01

ЕМКОСТЬ НЕЗАМКНУТОГО СФЕРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА И КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЭКВИДИСТАНТНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

В.А.Шелюто

С помощью метода средних потенциалов получено приближенное выражение для емкости сферического конденсатора. Результаты вычислений обобщены на случай любых электростатических систем с эквидистантными электродами. Предложены простые формулы для вычисления емкости сферического, конического, эллиптического и ряда других конденсаторов.

Введение

Данная работа завершает программу вычисления связанных с краевыми эффектами поправок к емкости конденсаторов с эквидистантными электродами. В первой работе серии [1] рассмотрен плоский конденсатор с пластинами в виде двух одинаковых коаксиальных колец. Была установлена функциональная зависимость емкости от геометрических параметров и предложена простая формула для ее вычисления. Затем аналогичные результаты были получены для емкости цилиндрического конденсатора [2]. В первом разделе настоящей работы рассмотрен конденсатор с электродами в виде полых сферических сегментов. Как и ранее [1,2], в основу вычислений положен известный метод средних потенциалов (метод Хоу) [3]. Значение емкости, найденное в приближении Хоу, оказывается несколько меньше истинного, однако этот недостаток вполне компенсируется чрезвычайной простотой расчетных формул.

Несмотря на различия в конструкциях трех упомянутых конденсаторов, конечные формулы для емкости имеют одинаковую структуру. Причина этого состоит в том, что при небольшом расстоянии между обкладками вся поправка к емкости происходит от малой области вблизи краев конденсатора, в которой обкладки можно приближенно считать плоскими. На основании этого во второй части работы получена простая формула для вычисления емкости конденсаторов с обкладками произвольной формы (но при постоянном зазоре между ними). Необходимость подобной формулы диктуется тем, что замкнутое выражение для емкости (даже в приближении средних потенциалов) может быть найдено только в ряде отдельных случаев. К ним относятся плоский, цилиндрический и сферический конденсаторы, в которых обкладки совпадают с координатными поверхностями, а края — с координатными линиями. Но и при этом поверхностные интегралы, возникающие в методе средних потенциалов, являются достаточно громоздкими.

Последняя часть работы посвящена применению качественных методов, изложенных во втором разделе, для нахождения емкости различных типов конденсаторов с эквидистантными электродами. Вывод всех расчетных формул произведен здесь без вычисления каких-либо интегралов и легко может быть повторен в аналогичных ситуациях.

1. Простая формула для емкости сферического конденсатора

Рассмотрим конденсатор с пластинами в виде полых концентрических сферических сегментов с одинаковым полярным углом θ. Радиус внешнего электрода a, внутреннего b. Точное решение задачи о поле сферического конденсатора предложено в работе [4]. Потенциал электростатического поля и плотность заряда на электродах выражены в квадратурах через вспомогательную функцию, являющуюся решением одномерного интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром. При таком подходе, однако, весьма сложно получить явную формулу для вычисления емкости. Приведенное в [4] решение интегрального уравнения в виде ряда по степеням параметра $\sqrt{b/a}$ эффективно лишь при $b/a \ll 1$, в то время как наиболее интересным является случай, когда зазор $d = a - b$ между электродами мал $d \ll a$ и $b/a \sim 1$.

Простую формулу для емкости сферического конденсатора, пригодную при $d \lesssim a$, можно получить, используя метод средних потенциалов. В этом приближении коэффициенты взаимной емкости C_{ab} $(a \neq b)$ и собственные емкости C_{aa} и C_{bb} двух сферических сегментов определяются соотношением

$$C_{ab}^{-1} = \int \frac{ds_a}{S_a} \int \frac{ds_b}{S_b} \frac{1}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\cos\theta)^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\theta} d\theta_1 \sin\theta_1 \int\limits_0^{\theta} d\theta_2 \sin\theta_2 \Big[a^2 + b^2 -$$

$$-2ab\left(\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\varphi + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2\right)\Big]^{-1/2}. \tag{1}$$

