

01;03

©1992 г.

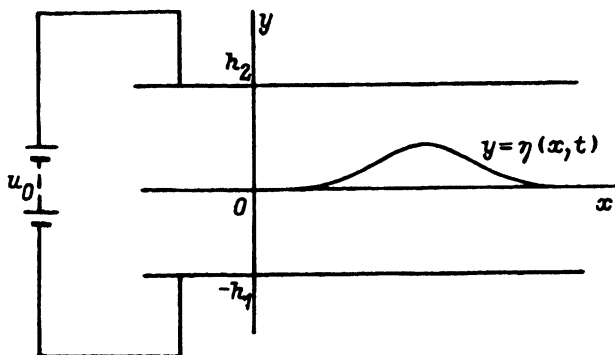
О ВОЛНАХ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ЖИДКОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.М.Коровин

Получено дисперсионное соотношение для линейных электрогидродинамических волн на поверхности раздела двух несмешивающихся диэлектрических жидкостей различной плотности и проницаемости, помещенных в постоянное электрическое поле и полностью заполняющих зазор между горизонтальными электродами. Выведено уравнение Кортевега-де Фриза для нелинейных слабо диспергирующих волн в двухслойной жидкости и с его помощью изучено влияние электрического поля на волновые движения в однородном слое со свободной поверхностью и в двухслойном жидком диэлектрике, ограниченном электродами.

В слоисто-неоднородном жидком диэлектрике, находящемся в электрическом поле, помимо кулоновских сил, вызываемых пространственным зарядом, образующимся как на контактирующих с жидкостью поверхностях металлических электродов, между которыми создана разность потенциалов, так и в объеме жидкости вдали от электродов [1], возникают также поверхностные пондеромоторные силы, локализующиеся на границах раздела сред, обладающих различными диэлектрическими проницаемостями [2]. В случае слабой генерации пространственного заряда поверхностные пондеромоторные силы оказывают заметное влияние на конфигурацию границ раздела и движение жидкостей. В ряде работ (см. библиографию в [3]) изучалось влияние сил такого рода на рэлей-тейлоровскую неустойчивость в постоянных и переменных электрических полях, а также рассматривались нелинейные волны на поверхности раздела диэлектрических жидкостей, занимающих в невозмущенном состоянии верхнее и нижнее полупространства [4].

В настоящей работе исследовано распространение волн в расположенных друг над другом двух слоях конечной толщины, образованных несмешивающимися жидкими диэлектриками различной проницаемости и плотности. Рассматриваемые жидкости полностью заполняют промежуток между плоскими горизонтальными электродами, подключенными к источнику постоянного напряжения, причем верхний слой состоит из более легкой жидкости. Найдено дисперсионное соотношение, соответствующее линеаризованной системе уравнений исходной нелинейной задачи, выявляющее дестабилизирующий эффект поверхностных пондеромоторных сил. Получено уравнение Кортевега-де Фриза для профилей



слабо диспергирующих волн и с его помощью проведен анализ влияния электрического поля на нелинейные волновые движения.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x, y рассматривается, как показано на рисунке, плоская задача о распространении волн в лежащих один на другом двух горизонтальных слоях однородных несжимаемых диэлектрических жидкостей, ограниченных снизу и сверху металлическими электродами $y = -h_1 < 0, y = h_2 > 0, O(h_2/h_1) = 1$, между которыми имеется разность потенциалов u_0 . Поверхность раздела жидкостей обозначим через $y = \eta(x, t)$, где t — время. Жидкости находятся в поле силы тяжести $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. В дальнейшем параметры, относящиеся к нижнему слою, отмечаются индексом 1, а к верхнему — индексом 2. Для плотностей жидкостей выполняется условие $\rho_1 > \rho_2$.

