные условия нулевые, имеет вид: для компоненты давления и скорости частиц среды в любой точке

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right), v(r, t) = \frac{r^2 \rho_0}{r_1} = \frac{r}{a} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) + \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt, \quad (1)$$

где r_0 , a , ρ_0 — начальный радиус, скорость распространения возмущений и плотность покоящейся среды.

На подвижной границе

$$\rho(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right), \quad v(R(t), t) = \frac{R^2(t) \rho_0}{r_1} = \frac{R(t)}{a} \times \quad (2)$$

$$\times f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) + \left[\int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt \right]_{r=R(t)}$$

Для вычисления по формулам (2) при решении обратных задач необходимо знание величины $R(t)$. Изменение радиуса подвижной границы можно определить из следующего кубического уравнения:

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3 r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a} f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt + \int_0^t \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right) dt dt \right]_{r=R(t)} \quad (3)$$

Произвольная функция f может быть аппроксимирована различными способами [4]. В общем случае произвольных законов движения границ и вида функций f последнюю удобно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m . Число m характеризует количество точных значений решения и может быть сколь угодно большим [5]

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)^m, \quad A_m = \text{const}. \quad (4)$$

Пусть задано

$$\rho(r, t) = -\rho_0 \left(y_t + \frac{1}{2} y_r^2 \right) \Big|_{r=r_1}, \quad -y_r = v(r, t), \quad \rho = \rho_0 y_t. \quad (5)$$

Используя (4), с учетом (1) запишем (5) в следующем виде:

$$\rho(r, t) = \frac{r_1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \frac{r_1}{r^2 \rho_0} \left[\frac{r}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2; \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a}. \quad (6)$$

Покажем, что решение задачи можно свести к решению одного алгебраического уравнения. Вычислим значение A_0 , когда решение,

аппроксимированное полиномом Лагранжа $\sum_{m=0}^0 A_m \xi^m = A_0 \epsilon_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)$

(ϵ_0 - единичная разрывная функция нулевого порядка), представляет собой прямую в точке $r = r_1$ для момента t_0 . Это момент прихода волны в точку r_1 . Из (6) имеем

$$\rho(r_1, t) = A_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \left[\frac{r_1}{a} A_0 + A_0 \xi \right] \frac{1}{r_1 \rho_0} \right\}^2.$$

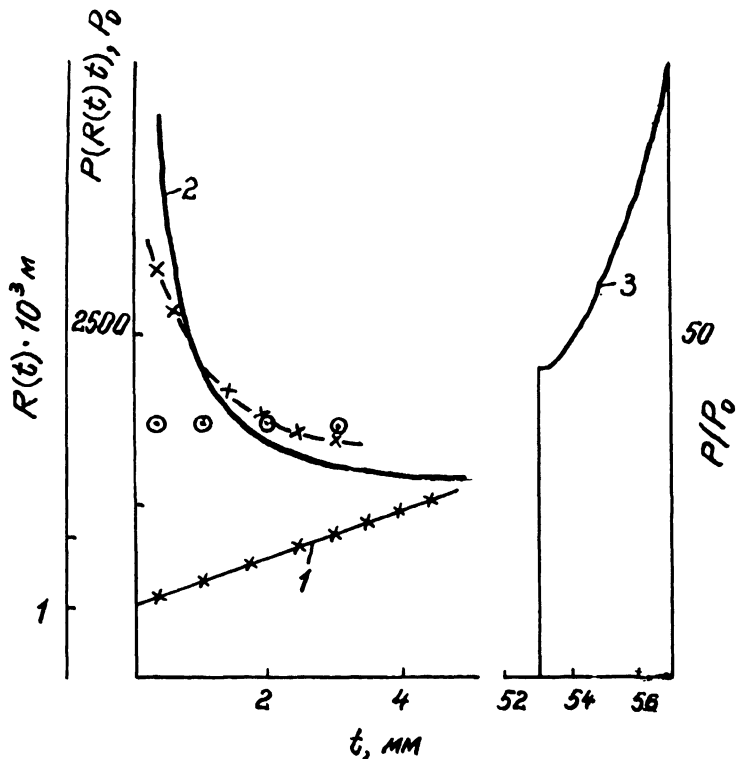


Рис. 1. Изменение радиуса подвижной границы - 1, давления на подвижной границе с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа - 2 и в точке волновой зоны $r_1 = 0.08\text{ м}$ - 3. Результаты восстановления по (1)-(9) обозначены пунктиром. Исходными для реконструкции приняты значения $P(r_1, t)$ - кривая 3.