Емкость сферического конденсатора C выражается через емкостные коэффициенты (1) с помощью известного соотношения

$$\frac{1}{C} = C_{aa}^{-1} - 2C_{ab}^{-1} + C_{bb}^{-1}. \tag{2}$$

Непосредственное интегрирование по одной из переменных θ_1 или θ_2 приводит к возникновению эллиптических интегралов на ранней стадии вычислений и дальнейшее продвижение затрудняется. Следуя [5], избавимся от иррациональности в знаменателе подынтегрального выражения (1) с помощью введения вспомогательного параметра z. После этого интегралы по переменным φ, θ_1 и θ_2 легко берутся

$$C_{ab}^{-1} == \frac{1}{\pi^2(1-\cos\theta)^2}\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^\theta d\theta_1\sin\theta_1\int\limits_0^\theta d\theta_2\sin\theta_2\Big[z^2+a^2+b^2-$$

$$-2ab\left(\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot\cos\varphi+\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\right)\Big]^{-1}=$$

$$=\frac{2}{\pi ab(1-\cos\theta)}\int\limits_0^\infty dzz^2\left\{\frac{1}{z^2+d^2}-\frac{1}{\sqrt{z^2+d^2}\cdot\sqrt{z^2+d^2+4ab\sin^2\theta}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\theta}{\sqrt{z^2+d^2}\cdot\sqrt{z^2+d^2+4ab\sin^2\theta}}\frac{\sqrt{z^2+d^2+4ab\sin^2\theta}-\sqrt{z^2+d^2}}{\sqrt{z^2+d^2+4ab\sin^2\theta}+\cos\theta\cdot\sqrt{z^2+d^2}}\right\}. \tag{3}$$

Интегрируя (3) по оставшейся переменной z, получим

$$C_{aa}^{-1}=\frac{2}{\pi a(1-\cos\theta)}\frac{\sin\theta-\theta\cdot\cos\theta}{\sin^2(\theta/2)}. \tag{4}$$

Аналогичное равенство справедливо и для величины C_{bb}^{-1}.

При $a\neq b$ интеграл (3) уже не выражается через элементарные функции. Запишем его в виде

$$C_{ab}^{-1}=\frac{2}{\pi ab(1-\cos\theta)}\left\{-\frac{\pi}{2}d+\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}\left[\sqrt{d^2+4ab\sin^2\theta}\cdot E(q)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\pi}{2}(a+b)\cdot\cos\theta+\frac{d^2\cdot\cos^2\theta}{\sqrt{d^2+4ab\sin^2\theta}}\Big[\Pi(n,q)-K(q)\Big]\right]\right\}, \tag{5}$$

где $K(q)$, $E(q)$ и $\Pi(n,q)$ — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов соответственно [6], зависящие от параметров

$$n=\frac{4ab}{(a+b)^2},\qquad q^2=\frac{4ab\sin^2\theta}{d^2+4ab\sin^2\theta}. \tag{6}$$

Комбинируя равенства (2), (4) и (5), можно сразу же написать формулу (в приближении Хоу) для вычисления емкости сферического конденсатора. Однако из-за наличия эллиптических интегралов такая формула неудобна для практического использования, кроме того, она достаточно громоздка. С целью получения более простого выражения для емкости, обратимся к предельным значениям величины $C(\theta)$ при различных углах θ.

