1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 62, N 11

01;04

О РАСЧЕТЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.П.Афанасьев

Исследуется параксиальное приближение для квазистационарной осесимметричной плазменной струи со свободной границей в рамках одножидкостной гидродинамической модели без учета вязкости, теплопроводности и излучения.

Введение

Для решения самосогласованной задачи о плазменной струе со свободной границей мы испробовали метод параксиальных разложений, который заключается в подстановке в исходные уравнения струи разложений неизвестных функций в ряды по поперечной координате и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях этой координаты. Этот метод является одним из методов сведения системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в принципе должен позволить более простыми и доступными средствами, чем в конечноразностных методах, получить информацию о пространственной структуре струи, недоступную для квазиодномерных методов.

Мы рассматриваем гидродинамическую область осесимметричной плазменной струи с током, полагая при этом, что граница струи формируется с участием собственного магнитного поля и изменение ионизационной энергии струи существенно для ее динамики, в связи с чем средний заряд считается переменным.

Одно из возможных приложений разработанного метода расчета — исследование плазменной струи, вытекающей из катодного пятна вакуумной дуги. Такое исследование является предметом отдельной работы.

Уравнения осесимметричной плазменной струи

Будем рассматривать квазистационарную осесимметричную плазменную струю, пренебрегая вязкостью, теплопроводностью и излучением. Магнитогазодинамические уравнения удобно представить в дивергентном виде

$$\mathrm{div}(\mathbf{M}) = 0. \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{W}) = 0. \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

выражающем законы сохранения массы, энергии и импульса соответственно. В этих уравнениях

$$\mathbf{M} = \rho \cdot \mathbf{v} \tag{4}$$

— плотность потока массы,

$$\mathbf{W} = \mathbf{M} \cdot \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \tag{5}$$

— плотность потока энергии (где w — удельная энтальпия),

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \frac{1}{4\pi} \cdot \left(H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} H^2 \right) \tag{6}$$

— тензор плотности потока импульса.

К уравнениям сохранения следует добавить уравнения Максвелла, закон Ома и термодинамические соотношения

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla U, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{9}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] + \frac{1}{cen_e} [\mathbf{jH}] - \frac{1}{en_e} \nabla p_e. \tag{10}$$

Зарядовый состав плазмы будем характеризовать средним зарядом q, который связан с температурой и плотностью формулой, аналогичной формуле из [1],

$$\frac{\varepsilon(q)}{kT} = \ln \left(\frac{AT^{\frac{3}{2}}}{nq} \right), \tag{11}$$

где

$$A = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 6.06 \cdot 10^{21}\ \text{см}^{-3} \cdot \text{эВ}^{-\frac{3}{2}},$$

а $\varepsilon(q)$ — гладкая аппроксимация кубическим сплайном дискретной функции I_n (n-го потенциала ионизации). Отличие от [1] заключается в способе аппроксимации ε. В [1] аппроксимация была кусочно-линейной, здесь принята сплайн-аппроксимация, поскольку в дальнейшем понадобятся гладкие производные от ε.

При указанном определении зарядового состава плазмы имеют место термодинамические соотношения

$$p_e = nkTq, \quad p = nkT(1 + q), \tag{12}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}(1+q)\frac{kT}{m} + \frac{F(q)}{m}, \tag{13}$$

$$w = \frac{5}{2}(1+q)\frac{kT}{m} + \frac{F(q)}{m}, \tag{14}$$

где $F(q)$ — гладкая аппроксимация функции

$$\Omega_m \sum_{k=1}^{m} I_k.$$

Собственное магнитное поле имеет только составляющую H_ϕ, если задача обладает осевой симметрией ($\partial/\partial\phi = 0$ и $j_\phi = 0$. Действительно, составляющие поля H_ϕ и H_r в случае осевой симметрии выражаются лишь через A_ϕ ϕ-ю составляющую векторного потенциала). В свою очередь $A_\phi = 0$ при $j_\phi = 0$ как решение уравнения Лапласа для всего пространства, обращающееся в нуль на бесконечности. С учетом этого представим закон сохранения импульса (3) в виде трех уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_x = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{\Pi}_y = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{\Pi}_z = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi}_x = \{f_1\cos(\phi), f_2\sin(\phi), f_3\cos(\phi)\}, \\ \mathbf{\Pi}_y = \{f_1\sin(\phi), -f_2\cos(\phi), f_3\sin(\phi)\}, \\ \mathbf{\Pi}_z = \{f_3, 0, f_4\},\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}f_1 = p + \rho v_r^2 + \frac{H_\phi^2}{8\pi}, \quad f_2 = -p + \frac{H_\phi^2}{8\pi}, \\ f_3 = \rho v_r v_z, \quad f_4 = p + \rho v_z^2 + \frac{H_\phi^2}{8\pi}.\end{gathered} \tag{17}$$