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$A_0 = \frac{1}{2c_3 c_1 c_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2c_1 c_2^2 c_3}\right)^2 - \frac{P(r_1, t)}{c_1 c_2^2 c_3}}, \quad (7)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2} \rho_0, \quad c_2 = \frac{1}{r_1 \rho_0}; \quad t_0 = \frac{r_1 - r_0}{a}; \quad \xi = 0.$$

Расширим временной интервал на некоторую величину Δt и определим решение, которое аппроксимируем полиномом Лагранжа $\sum_{m=0}^1 A_m \xi^m$, проходящим через точку t_0 и вторую точку $t_1 = t_0 + \Delta t$. Тогда из (5) получаем

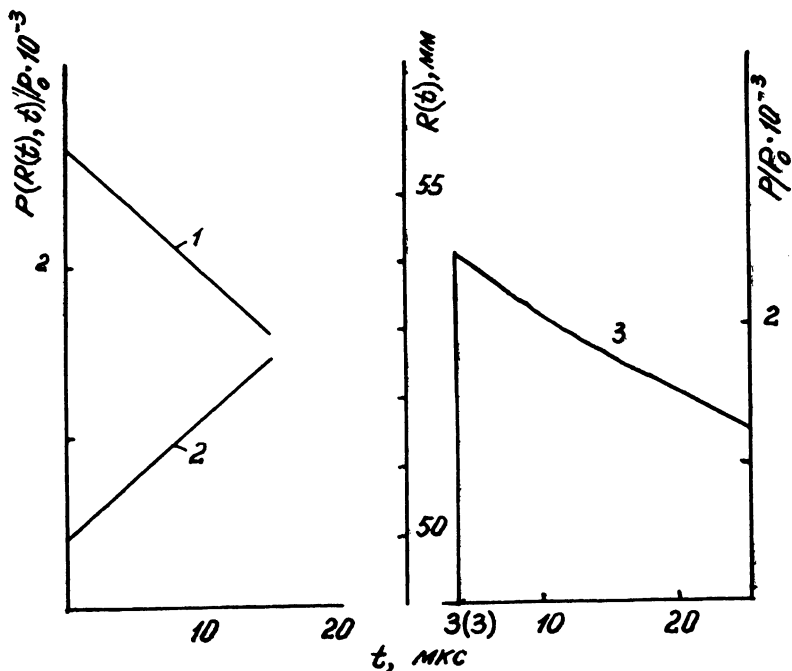


Рис. 2. Реконструкция изменения давления на подвижной границе (1) и радиуса подвижной границы (2) по заданному нелинейному условию $P(r_1, t) = -\rho_0 \left(\gamma_t + \frac{1}{2} \gamma_r^2 \right)$ (3).

$$P(r_1, t_1) = A_0 + A_1 \xi - c_1 \left\{ c_2 \left[\frac{r_1}{a} (A_0 + A_1 \xi) + A_0 \xi + \frac{A_1}{2} \xi^2 \right] \right\}^2 \quad (8)$$

Здесь P известно по условию, A_0 из (7), тогда A_1 определится из решения квадратного уравнения (8). Таким способом можно получить необходимое количество коэффициентов полинома Лагранжа. Соотношение для m -го коэффициента будет иметь вид

$$A_m = -\frac{1}{2} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4} \right)^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_3^2 - c_0}{c_1 c_2^2 c_4} \right]} \quad (9)$$

где $c_0 = -P(r_1, t) + \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m$; $c_1 = \frac{1}{2} \rho_0$, $c_2 = \frac{1}{\rho_0 r_1}$;
 $c_3 = \frac{r_1}{a} \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{m-1} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}$;

$$c_4 = \frac{r_1}{a} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}; \quad \xi = t - \frac{r_1 - r_0}{a}.$$

Как видим, решение задачи с нелинейным дополнительным условием (5) и движущейся произвольной скоростью границей свелось к вычислению формулы типа (9); зная коэффициенты A_m , по (1)–(3) с учетом (4) определяются исследуемые функции в любых точках, включая подвижные границы, а так же параметры ее движения.