В рамках обычного для электрогидродинамики предположения о малости пространственного заряда пренебрегаем его влиянием на распределение электрического поля в межэлектродном промежутке. При этом потенциалы полей u_k находятся из решения сопряженной задачи для уравнения Лапласа в областях с неизвестной внутренней границей

$$y = \eta(x, t): \quad \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2;$$

$$y = -h_1: \quad u_1 = 0; \quad y = h_2: \quad u_2 = u_0, \quad (1.1)$$

$$y = \eta(x, t): \quad u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — диэлектрические проницаемости жидкостей, причем $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Как и в работах [3,4], влиянием кулоновских сил на движение жидкостей пренебрегается. В этом случае течение, возникающее из состояния покоя, является потенциальным, а уравнения Эйлера имеют первый интеграл — интеграл Коши-Лагранжа. Обозначив через φ_1, φ_2 потенциалы скоростей, из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1.3)$$

Кинематические условия на поверхности раздела и условия непротекания на электродах имеют вид

$$y = \eta(x, t) : \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2; \quad (1.4)$$

$$y = -h_1 : \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0; \quad y = -h_2 : \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Динамическое условие на поверхности раздела с учетом капиллярных сил и скачка давления, создаваемого поверхностной пондеромоторной силой [4], с использованием интеграла Коши–Лагранжа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \rho_2 \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \\ + g\eta(\rho_1 - \rho_2) = \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \\ + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{8\pi\varepsilon_1} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения. В общем случае при исследовании неустановившегося волнового движения жидкостей требуется также задать начальные условия.

2. После линеаризации краевых условий (1.2), (1.4), (1.6) около состояния гидростатического равновесия с плоской поверхностью раздела жидкостей $y = 0$

$$u_{1s} = \frac{\varepsilon_2(y + h_1)}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} u_0, \quad u_{2s} = \frac{\varepsilon_1 y + \varepsilon_2 h_1}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1} u_0$$

с точностью до малых первого порядка получаем

$$y = 0 : \quad u_1 - u_2 = \eta \left(\frac{du_{2s}}{dy} - \frac{du_{1s}}{dy} \right);$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2;$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\eta(\rho_1 - \rho_2) = \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4\pi\varepsilon_1} \frac{du_{2s}}{dy} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Разыскивая решение задачи (1.1), (1.3), (1.5), (2.1) в виде

$$\varphi_k = \Phi_k(y) e^{i(kx - \omega t)}; \quad u_k = U_k(y) e^{i(kx - \omega t)}; \quad \eta = C e^{i(kx - \omega t)},$$

приходим к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)k + \alpha k^3}{\rho_1 \operatorname{cth} k h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} k h_2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 u_0^2 k^2}{4\pi(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)^2 (\rho_1 \operatorname{cth} k h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} k h_2) (\varepsilon_1 \operatorname{th} k h_2 + \varepsilon_2 \operatorname{th} k h_1)}. \quad (2.2)$$

Таким образом, как при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, так и при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ поверхностные поперечные силы оказывают дестабилизирующее влияние. В случае, когда длины волн велики по сравнению с толщинами слоев, т.е. при $kh_1 \ll 1$, $kh_2 \ll 1$, из (2.2) получаем

$$\omega^2(k) = C_0^2 k^2 \left[1 - \frac{\kappa}{3} (k h_1)^2 \right]; \quad \kappa = \frac{h_2}{h_1(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \left[\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 h_2^3 + \varepsilon_2 h_1^3}{(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)^4} \left(\frac{u_0}{c_0} \right)^2 - \frac{3\alpha}{c_0^2} \right], \quad (2.3)$$

$$c_0^2 = \frac{h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \left[g(\rho_1 - \rho_2) - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\pi} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 u_0^2}{(\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)^3} \right]. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что при

$$u_0^2 < \frac{4\pi g (\rho_1 - \rho_2) (\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1)^3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \quad (2.5)$$

длинноволновые возмущения устойчивы. При фиксированных ρ_k , h_k , ε_k , $k = 1, 2$ с увеличением разности потенциалов между электродами фазовая скорость длинноволновых возмущений падает. В противоположном предельном случае $kh_1 \gg 1$, $kh_2 \gg 1$ (короткие волны) дисперсионное соотношение (2.2) приводится к виду, обсуждавшемуся многими авторами [4].