Прежде всего рассмотрим предел $\theta \to 0$. От эллиптического интеграла третьего рода избавимся, используя разложение $\Pi(n, q)$ в ряд, полученное в работе [1]. Отдельные слагаемые в выражении (5) при $\theta \to 0$ весьма сингулярны, из-за чего в разложении $\Pi(n, q)$ необходимо удерживать три первых члена

$$\Pi(n,q) \simeq \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{n-q^2}}\frac{1}{\sqrt{1-n}} + \frac{1}{n}\left[K(q) - \frac{E(q)}{1-q^2}\right] -$$
$$-\frac{2}{3}\frac{1-n}{n^2}\left[\frac{1-\frac{3}{2}q^2}{1-q^2}K(q) - \frac{1-2q^2}{(1-q^2)^2}E(q)\right]. \tag{7}$$

Параметром малости в (7) является величина

$$\frac{1-n}{1-q^2} = \frac{d^2 + 4ab\sin^2\theta}{(a+b)^2} \simeq \left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \sin^2\theta, \tag{8}$$

поэтому следует дополнительно указать закон, по которому угол θ стремится к нулю. В зависимости от соотношения между малыми параметрами d/a и $\sin\theta$ будем различать два случая. В первом из них $\sin\theta \ll d/a \ll \ll 1$ и $C_{ab}^{-1} \simeq 1/d$, что соответствует взаимодействию двух точечных зарядов, разнесенных на расстояние d. Более интересен противоположный случай $d/a \ll \sin\theta \ll 1$, отвечающий пределу плоского конденсатора. Действительно, расстояние между электродами d должно быть значительно меньше радиуса пластин $R = a\sin\theta$, а величина R в свою очередь — много меньше радиуса кривизны a. В ведущем по $\sin\theta$ порядке емкость равна

$$C \simeq \frac{1-\cos\theta}{2}\frac{ab}{a-b}\left[1 - \frac{1+\cos\theta}{2}\frac{d}{\pi a\sin\theta}\left(\ln\frac{8a\sin\theta}{d} - \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Оказывается, что такой же предельный вид выражение для емкости имеет при $\theta \simeq \pi/2$ (удерживаются лишь первые степени $\cos\theta$) и при $\theta \lesssim \pi$. Это позволяет использовать формулу (9) в качестве интерполяционной во всем интервале $0 < \theta \leqslant \pi$. Формула (9) имеет ясный физический смысл. Множитель

$$C_0 = \frac{1-\cos\theta}{2}\frac{ab}{a-b} \tag{10}$$

перед квадратной скобкой равен емкости сферического конденсатора без учета краевых поправок. Относительный вклад поправки к емкости C_0 зависит от азимутального угла θ. Он максимален в пределе плоского конденсатора ($\theta \to 0$) и, как и должно быть, обращается в нуль при $\theta = \pi$.

Придадим формуле (9) более законченный вид, введя обозначение $\gamma = d/\pi a\sin\theta$ и заменив константу $\ln 8 - 1/2$ на близкую к ней $\ln\pi + 1/2$ (ср. с [1,2]),

$$C \simeq \frac{C_0}{1 - \frac{1+\cos\theta}{2}\left(\gamma\ln\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{11}$$

Было бы естественно рассмотреть теперь более общий случай — конденсатор с пластинами в виде сферических ободков, ограниченных азимутальными углами θ и θ' (до сих пор было $\theta' = 0$). Но из-за наличия в задаче дополнительного свободного параметра θ' явные выражения для коэффициентов C^{-1}_{ab} становятся чрезвычайно громоздкими. Отложим поэтому вычисление емкости такого конденсатора до раздела 3, где она будет найдена на основании простых качественных рассуждений.

2. Ведущая логарифмическая поправка к емкости

Интересно сравнить выражения для емкости кольцевого конденсатора (формула (16) в работе [1], цилиндрического ((13) в [2]) и сферического (11). Отличительной чертой конденсаторов перечисленных типов является постоянство зазора d между электродами, причем в пределе $d \to 0$ оба электрода в точности совпадают. При не очень большом зазоре точное значение емкости C мало отличается от асимптотического $C_0 = S/4\pi d$ (S — площадь соприкосновения электродов при $d = 0$). Количественно малость характеризует параметр α, равный по порядку величины отношению d к некоторому эффективному размеру конденсатора l. В первом порядке по α

$$C \simeq C_0 \cdot \left[1 + k \cdot \alpha \cdot \left(\ln \frac{1}{\alpha} + \chi\right)\right], \tag{12}$$

где k и χ — константы, разные, вообще говоря, для различных типов конденсаторов.

