Письма в ЖТФ, том 16, вып. 9 12 мая 1990 г.

01

ВЛИЯНИЕ САМОДИФФУЗИИ НА СПЕКТРЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Ю.Л. Климонтович

В работе [1] приведены уравнения гидродинамики с учетом самодиффузии, полученные с помощью кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{R}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{R}}\left(D\frac{\partial f}{\partial \vec{R}}\right) + I(\vec{R},\vec{v},t), \qquad (1)$$

в котором, наряду с интегралом Больцмана, введен „интеграл столкновений" диффузионного типа. Переход к уравнениям гидродинамики – уравнениям сплошной среды, проведен в [1] в нулевом приближении по малому параметру $1/N_{ph}$. Здесь N_{ph} – среднее число частиц в физически бесконечно малом объеме. В этом приближении $I(\vec{R},\vec{v},t)$ и функция f – локальное распределение Максвелла. Переход к уравнениям гидродинамики проводится при этом без дополнительного использования условия малости параметра Кнудсена, поэтому полученные таким путем уравнения гидродинамики справедливы и при малых числах Рейнольдса. При этом в них, наряду с вязкостью и теплопроводностью, учитывается и самодиффузия. В связи с этим в дополнение к сказанному в [1] отметим следующее.

На стр. 274 книги [2] имеется замечание, что учет самодиффузии в уравнениях гидродинамики приводит к появлению в выражении для производства энтропии перекрестных по градиентам температуры и плотности членам. Эти члены могут быть и отрицательными, что ведет к нарушению второго закона термодинамики. Однако (см. ф-лы (6), (7) в [1]) перекрестные члены обращаются в нуль и производство энтропии положительно и при учете самодиффузии.

В [1] на примере расчета профиля слабой ударной волны показано, что самодиффузия может играть заметную роль. В настоящей работе приведены результаты расчета равновесных гидродинамических флуктуаций с учетом самодиффузии. Обусловленные этим изменения структуры спектральных линий (ср. с результатами, приведенными в [3–5]) могут быть обнаружены в эксперименте.

Для расчета равновесных гидродинамических флуктуаций использованы гидродинамические уравнения (2)-(4) из [1]. В линейном приближении поле скорости для компонент Фурье представляется в виде суммы поперечной (по отношению к волновому вектору $\vec{k}$) продольной составляющих. Спектральная плотность флуктуаций поперечного поля остается прежней. Ширина линии определяется величиной $\nu \vec{k}^2$, где ν – кинематическая вязкость. Система уравнений для компонент Фурье плотности, продольной скорости, температуры и давления с учетом самодиффузии имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(-i\omega + D\vec{k}^2)\delta\rho + \rho i(\vec{k}\delta\vec{u}) = 0, \\
&(-i\omega + \nu\vec{k}^2) i(\vec{k}\delta\vec{u})\rho = \vec{k}^2\delta p, \\
&-i\omega\delta p + pD\vec{k}^2\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{p}{T}\chi\vec{k}^2\delta T + \frac{5}{3}pi(\vec{k}\delta\vec{u}), \\
&p = \frac{\rho}{m}kT, \quad \delta p = \frac{k}{m}\rho\delta T + \frac{kT}{m}\delta\rho.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

При условиях $\nu\vec{k}^2, D\vec{k}^2, \chi k^2 \ll \vec{k}v_s$, где v_s – скорость звука, выделяются две области, соответственно низких и высоких частот. Для области низких частот, когда $\omega \sim \nu\vec{k}^2 \ll k v_s$, из уравнения $(2)_1$ следует оценка

$$
(\vec{k}\delta\vec{u}) \sim D\vec{k}^2\frac{\delta\rho}{\rho} \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{\delta u}{V_T} \sim kl\frac{\delta\rho}{\rho} \sim K\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{3}
$$

Здесь $K - kl \ll 1$ – число Кнудсена. Мы видим, что $\delta\vec{u}$ – величина второго порядка малости. Таким образом, в первом приближении

$$
(\vec{k}\delta\vec{u}) = 0, \quad \delta p = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{4}
$$

Последнее равенство может быть использовано в выражениях для одновременных моментов, но не в выражениях для пространственно-временных спектров $(\ldots)_{\omega,\vec{k}}$, т.к. оно есть следствие условия локального термодинамического равновесия.