Граница плазменного потока с вакуумом считается свободной и задается граничными условиями

$$v_n\Big|_\Gamma = 0, \tag{18}$$

$$j_n\Big|_\Gamma = 0, \tag{19}$$

$$p\Big|_\Gamma = 0. \tag{20}$$

Условия (18), (19) очевидны, условие (20) предполагает отсутствие скачка магнитного поля при переходе через границу (т.е. отсутствие поверхностных токов). При этом для равенства нулю силы, действующей на элемент поверхности границы (что и означает ее свободу), достаточно равенства газодинамических давлений по обе стороны границы, что для границы с вакуумом дает (20). Отсутствие же скачка магнитного поля на границе объясняется конечной проводимостью плазмы и квазистационарностью рассматриваемой задачи.

Граничные условия в сечениях $z = \text{const}$ пока ставить не будем.

Вывод параксиальных уравнений струи

Будем искать приближенное решение описанной выше системы уравнений путем подстановки в нее разложений вида

$$F(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) r^n \tag{21}$$

и приравнивания членов при одинаковых степенях r. Первые члены получаемых таким образом разложений будут использоваться для приближенного описания струи.

Такой подход предполагает, что струя имеет существенно бо́льшие продольные размеры, чем поперечные, однако вопрос о радиусе сходимости разложений, без сомнения, остается далеко за пределами технических возможностей. В других областях исследований возникают аналогичные трудности, например, при параксиальном описании пучков частиц с нескомпенсированным пространственным зарядом [2,3]. В них вопрос о сходимости разложений также не ставится по указанной причине, а применимость этих разложений подтверждается их удовлетворительной работоспособностью, в том числе и для широких пучков. Мы надеемся, что такой подход применим и для описания гидродинамических течений.

Подстановка разложений типа (21) для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{W}$ в (1), (2) дает рекурентные соотношения

$$M_{r,n+1} = -\frac{M'_{z,n}}{n+2}, \quad W_{r,n+1} = -\frac{W'_{z,n}}{n+2}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

а аналогичных разложений для f_i из (17) в (3) дает

$$f_{10} = -f_{20}, \quad f_{11} = -\frac{1}{2} f_{21}, \quad f_{1,n+1} = -\frac{1}{n+2}\left(f_{2,n+1} + f'_{3,n}\right), \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$f_{3,n+1} = -\frac{f'_{4,n}}{n+2}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{23}$$

При получении этих соотношений учтено, что разложения для M_r, W_r, f_3 начинаются с первой степени, чтобы не появились особенности на оси при взятии дивергенции. При выполнении соотношений (22), (23) уравнения (1)–(3) удовлетворяются тождественно.

Струю будем описывать параметрами M_r, M_z, W_r, W_z, f_i, H_ϕ, U, q. Все другие параметры выражаются через них по формулам

$$\rho = \frac{M_r M_z}{f_3}, \quad v_r = \frac{f_3}{M_z}, \quad v_z = \frac{f_3}{M_r},$$

$$p = \frac{H_\phi^2}{8\pi} - f_2, \quad \frac{kT}{m} = \frac{1}{\rho(1+q)}\left(\frac{H_\phi^2}{8\pi} - f_2\right),$$

$$w = \frac{5}{2\rho}\left(\frac{H_\phi^2}{8\pi} - f_2\right) + \frac{F(q)}{m}. \tag{24}$$

Из определения независимых величин (4)–(6), (17) и формул (24) вытекают дополнительные соотношения

$$f_1 - f_4 + \frac{f_3}{M_r M_z}\left(M_z^2 - M_r^2\right) = 0, \quad f_1 + f_2 = \frac{H_\phi^2}{4\pi} + M_r\frac{f_3}{M_z},$$

$$M_z\left\{W_r - \frac{c}{4\pi}H_\phi\frac{\partial U}{\partial z}\right\} - M_r\left\{W_z + \frac{c}{4\pi}H_\phi\frac{\partial U}{\partial r}\right\} = 0,$$

$$W_z = M_z\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{f_3^2}{M_z^2}+\frac{f_3^2}{M_r^2}\right)+\frac{5}{2}\frac{f_3}{M_z M_r}\left(\frac{H_\phi^2}{8\pi}-f_2\right)+\frac{F(q)}{m}\right\}-\frac{c}{4\pi}H_\phi\frac{\partial U}{\partial r}. \tag{25}$$