Выражение (12) содержит два первых члена асимптотического ряда по параметру $\alpha \to 0$. Хорошо известно [7], что происхождение логарифмического слагаемого $\alpha \ln(1/\alpha)$ обусловлено избыточной плотностью заряда на краях электродов. С другой стороны, все результаты в [1,2] и в данной работе получены на основании метода средних потенциалов, исходя из предположения о равномерном распределении заряда на пластинах конденсатора. Покажем теперь, что правильное значение ведущей (в пределе $\alpha \to 0$) логарифмической поправки $\alpha \ln(1/\alpha)$ получается при любом физически разумном распределении заряда по поверхности пластин.

Исходя из вариационного принципа Гаусса [8,9] для емкости можно написать неравенство

$$C \geqslant C[\sigma] = \frac{\left[\int ds_i \sigma(\mathbf{r}_i)\right]^2}{\sum_{i=1,2} \int ds_i \sigma(\mathbf{r}_i)\varphi(\mathbf{r}_i)}, \tag{13}$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1,2} \int \frac{ds_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\sigma(\mathbf{r}_j), \tag{14}$$

а выражение в числителе (13) равно просто квадрату заряда на любом из двух ($i = 1, 2$) проводников. Функционал $C[\sigma]$ достигает своего максимума C на точном решении задачи, соответствующем миниму энергии электростатического поля.

Истинное распределение заряда чаще всего неизвестно, однако его характерные свойства можно проследить на какой-нибудь простой модели.

Рассмотрим, например, полосковую линию, состоящую из двух одинаковых, бесконечно длинных полос шириной H, разнесенных на расстояние d ($d \ll H$). В этом случае плотность распределения заряда зависит от одной переменной z. Вдали от краев пластин ($z = 0$ либо $z = H$) поверхностная плотность $\sigma_{1,2}(z)$ постоянна и равна $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0 = V/4\pi d$, где V — разность потенциалов. На краях же функция $\sigma(z) = |\sigma_{1,2}(z)|$ имеет интегрируемую особенность. Для определенности будем рассматривать поведение плотности заряда вблизи одного из краев ($z = 0$). Тогда при $z \lesssim d/2\pi$ имеем $\sigma(z) \simeq (V/4\pi d)\sqrt{d/\pi z} = \sigma_0\sqrt{d/\pi z}$. В промежуточной области $d \ll z \ll H$ поверхностная плотность заряда равна $\sigma(z) \simeq V/4\pi d + V/8\pi^2 z = \sigma_0 \cdot (1 + d/2\pi z)$ [10].

Основной вклад $C_0 = H/4\pi d$ в емкость (на единицу длины) набирается при интегрировании фоновой плотности σ_0 в пределах $0 \leqslant z \leqslant H$. Вклад слагаемого $\sigma_0\sqrt{d/\pi z}$, несмотря на сингулярность при $z \to 0$, мал, что обусловлено малостью области интегрирования. По порядку величины он равен $(d/H) \cdot C_0$ и не содержит логарифмического усиления.

Искомая логарифмическая поправка ΔC к емкости определяется избыточной плотностью заряда $\Delta\sigma = \sigma_0 \cdot (d/2\pi z) \sim 1/z$ в области $d \ll z \ll H$ [7]. С логарифмической точностью имеем $\Delta C \simeq 2 \cdot (d/2\pi H) \cdot \ln(H/d) \cdot C_0$ (удвоение связано с вкладом симметричной области $d \ll H - z \ll H$. Но такой же результат, как уже отмечалось, получается и в предположении о равномерном распределении заряда [1].