При выполнении условия (2.5) из (2.3) находим

$$\omega(k) = \mp c_0 k \pm \beta k^3, \quad \beta = \frac{\kappa}{6} c_0 h_1^2. \quad (2.6)$$

Восстанавливая по дисперсионному соотношению (2.6) вид уравнения, имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь, как и в (2.6), верхний знак относится к волнам, распространяющимся вдоль оси x , а нижний — в противоположном направлении.

3. Учтем нелинейную поправку к уравнению (2.7), могущую существенно изменить решение за достаточно большой промежуток времени и на больших расстояниях. С этой целью введем [5] малые параметры, характеризующие нелинейные эффекты относительного порядка $\gamma = a/h \ll 1$ и дисперсионные эффекты относительного порядка

$\delta = (h_1/l)^2 \ll 1$, где a — характерная амплитуда, l — характерный горизонтальный масштаб волны. В дальнейшем предполагается выполненным условие (2.5).

Переходя в (1.1)–(1.6) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}; & y' &= \frac{y}{h}; & t' &= \frac{c_0 t}{l}; & \eta' &= \frac{\eta}{a}; & h' &= \frac{h_2}{h_1}; \\ \rho' &= \frac{\rho_2}{\rho_1}; & \varepsilon' &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; & \varphi'_k &= \frac{\varphi_k}{\gamma c_0 l}; & u'_k &= \frac{u_k}{u_0}, & k &= 1, 2, \end{aligned}$$

получаем следующую систему уравнений (штрихи далее опускаем)

$$\delta \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0, \quad \delta \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

с краевыми условиями

$$y = -1: \quad u_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0; \quad y = h: \quad u_2 = 1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

и условиями сопряжения искомых решений на поверхности раздела жидкостей

$$y = \gamma \eta: \quad u_1 = u_2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} = \gamma \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial x} \right); \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \delta^{-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \delta^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \delta^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \\ & + g h_1 c_0^{-2} (1 - \rho) \eta = \delta \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[1 + \gamma^2 \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} - \\ & - \gamma^{-1} s (\varepsilon - 1) \left[1 + \gamma^2 \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} \left[\delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \delta \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad \sigma = \frac{\alpha}{\rho_1 c_0^2 h_1}; \quad s = \frac{\varepsilon_1 u_0^2}{8 \pi \rho_1 c_0^2 h_1^2}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Разложим потенциалы $u_k(x, y, t)$, $\varphi_k(x, y, t)$, $k = 1, 2$ в ряд по степеням y . Из уравнений Лапласа (3.1) и краевых условий (3.2) методом последовательных приближений по малому параметру δ (аналогичная процедура используется в [6] при выводе уравнения Буссинеска) находим.

$$\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial y} = -\delta \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial x^2} - \frac{\delta^2}{3} \frac{\partial^4 \varphi_1^0}{\partial x^4}; \quad \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial y} = \delta h \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial x^2} + \frac{\delta^2}{3} h^3 \frac{\partial^4 \varphi_2^0}{\partial x^4}; \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial y} = u_1^0 - \frac{\delta}{3} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x^2} - \frac{\delta^2}{72} \frac{\partial^4 u_1^0}{\partial x^4}; \quad \frac{\partial u_2^0}{\partial y} = \frac{1 - u_2^0}{h} + \frac{\delta}{3} h \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x^2} + \frac{\delta^2}{72} h^3 \frac{\partial^4 u_2^0}{\partial x^4}. \quad (3.7)$$