На рис. 1 представлены результаты расчетов методом характеристик [4, 6] (сплошные линии) системы уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта

$$u_t + v u_r + p^{-1} p_r = 0, \quad \rho_t + (\rho v)_r + 2\rho v = 0, \quad (p+B)/(p_0+B) = (\rho/\rho_0)^2 \quad (10)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями: B, ρ – постоянные.

Закон расширения сферы $v(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 t)$, $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м. По формуле (9) для моментов времени $t = 52(6), 53(6), 54(6), 55(6)$ мкс определены коэффициенты $A_m, \rho_0 = 102 \text{ кгс}^2/\text{м}^4, \alpha = 1500 \text{ м/с}$.

$$A_0 = 49.46; \quad A_1 = 0.0356 \cdot 10^6; \quad A_2 = 3.45857 \cdot 10^{12}; \quad (11)$$

$$A_3 = -0.063551 \cdot 10^{18},$$

а из (1)–(3) с учетом (4), (11) и другие исследуемые функции. Результаты вычислений по известной формуле $p - p_0 = \rho_0 \left(\frac{3}{2} R^2 + R \dot{R} \right)$ обозначены круглыми точками.

На рис. 2 показаны результаты реконструкции при расширении сферы $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м по заданному нелинейному условию (5) в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м. По (7)–(9) для моментов времени $t =$

$$A_0 = 2778.0; \quad A_1 = -80.187 \cdot 10^6; \quad A_2 = 0.0073 \cdot 10^{12};$$

$$A_3 = -0.00511 \cdot 10^{18},$$

а по (1)–(3) с учетом (4) и другие функции. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [7] применить к обратным задачам затруднительно.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 510–514.
- [2] Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 14. С. 45–48.
- [3] Слепьян Л.И. // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–814.

- [4] Крутиков В.С. Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
- [5] Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия, 1979. Т. 2. 1102 с.
- [6] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
- [7] Гринберг Г.А. // ПММ. 1967. Т. 31. В. 2. С. 193-203.

Поступило в Редакцию
7 апреля 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 22

26 ноября 1990 г.

05.1

© 1990

НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ СВЕРХГЛУБОКОГО ПРОНИКАНИЯ

С.К. Андилевко, Г.С. Романов,
С.М. Ушеренко, В.А. Шилкин

Соударение плотного ($\rho_n \geq 10^3$ кг/м³, $U_n \approx 1-3$ км/с) потока частиц ($d \approx 10^{-5}$ м) с металлической преградой сопровождается появлением эффекта сверхглубокого проникания (СП) [1], при котором некоторая часть ($\leq 1\%$) дискретных микрочастиц проникает в материал мишени на глубины $\geq 10^3-10^4 d$.

С целью установления качественной зависимости СП от химического состава преграды и вводимого вещества выполнялась серия экспериментов на металлических преградах из *Fe*, *Cu* и *Ti*. Нагружение осуществлялось порошками *B*, *Si* и их соединений, которые отсутствуют в исходном материале преграды. Регистрация включений в мишени осуществлялась методами микрорентгеноспектрального анализа и активационной нейтрографии.

При обработке образцов из *Fe*, *Cu*, *Ti* порошками силицидов наличие кремния во всех трех материалах зафиксировано до глубины в несколько сантиметров. В аналогичных условиях при обработке этих же преград боридными включениями *B* зарегистрированы только в железе.

Наблюдение процесса взаимодействия метаемых частиц с поверхностью преграды в воздушной среде осложнено масштабом и условиями взаимодействия. Учитывая наличие проникания *B* в *Fe* для рассмотрения особенностей его взаимодействия с другими материалами в дальнейших экспериментах использовались биметалли-