Посмотрим теперь, что произойдет, если взять плотность заряда в области $d \ll z \ll H$ в виде

$$\sigma(z) = N_\eta \cdot \left[1 + \frac{d}{2\pi}\eta(z)\right], \tag{15}$$

где $\eta(z)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{d}{2\pi H}\int\limits_d^H dz|\eta(z)| \ll 1, \tag{16}$$

а N_η — нормировочный множитель.

Потенциалы на пластинах конденсатора, создаваемые распределением заряда (15), зависят от координаты z (условие эквипотенциальности нарушено)

$$\varphi_1(z) = -\varphi_2(z) = \int\limits_0^H dx\sigma(x)\ln\frac{d^2 + (x-z)^2}{(x-z)^2}. \tag{17}$$

При $z \gg d$ основной вклад в интеграл (17) вносит область $|x - z| \sim d$, поэтому

$$\varphi_1(z) = -\varphi_2(z) \simeq \sigma(z) \cdot \int\limits_0^H dx\ln\frac{d^2 + (x-z)^2}{(x-z)^2} \simeq$$

$$\simeq \sigma(z)\cdot 2\pi d\cdot\left(1-\frac{d}{2\pi z}\right)\simeq 2\pi d\cdot N_\eta\cdot\left[1-\frac{d}{2\pi z}+\frac{d}{2\pi}\eta(z)\right]. \qquad (18)$$

Из последнего равенства видно, что для равновесного распределения $\eta(z)\simeq 1/z$ потенциал в области $d\lesssim z\lesssim H$ приблизительно постоянен.

Подставляя равенства (15) и (18) в (13) и удерживая только члены первого порядка по малому параметру $\alpha = d/H$, получим

$$C[\eta] = \frac{H}{4\pi d}\frac{1+2\frac{d}{\pi H}\int dz\eta(z)}{1-2\frac{d}{2\pi H}\int\frac{dz}{z}+2\frac{d}{\pi H}\int dz\eta(z)}\simeq$$

$$C_0\cdot\left[1+\frac{\alpha}{\pi}\int\frac{dz}{z}\right]\simeq C_0\cdot\left[1+\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{\alpha}\right]. \qquad (19)$$

Интегрирование по z в формуле (19) ведется по области $d\lesssim z\lesssim H$ (в безразмерных единицах $\alpha\lesssim z\lesssim 1$); явно выделенный коэффициент 2 соответствует двум одинаковым вкладам от каждого из краев.

Важно отметить, что однородное распределение заряда ($\eta(z)=0$) создает на каждой из пластин потенциал, пропорциональный при $d\lesssim z\lesssim H$ фактору $(1-d/2\pi z)$. Добавочное слагаемое $d/2\pi z$ остается нескомпенсированным после сокращения членов с функцией $\eta(z)$ в числителе и знаменателе выражения (19) и приводит в конечном счете к логарифмической поправке $\alpha\ln(1/\alpha)$.

Таким образом, для нахождения емкости с точностью до членов порядка $\alpha\ln(1/\alpha)$ достаточно в логарифмической области вычислить потенциал, создаваемый однородным распределением заряда. Это справедливо для любых конденсаторов с эквидистантными электродами, совпадающими при $d=0$. В качестве иллюстрации обратимся к трем рассмотренным ранее типам конденсаторов: плоскому, цилиндрическому и сферическому.

а) П л о с к и й к о н д е н с а т о р с круглыми пластинами. Радиус пластин равен R, расстояние между ними d.