Верхний индекс нуль означает, что функции и их производные вычисляются при $y = 0$. В результате подстановки выражений (3.6) в кинематические условия на поверхности раздела жидкостей (3.4) при $y = \gamma\eta$ получаем с точностью до членов $O(\gamma, \delta)$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x} + (1 + \gamma\eta) \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial x^2} + \frac{\delta}{3} \frac{\partial^4 \varphi_1^0}{\partial x^4} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x} - (h - \gamma\eta) \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial x^2} - \frac{\delta}{3} h^3 \frac{\partial^4 \varphi_2^0}{\partial x^4} = 0. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание первое уравнение (3.1) и выражения (3.7), из условия равенства потенциалов на поверхности раздела (3.3) методом последовательных приближений по параметрам γ, δ вычисляем

$$u_1^0 = u_2^0 + \gamma h^{-1} \eta (1 - \gamma\eta) [1 - u_2^0 (1 + h)] + \frac{\gamma \delta}{3} \eta (1 + h) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x^2} + O(\gamma^2 \delta, \gamma \delta^2). \quad (3.10)$$

Аналогичным образом из второго условия (3.3) с учетом (3.7) и уравнения Лапласа (3.1) находим

$$u_2^0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + h} + \gamma \eta \frac{h(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + h)^2} - \gamma^2 \eta^2 \frac{h(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + h)^3} + \gamma \delta \frac{h}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)(h^2 - 1)}{(\varepsilon + h)^3} + O(\gamma^2 \delta, \gamma \delta^2). \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) и второе выражение (3.7) в динамическое условие на поверхности раздела жидкостей (3.5), с принятой точностью получаем третье уравнение, замыкающее систему (3.8), (3.9),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x} \right)^2 - \rho \left[\frac{\partial \varphi_2^0}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\rho + h}{h} \eta + \frac{3\gamma s \varepsilon (\varepsilon - 1)^3}{(\varepsilon + h)^4} \eta^2 - \\ - \delta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[\sigma - \frac{2s \varepsilon (\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + h^3)}{3(\varepsilon + h)^4} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Опуская в (3.8), (3.9), (3.12) члены порядков γ и δ , имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi_1^0}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - h \frac{\partial^2 \varphi_2^0}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial t} + \frac{\rho + h}{h} \eta = 0.$$

Отсюда, рассматривая волны, бегущие в направлении оси x , заключаем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} + O(\gamma, \delta); \quad \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial t} = \eta + O(\gamma, \delta); \quad \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x^2} = -\frac{\eta}{h} + O(\gamma, \delta). \quad (3.13)$$

Следуя [5], полагаем

$$\frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x} = \eta + \gamma A_1 + \delta B_1; \quad \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x} = -\frac{\eta}{h} + \gamma A_2 + \delta B_2, \quad (3.14)$$

где $A_k, B_k, k = 1, 2$ — функции от η и ее производных по x .

Подставляя (3.14) в (3.8), (3.9), (3.12) и пренебрегая членами порядков $\gamma^2, \gamma\delta, \delta^2$, из условий совместимости получающейся системы уравнений с учетом первого выражения (3.13) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \frac{\eta}{\rho + h} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[\frac{3hs\varepsilon(\varepsilon - 1)^3}{(\varepsilon + h)^4} - \frac{4\rho + h}{2} - \frac{3\rho}{2h} \right], \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -\frac{\eta}{\rho + h} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[\frac{3}{2} + \frac{\rho + 4h}{2h^2} + \frac{3s\varepsilon(\varepsilon - 1)^3}{(\varepsilon + h)^4} \right], \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} &= \frac{1}{6(\rho + h)} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \left\{ \rho(h^2 - 2) - h \left[1 + 3\sigma - \frac{2s\varepsilon(\varepsilon - 1)^2(\varepsilon + h^3)}{(\varepsilon + h)^4} \right] \right\}, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} &= \frac{1}{6(\rho + h)} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \left[\rho h + 2h^2 - 1 + 3\sigma - \frac{2s\varepsilon(\varepsilon - 1)^2(\varepsilon + h^3)}{(\varepsilon + h)^4} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