В результате расчетов с учетом известных выражений для одновременных корреляторов равновесного состояния получаем выражения

$$
(\delta\rho\,\delta\rho)_{\omega,\vec{k}} = \frac{2D\vec{k}^2}{\omega^2 + (D\vec{k}^2)^2}\,\frac{k\rho}{c_p}; \quad (\delta T\delta T)_{\omega,\vec{k}} = \frac{2\chi\vec{k}^2}{\omega^2 + (\chi\vec{k}^2)^2}\,\frac{kT^2}{c_p\rho}. \tag{5}
$$

Мы видим, что с учетом самодиффузии ширины спектров флуктуаций плотности и температуры определяются разными кинетическими коэффициентами. Напомним, что без учета самодиффузии ширина спектра флуктуаций плотности также определяется температуропроводностью и, следовательно, спектры относительных флуктуаций $\delta\rho/\rho$, $\delta T/T$ совпадают. Это означает, что равенство (4) имеет место и для пространственно-временных компонент спектров флуктуаций плотности и температуры (?).

Чтобы ответить на вопрос насколько такое расширенное толкование условия локального термодинамического равновесия оправдано и насколько оправдано пренебрежение самодиффузией, необходимо экспериментальное исследование спектров рассеянного излучения в жидкостях с различными значениями коэффициентов D и χ.

При учете самодиффузии спектр флукткаций энтропии определяется суммой двух спектральных линий, ширины которых пропорциональны коэффициентам самодиффузии и температуропроводности соответственно. Суммарная площадь двух спектральных линий остается прежней. Таким образом,

$$(\delta_s \delta_s)_{\omega,\vec{k}} = \left[\left(1-\frac{C_V}{C_p}\right)\frac{2D\vec{k}^2}{\omega^2+(D\vec{k}^2)^2} + \frac{C_V}{C_p}\,\frac{2\chi\vec{k}^2}{\omega^2+(\chi\vec{k}^2)^2}\right] C_p\,\frac{k}{\rho}\cdot \qquad (6)$$

При $D=\chi$ это выражение совпадает с известным [3–5].

Для области высоких частот, когда $\nu\vec{k}^2 \ll \omega \sim k v_s$, т.е. для области звуковых возбуждений, можно использовать условие адиабатичности $\delta s = 0$. Тогда выражение для флуктуаций плотности, температуры, давления и продольной скорости совпадают по форме с полученными без учета самодиффузии. Например, для спектральной плотности флуктуаций $\delta\rho$ в области звукового резонанса имеем выражение

$$(\delta\rho\delta\rho)_{\omega,\vec{k}} = \frac{\gamma}{(\omega-kv_s)^2+\gamma^2}\,\frac{C_V}{C_p}\,m\rho. \qquad (7)$$

Теперь, однако, коэффициент затухания γ (ширина линии) определяется комбинацией трех кинетических коэффициентов:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\nu+\frac{C_V}{C_p}D+\frac{k}{mC_p}\chi\right)^2\vec{k}^2 \quad \left(\text{вместо } \gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\nu+\left(\frac{C_p}{C_V}-1\right)\chi\right)\vec{k}^2\right). \qquad (8)$$

При условии равенства трех кинетических коэффициентов, т.е. при условии $\nu=D=\chi$, оба выражения (8) совпадают.

Спектральные плотности (7), (5) для $\delta\rho$ дают, как известно, основной вклад в спектр молекулярного рассеяния. Экспериментальная зависимость рассеянного излучения от коэффициента D позволит выявить правомерность (или, напротив, неправомерность) включения процесса самодиффузии в уравнения гидродинамики.

Разумеется, что все термодинамические соотношения (интегралы по ω) остаются и при учете самодиффузии прежними. Неизменной, в частности, остается формула Ландау-Плачека, определяющая отношение интегрального вклада боковых линий к суммарной интенсивности всех линий.

В заключение отметим следующее.

Кинетическое уравнение (1) является простейшей математической моделью, позволяющей описать как установление локального равновесия в физически бесконечно малых объемах жидкости, так и пространственную диффузию этих малых макроскопических элементов. Естественно, что уравнение (1) может быть усовершенствовано так, чтобы более детально описать диссипативные процессы в гидродинамике, определяемые крупномасштабными флуктуациями. Для этого необходим учет как временного запаздывания, так и нелокальности, поскольку в жидкостях и жидких кристаллах пространственная и временная дисперсия на больших масштабах и низких частотах оказывается существенной (см [6–8]). Сравнение использованных в этих работах подходов с использованным в настоящей работе требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

[1] Климонтович Ю.Л. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 15. В. 9. С. 81–84.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

[3] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. II. М.: Наука, 1986.

[4] Фабелинский И.Л. Молекулярное рассеяние света. М.: Наука, 1965.

[5] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.

[6] Андреев А.Ф. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 1132.

[7] Кац Е.И., Лебедев В.В. Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988.

[8] Morozov V.G. // Physica. 1983. V. 117A. P. 511.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
11 марта 1990 г.