В приближении Хоу потенциалы на обкладках равны $\varphi(r)=\pm[\Phi(r,0)-\Phi(r,d)]$, где $\Phi(r,z)$ — потенциал, создаваемый однородно заряженным диском [1,5];

$$\Phi(r,z)=\frac{Q}{\pi R^2}\Big\{-\pi z+\frac{2}{\sqrt{\bar n}}[(R+r)\cdot E(\bar q)+$$

$$+(R-r)\cdot K(\bar q)-(R-r)\cdot(1-\bar n)\cdot\Pi(\bar n,\bar q)]\Big\}, \qquad (20)$$

$$\bar n=\frac{(R+r)^2}{z^2+(R+r)^2},\qquad \bar q^2=\frac{4Rr}{z^2+(R+r)^2}. \qquad (21)$$

В логарифмической области $d\ll(R-r)\ll R$ имеем

$$\varphi(r)\simeq\pm Q\frac{2\pi d}{S}\cdot\left[1-\frac{d}{2\pi(R-r)}\right]. \qquad (22)$$

б) Ц и л и н д р и ч е с к и й к о н д е н с а т о р. Радиус внешнего электрода равен a, внутреннего b, их длина H.

Потенциал, создаваемый однородно заряженным цилиндром радиуса a, равен

$$\varphi(r,z) = \frac{Q}{\pi H}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \ln \frac{z + H/2 + \sqrt{(z+H/2)^2 + a^2 + r^2 - a\arccos\varphi}}{z - H/2 + \sqrt{(z-H/2)^2 + a^2 + r^2 - 2\arccos\varphi}} \tag{23}$$

Два же разноименно заряженных коаксиальных цилиндра с радиусами a и b создают на каждом из них в логарифмической области $d \ll z \ll \min(a, H)$ потенциалы

$$\varphi_{a,b}(z) \simeq U_c \pm \frac{Q\cdot\ln(a/b)}{H}\left[1 - \frac{d}{2\pi z}\right]. \tag{24}$$

Здесь $d = a - b$, U_c — несущественная константа, расстояние z отсчитывается от края конденсатора.

в) С ф е р и ч е с к и й к о н д е н с а т о р. Для простоты рассмотрим частный случай — конденсатор с электродами в виде двух полусфер (радиус внешней равен a, внутренней b).

Потенциал, создаваемый в пространстве однородно заряженной полусферой радиуса a, равен

$$\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{\pi a r}\int dz \ln \frac{[z^2 + (a+r)^2]\cdot(1-\cos\theta)}{\sqrt{(z^2+a^2+r^2)^2 - 4a^2r^2\sin^2\theta - \cos\theta\cdot(z^2+a^2+r^2)}}. \tag{25}$$

При углах θ, близких к $\pi/2$ ($d/a \ll \cos\theta \ll 1$), потенциалы на обкладках конденсатора равны

$$\varphi_{ab}(\theta) \simeq U_s \pm Q\frac{a-b}{ab}\left[1 - \frac{d}{2\pi a\cos\theta}\right], \tag{26}$$

где U_s — несущественная константа.

Сравнивая формулы (22), (24) и (26), видим, что в предположении о равномерном распределении заряда потенциалы на пластинах конденсатора равны

$$\varphi_{1,2}(r) \simeq \pm\frac{Q}{2C_0}\left(1 - \frac{d}{2\pi r}\right) + \mathrm{const}, \tag{27}$$

где C_0 — емкость конденсатора данного типа без учета краевых эффектов, r — расстояние от края пластин.

Потенциалы $\varphi_{1,2}(r)$ слабо зависят от координаты r, так как $d/2\pi r \ll \ll 1$ при $r \gg d$. Последнее позволяет усреднить потенциалы по площади электродов и приписать каждому из них средний потенциал $\bar{\varphi}_{1,2}$. При интегрировании слагаемого, пропорционального $1/r$, элемент площади можно считать равным $ds \simeq L\cdot dr$, где L — длина периметра обкладки. Логарифмически расходящийся интеграл по r обрезается снизу параметром d. Под верхним пределом интегрирования Δ следует понимать некий минимальный размер пластин конденсатора. Последнее утверждение требует пояснений. Допустим сначала, что обкладки представляют собой односвязные поверхности с границей Γ (достаточно рассмотреть случай $d = 0$, когда обе поверхности в точности совпадают). Тогда в качестве величины Δ можно взять отношение $l \equiv 2S_m/L$, где S_m — минимальная поверхность, ограниченная контуром Γ (для плоского конденсатора площадь S_m равна площади обкладок S). В случае же N-связных поверхностей параметр Δ_i (для каждой из границ Γ_i) по порядку величины равен $\min(l_i, \delta_i)$, где δ_i — расстояние до ближайшей особенности.