С использованием выражений (3.15) каждое из трех уравнений системы, полученной в результате проведенной выше подстановки, превращается в уравнение Кортевега-де Фриза. В размерном виде имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3q}{2} \frac{\eta}{h_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (3.16)$$

$$q = \mu^{-1} h^{-1} [(1 - \rho)(h^2 - \rho)(\varepsilon + h)^4 - N\varepsilon(\varepsilon - 1)^2(h + 1)(h^2 - \rho\varepsilon)],$$

$$\kappa = \mu^{-1} \{ (\varepsilon + h)^4 [h(1 - \rho)(1 + \rho h) - 3A(\rho + h)] + N\varepsilon(\varepsilon - 1)^2(h^2 - 1)(h^2 - \rho\varepsilon) \},$$

$$\mu = (\rho + h)(\varepsilon + h)[(1 - \rho)(\varepsilon + h)^3 - N\varepsilon(\varepsilon - 1)^2],$$

$$\beta = \frac{\kappa}{6} c_0 h_1^2, \quad A = \frac{\alpha}{\rho_1 g h_1^2}, \quad N = \frac{\varepsilon_1 u_0^2}{4\pi \rho_1 g h_1^3}. \quad (3.17)$$

Использование вместо числа Бонда безразмерного параметра A — величины, обратной числу Бонда, упрощает формулы. Напомним, что $\rho < 1$, кроме того, в силу (2.5) выполняется условие

$$N < \frac{(1 - \rho)(\varepsilon + h)^3}{\varepsilon(\varepsilon - 1)^2}, \quad (3.18)$$

так что $\mu > 0$.

4. Следуя [5], нетрудно построить решение уравнения Кортевега-де Фриза (3.16), описывающее движущиеся с постоянными скоростями U_s, U_c уединенные либо периодические волны. Необходимо отметить, что в отличие от классической теории слабо диспергирующих волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов [7] в уравнении (3.16) коэффициент q

при нелинейном члене наряду с положительными может принимать и отрицательные значения. Ввиду этого солитонные решения записываются следующим образом:

$$\eta = \nu a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3\gamma}{4h_1^2} \left| \frac{q}{\kappa} \right|} (x - U_s t) \right]; \quad U_s = c_0 \left(1 + \frac{\nu}{2} \gamma q \right); \quad \nu = \operatorname{sgn} \left(\frac{q}{\kappa} \right), \quad (4.1)$$

в то время как для выражающихся через эллиптический косинус [8] кноидальных волн имеем

$$\eta = \nu a \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{3\delta}{4h_1^2} \left| \frac{q}{\kappa} \right|} (x - U_c t), m \right],$$

$$U_c = c_0 \left[1 + \frac{\nu}{2} q (2\gamma - \delta) \right], \quad m = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}, \quad 0 < \gamma \leq \delta. \quad (4.2)$$

В предельных случаях $m \rightarrow 0$, $m \rightarrow 1$ периодические решения (4.2) уравнения Кортевега–де Фриза вырождаются: в первом случае в линейные решения, рассмотренные в разделе 2, а во втором — в последовательность солитонов. Согласно терминологии [6], солитон, имеющий вид возвышения (случай $q/\kappa > 0$), называется положительным, а солитон, имеющий вид впадины (случай $q/\kappa < 0$), называется отрицательным. Далее положительные и отрицательные солитоны обозначаются соответственно символами S_+ , S_- .

а) В классическом случае (при отсутствии как верхнего слоя жидкости, так и поля $\rho = 0$, $N = 0$, $q = 1$) в пренебрежении капиллярными эффектами ($A = 0$, $\kappa = 1$) солитон на мелкой воде [5] является положительным. При учете сил поверхностного натяжения увеличение A вызывает (при $A = 1/3$) изменение знака коэффициента β в уравнении Кортевега–де Фриза, что влечет за собой качественное изменение характера решения. При $0 \leq A < 1/3$ солитон оказывается положительным, в то время как при $A > 1/3$ — отрицательным [7], причем скорость положительного солитона U_s^+ больше предельной скорости c_0 распространения длинных волн в рассматриваемом слое, а отрицательного U_s^- — меньше c_0 . Учет сил поверхностного натяжения приводит также к уменьшению (по сравнению со случаем $A = 0$) характерной ширины положительного солитона.