Полная система уравнений для 11 неизвестных функций состоит из законов сохранения (1)–(3) (четыре независимых уравнения), закона Ома (два уравнения), дополнительных соотношений (25) (четыре уравнения) и уравнения типа Саха (11) — всего одиннадцать уравнений. При подстановке в эти уравнения разложений типа (21) уравнения нулевого порядка в рассматриваемых условиях будут содержать две произвольные функции, которые вместе с функцией, описывающей форму боковой поверхности, должны определяться из условий (18)–(20).

Разложим величины, входящие в закон Ома, по степеням

$$U(r,z) = U_0(z) + r^2 U_2(z) + \ldots. \tag{26}$$

$$H_\phi(r,z) = r\cdot h_1(z) + r^2 h_2(z) + \ldots. \tag{27}$$

$$\sigma(r,z) = \sigma_0(z) + r\cdot\sigma_1(z) + \ldots. \tag{28}$$

Здесь также члены U_1 и h_0 опущены, чтобы не появлялись особенности на оси при взятии операций $\operatorname{div}\mathbf{H}$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}$.

Подстановка (27) в (9) дает выражения для составляющих тока

$$j_r = -\frac{c}{4\pi}\left(rh_1' + r^2 h_2' + \ldots\right), \quad j_z = \frac{c}{4\pi}\left(2h_1 + 3rh_2 + \ldots\right), \tag{29}$$

после чего для закона Ома получим в первом порядке по r

$$U_0' + \frac{ch_1}{2\pi\sigma_0} - \frac{1}{en_0 q_0}\left[f_{10}'\frac{q_0}{1+q_0} + f_{10}\frac{q_0'}{(1+q_0)^2}\right] = 0. \tag{30}$$

Если проанализировать в законе Ома и других соотношениях следующий по r порядок разложения, то можно убедиться, что при $U_1 = 0$ равны нулю также n_1, T_1, q_1, h_2. Выражения для последующих членов, необходимые для описания пространственной структуры струи, имеют вид

$$p_2 = -\frac{f_{10}}{R^2}, \quad n_2 = -\frac{n_0}{R^2},$$

$$q_2 = \frac{q_0(1+q_0)}{br\cdot R^2}, \quad T_2 = -\frac{T_0 q_2}{1+q},$$

$$U_2=\frac{h_1^2}{2\pi e n_0 q_0}-\frac{v_{z0}h_1}{c}+\frac{ch_1 y}{4\pi\sigma_0(f_{40}-f_{10})}-\frac{2kT_0}{eR^2}\left(1-\frac{1}{br}\right). \quad (31)$$

Граничные условия (18), (19) имеют вид

$$\frac{v_r}{v_z}=\frac{j_r}{j_z}=R'(z), \quad (32)$$

где $R(z)$ — неизвестная форма границы.

Из (41) в главном порядке по r получаем формулы, связывающие M_{z0}, h_1, R с интегральными параметрами Ω и I,

$$\pi R^2 M_{z0}=\Omega, \quad \frac{ch_1R^2}{2}=-I, \quad (33)$$

где Ω — полный расход, I — полный ток (с учетом направления).

Из этих выражений получаем

$$h_1(z)=-\frac{2\pi I M_{zo}}{c\Omega}. \quad (34)$$

Главные члены соотношений (22), (23) можно записать в виде

$$M_{r1}=-\frac{1}{2}M'_{z0}, \quad W_{r1}=-\frac{1}{2}W'_{z0}, \quad f_{10}=-f_{20}, \quad f_{11}=-\frac{1}{2}f_{21},$$

$$f_{12}=-\frac{1}{3}(f_{22}+f'_{31}), \quad f_{31}=-\frac{1}{2}f'_{40}, \quad (35)$$

а (25) с учетом (35)

$$f_{11}=f_{21}=0, \quad f'_{40}=\frac{M'_{z0}}{M_{z0}}(f_{40}-f_{10}), \quad (36)$$

$$W_{z0}=M_{z0}\left(U_0\frac{I}{\Omega}+\text{const}\right)=$$

$$=M_{z0}\left\{\frac{1}{2}\frac{(f_{40}-f_{10})^2}{M_{z0}^2}+\frac{5}{2}\frac{f_{10}(f_{40}-f_{10})}{M_{z0}^2}+\frac{F(q)}{m}\right\}, \quad (37)$$

$$f_{22}=\frac{3}{2}\left\{\frac{h_1^2}{4\pi}+\frac{M'_{z0}f'_{40}}{4M_{z0}}-\frac{1}{6}f''_{40}\right\}. \quad (38)$$