Емкость конденсатора в приближении средних потенциалов равна $C = Q/|\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2|$. Вблизи каждой из границ Γ_i существует логарифмическая область $d \ll r \ll \Delta_i$, вносящая в емкость дополнительный вклад $\Delta C_i \simeq C_0 \cdot (d/2\pi) \cdot (L_i/S) \cdot \ln(\Delta_i/d)$, поэтому

$$C \simeq C_0 \cdot \left[1 - \frac{d}{2\pi S} \sum_{i=1}^{N} L_i \cdot \left(\ln \frac{\Delta_i}{d} + \chi\right)\right]^{-1} . \tag{28}$$

Конечно, приведенные в этом разделе асимптотические оценки справедливы только в логарифмическом приближении и не дают возможности найти константу χ на фоне логарифмического слагаемого (в ряде случаев константу χ можно вычислить с помощью метода сращивания асимптотических разложений [11,12]. Однако, сравнивая соответствующие формулы для плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов, видим, что константа χ в приближении Хоу во всех случаях одинакова и равна $\chi_1 = \ln 8 - 1/2$. Только для квазиодномерных систем, таких как полосковая линия, цилиндрический и кольцевой конденсаторы с очень узкими электродами, имеем $\chi_2 = 3/2$. Различие между константами χ_1 и χ_2 незначительно, поэтому в формулу (28) можно подставить любую из них.

Сравним теперь формулы для емкости, полученные в приближении Хоу, с точными асимптотическими (в пределе $\alpha \to 0$) формулами в двух хорошо известных случаях. Так, для плоского конденсатора с круглыми пластинами точное значение константы равно $\chi_1' = \ln(16\pi) - 1$ и $\chi_1' - \chi_1 = \ln(2\pi) - 1/2 \equiv \Delta\chi$. Аналогично для полосковой линии имеем $\chi_2' = \ln(2\pi) + 1$ и снова $\chi_2' - \chi_2 = \ln(2\pi) - 1/2 = \Delta\chi$. Поправка к емкости, связанная с добавочной константой $\Delta\chi$, в обоих случаях пропорциональна длине периметра обкладок $\Delta C_\chi = L \cdot (\Delta\chi/8\pi^2)$.

Последнее легко понять на примере полосковой линии. Выше было показано, что ведущую логарифмическую поправку к емкости можно получить двумя эквивалентными способами: либо вычисляя дополнительный заряд на электродах при постоянной разности потенциалов V, либо усредняя потенциалы при однородном распределении заряда. Отступим от одного из краев пластины на расстояние ρ ($h \ll \rho \ll H$) и найдем заряд ΔQ_1, находящийся в области $z \geqslant \rho$. Из явного решения [10] следует $\Delta Q_1 \simeq VC_0(h/2\pi H) \cdot [\ln(H/\rho) + \chi_>]$, причем $\chi_> = 0$. Аналогично в методе Хоу поправка к потенциалу, происходящая от области $z \geqslant \rho$, равна $\Delta\bar{\varphi}_1 \simeq -(Q/2C_0)(h/2\pi H) \cdot \ln(H/\rho)$ и также не содержит константы на фоне логарифма. В общем случае пластин произвольной формы константа $\chi_>$ не равна нулю (например, для круглых пластин $\chi_> = \ln 8 - 2 \simeq 0.08$), но она одинакова для ΔQ_1 и $\Delta\bar{\varphi}_1$.