При $0 < m^2 < 1/2$ в случае $0 \leq A < 1/3$ скорость кноидальных волн меньше c_0 , а в случае $A > 1/3$ — больше c_0 . При $1/2 < m^2 < 1$ в случае $0 \leq A < 1/3$ имеем $U_c > c_0$, а в случае $A > 1/3$ имеем $U_c < c_0$. При малом отличии m от 1 в случае $0 \leq A < 1/3$ кривизна профиля кноидальной волны в вершине существенно больше, чем кривизна во впадине, в то время как в случае $A > 1/3$ реализуется противоположная ситуация: в вершине волны кривизна существенно меньше, чем во впадине. Далее кноидальные волны с профилем первого типа обозначаются символом S_+ , а с профилем второго типа — символом S_- .

б) Пусть верхний слой представляет собой воздушный промежуток, а нижний — диэлектрическую жидкость, ввиду чего $\rho = 0$. При наличии

		$N < N_1$	$N_1 < N < N_2$
$m = 1$	$0 \leq A < \frac{1}{3}$	$S_+; U_s^+ > c_0$	$S_-; U_s^- > c_0$
	$A > \frac{1}{3}$	$S_-; U_s^- < c_0$	$S_+; U_s^+ < c_0$
$\frac{1}{2} < m^3 < 1$	$0 \leq A < \frac{1}{3}$	$C_+; U_c > c_0$	$C_-; U_c > c_0$
	$A > \frac{1}{3}$	$C_-; U_c < c_0$	$C_+; U_c < c_0$
$0 < m^2 < \frac{1}{2}$	$0 \leq A < \frac{1}{3}$	$U_c < c_0$	$U_c < c_0$
	$A > \frac{1}{3}$	$U_c > c_0$	$U_c > c_0$

электрического поля к числу безразмерных параметров, от которых зависят волновые движения со свободной поверхностью, добавляются N , h , $\varepsilon < 1$, так что в некотором диапазоне изменения этих параметров характер поведения решения уравнения (3.16) отличается большим разнообразием, вызванным возможностью перемены знака как κ , так и коэффициента q . При этом возникают не только количественные, но и качественные отличия от классических солитонов и кноидальных волн на мелкой воде.

Результаты качественного анализа решений (4.1), (4.2) в случае одинаковых толщин воздушного промежутка и слоя жидкого диэлектрика ($h = 1$), проведенные с учетом (3.18), представлены в виде таблицы, где введены следующие обозначения:

$$N_1 = \frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon - 1)^{-2}(\varepsilon + 1)^4, \quad N_2 = 2(1 + \varepsilon)^{-1}N_1.$$

Из таблицы видно, что в достаточно сильном электрическом поле ($N_1 < N < N_2$) поверхностные ponderomotorные силы оказывают существенное влияние на волновую картину: при $0 \leq A < 1/3$ в отличие от классического случая возникают отрицательные солитоны, распространяющиеся со скоростью, превышающей c_0 , в то время как при $A > 1/3$ возникают положительные солитоны, скорость которых меньше c_0 . Аналогичная перестройка профиля волновой поверхности при наличии достаточно сильного электрического поля происходит и в случае кноидальных волн. Профили типов C_+ , C_- возникают при m , близких к 1 (в таблице они внесены в графу $1/2 < m^2 < 1$).