Условие свободной границы (20) с учетом (24), (38), (34) дает

$$f''_{40}=\frac{3}{2}f'_{40}\frac{M'_{z0}}{M_{z0}}-\frac{4\pi M_{z0}f_{10}}{\Omega}+\frac{4\pi I^2M_{z0}^2}{c^2\Omega^2}. \quad (39)$$

Для получения последнего из искомых уравнений необходимо исключить из закона Ома U'_0 с помощью (37), q'_0 — с помощью (11) и с использованием

(35),(36) разрешить его относительно f'_{10}. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для описания струи

$$f'_{40} = y, \tag{40}$$

$$y' = \frac{3}{2}\frac{y^2}{f_{40} - f_{10}} - \frac{4\pi M_{z0}^2}{\Omega}\left\{\frac{f_{10}}{M_{z0}} - \frac{I^2}{c^2\Omega}\right\}, \tag{41}$$

$$M'_{z0} = M_{z0}\frac{y}{f_{40} - f_{10}}. \tag{42}$$

$$f'_{10} = \frac{\frac{I^2 M_{z0}^3}{\sigma_0\Omega^2} + y f_{10} g_4}{f_{40}p_1 - f_{10}p_2}. \tag{43}$$

где введены обозначения

$$p_1 = \frac{3}{2} - \frac{mI}{e\Omega(1+q_0)} + \frac{\frac{\varepsilon}{kT_0} + \frac{3}{2}}{br}\left[\frac{F'q_0}{kT_0} - \frac{mI}{e\Omega(1+q_0)}\right].$$

$$p_2 = 4 - \frac{mI}{e\Omega(1+q_0)} + \frac{2\left(\frac{\varepsilon}{kT_0} + 2\right)}{br}\left[\frac{F'q_0}{kT_0} - \frac{mI}{e\Omega(1+q_0)}\right].$$

$$g_4 = p_2 - p_1.$$

$$br = 1 + q_0\left(\frac{5}{2} + \frac{\varepsilon}{kT_0}\right) + q_0(1+q_0)\frac{\varepsilon'}{kT_0}. \tag{44}$$

Таким образом, в главном порядке параксиального приближения струя описывается системой (40)–(43) для функций f_{10}, f_{40}, M_{z0}, y. Через эти функции выражаются все другие параметры струи на оси системы с помощью конечных соотношений, например,

$$\rho_0 = \frac{M_{z0}^2}{f_{40} - f_{10}}, \quad v_{z0} = \frac{f_{40} - f_{10}}{M_{z0}}, \quad p_0 = f_{10}, \quad T_0 = \frac{m}{k}\frac{f_{10}(f_{40} - f_{10})}{M_{z0}^2(1+q_0)}. \tag{45}$$

Отметим прежде всего, что уравнение (43) имеет вид, подобный уравнению Гюгонио. Это означает принципиальную возможность наличия в струе критического сечения, где знаменатель правой части этого уравнения обращается в нуль. В дальнейшем мы будем предполагать, что реализуется режим с гладким переходом струи через критическое сечение в сверхзвуковую область, для чего необходимо, чтобы особая точка в (43) была устранимой, т.е. чтобы числитель в правой части (43) обращался в нуль вместе со знаменателем.

Наличие критического сечения, таким образом, приводит к дополнительному соотношению между параметрами струи в этом сечении. Кроме того, для начала интегрирования системы (40)–(43) нужно раскрыть неопределенность в производных в критическом сечении. Получающиеся при этом довольно громоздкие формулы приведены в [4].

Таким образом, с помощью параксиальных разложений удается свести задачу расчета осесимметричной плазменной струи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой позволяет определить как осевое, так и пространственное распределения параметров струи.

Список литературы

[1] *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 174 с.

[2] *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л., 1948.

[3] *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.

[4] *Афанасьев В.П., Дюжев Г.А., Школьник С.М.* Гидродинамическая модель плазменной струи катодного пятна вакуумной дуги. Препринт ФТИ им. А.Ф.Иоффе. № 1375. Л., 1989.

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
11 февраля 1992 г.