в) Рассмотрим двухслойный жидкий диэлектрик, у которого толщины каждого из слоев достаточно велики, так что влиянием капиллярных эффектов можно пренебречь — случай $A \ll (h/3)(1 - \rho)(1 + \rho h)(\rho + h)^{-1}$. Обращаясь к (4.1), (4.2) и учитывая выражения (3.17), нетрудно показать, что в отсутствие электрического поля ($N = 0$) при $h^2 > \rho$ реализуется положительный, а при $h^2 < \rho$ — отрицательный солитон, причем скорости как положительного, так и отрицательного солитонов больше c_0 . В этой связи следует напомнить, что в случае одного слоя при слабо выраженных капиллярных эффектах отрицательный солитон в отсутствие электрического поля не возникает. Образование отрицательного солитона в двухслойной жидкости при $h^2 < \rho$ объясняется воздействием верхнего

слоя весомой жидкости на нижний слой. Влияние верхнего слоя сказывается и на скорости распространения кноидальных волн: в случае $h^2 > \rho$ имеем $U_c < c_0$ при $0 < m^2 < 1/2$ и $U_c > c_0$ при $1/2 < m^2 < 1$, в то время как в случае $h^2 < \rho$ получаем $U_c > c_0$ при $0 < m^2 < 1/2$ и $U_c < c_0$ при $1/2 < m^2 < 1$. При m , близких к 1, в случае $h^2 > \rho$ реализуются профили типа C_+ , а в случае $h^2 < \rho$ — профили типа C_- .

При наличии электрического поля четырехмерное многообразие безразмерных параметров N, ε, ρ, h разбивается на области, каждой из которых соответствует либо положительный, либо отрицательный солитон со скоростью либо большей, либо меньшей c_0 . Вводя обозначения $N_0 = (1 - \rho)(\varepsilon + h)^4(1 - \varepsilon)^{-2}[\varepsilon(h + 1)(h^2 - \rho\varepsilon)]^{-1}$, $N_3 = h(1 + \rho h)(h - 1)^{-1}N_0$, $N_4 = (h^2 - \rho)N_0$, укажем в качестве примеров четыре такие области: 1) $0 < N < N_3$, $\varepsilon > \rho^{-1}$, $\rho < 1$, $1 < h^2 < \rho\varepsilon$: положительный солитон, $U_s^+ > c_0$; 2) $0 < N < N_3$, $\varepsilon < 1$, $\rho < 1$, $\rho\varepsilon < h^2 < \rho$: отрицательный солитон, $U_s^- > c_0$; 3) $N > \max(N_3, N_4)$, $\varepsilon < 1$, $\rho < 1$, $\rho\varepsilon < h^2 < \rho$: положительный солитон, $U_s^+ < c_0$; 4) $N > \max(N_3, N_4)$, $\varepsilon > \rho^{-1}$, $\rho < 1$, $1 < h^2 < \rho\varepsilon$: отрицательный солитон, $U_s^- < c_0$. В этих областях соотношения между скоростью распространения кноидальных волн U_0 и c_0 при $1/2 < m^2 < 1$ имеют тот же вид, что и для солитонов, а при $0 < m^2 < 1/2$ знаки неравенств изменяются на противоположные. При m , близких к 1, в случаях 1, 3 реализуются кноидальные волны с профилями типа C_+ , а в случаях 2, 4 — типа C_- .

Список литературы

- [1] Alj A., Denat A., Gosse J.P. et al. // IEEE Trans. Electr. Insul. 1985. Vol. E1-20. N 2. P. 221-231.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [3] Shehawy E.P., Gawaad N.R. // Int. J. Theor. Phys. 1989. Vol. 28. N 12. P. 1533-1558.
- [4] Mohamed A.A., Shehawy E.F.J. // Fluid Mech. 1983. Vol. 129. P. 473-494.
- [5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [6] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
- [7] Benjamin T.B. // Quart. Appl. Math. 1982. Vol. 40. N 2. P. 231-234.
- [8] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1108 с.

Институт механики
Москва

Поступило в Редакцию
16 ноября 1991 г.