Рассмотрим теперь область $0 \leqslant z \leqslant \rho$ вблизи края пластины. Сосредоточенный в ней дополнительный заряд равен $\Delta Q_2 \simeq VC_0(h/2\pi H) \times$

$\times [\ln(2\pi\rho/h)+1]$. Соответствующая поправка к потенциалу, возникающая в методе Хоу, равна $\Delta\bar{\varphi}_2 \simeq -(Q/2C_0)\cdot[\ln(\rho/h)+3/2]$. Вся разность $\Delta\chi = \ln(2\pi) - 1/2$ набирается в узкой области $0 \leqslant z \leqslant \rho$ вблизи краев, и дополнительный вклад в емкость оказывается пропорциональным длине периметра обкладок конденсатора.

Таким образом, можно сформулировать следующее эвристическое утверждение. Для нахождения емкости C конденсатора с эквидистантными электродами в первом порядке по параметру α (формула (12)) достаточно к емкости C_H в приближении Хоу прибавить величину ΔC_χ, так что

$$C \simeq C_H + \Delta C_\chi = C_H + \frac{L}{8\pi^2}\left(\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\right). \qquad (29)$$

В качестве примера рассмотрим конденсатор с квадратными пластинами размером a. Емкость в приближении Хоу равна

$$C_H \simeq C_0 \cdot \left\{1 + \frac{2d}{\pi a}\left[\ln\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{d} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right]\right\}, \qquad (30)$$

где $C_0 = a^2/4\pi d$.

Прибавив к выражению в квадратных скобках константу $\Delta\chi = \ln(2\pi) - 1/2$, придем к формуле для емкости, в точности совпадающей с полученной в работе [12]. Если аналитическое выражение для C_H отсутствует (необходимые поверхностные интегралы берутся лишь в исключительных случаях), то можно воспользоваться формулой (28). Для квадратного конденсатора $\Delta = 2S/L = a/2$ и константа $\chi = \ln 4 + \ln(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - 1/2 \simeq 1.42$ в (30) незначительно отличается от 3/2. Другие примеры использования формулы (28) будут рассмотрены в следующем разделе.

3. Вычисление емкости в ряде конкретных случаев

Уточним прежде всего, что подразумевается под величиной C_0 в формуле (28). Для плоского конденсатора очевидно $C_0 = S/4\pi d$. В общем же случае площади поверхности обкладок S_1, S_2 не совпадают и величина C_0 неизвестна (кроме цилиндрического и сферического конденсаторов). Так как в этой работе рассматриваются поправки к емкости C_0 не выше первого порядка по параметру α, то с требуемой точностью можно считать $C_0 \simeq \bar{S}/4\pi d$, где $\bar{S} = (S_1 + S_2)/2$. Например, для сферического конденсатора имеем $C_0 = ab/(a-b) = (a^2/d)\cdot(1-d/a)$. К такому же результату приводит и формула $C_0 \simeq 4\pi\bar{R}^2/4\pi d$, где $\bar{R} = (a+b)/2 = a(1-d/2a)$ — средний радиус.

Перейдем теперь к непосредственному вычислению емкости.

а) Конический конденсатор. Каждая из обкладок имеет вид усеченного конуса высотой H, средние радиусы верхнего и нижнего оснований равны соответственно $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$, расстояние d между обкладками много меньше всех остальных геометрических параметров. Из общей формулы (28) следует

$$C \simeq C_0 \cdot \left\{1 - \frac{d}{\pi M}\left[\frac{\bar{R}_1}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2}\ln\frac{\min(\bar{R}_1, M)}{d} + \right.\right.$$

$$+\frac{\bar{R}_2}{\bar{R}_1+\bar{R}_2}\ln\frac{\min(\bar{R}_2, M)}{d}+\bar{\chi}\Bigg]\Bigg\}^{-1}, \tag{31}$$

где $C_0 = (\bar{R}_1+\bar{R}_2)M/4d$, $M = \sqrt{H^2+(\bar{R}_1-\bar{R}_2)^2}$ — образующая конуса.

При $\bar{R}_1 = \bar{R}_2$ (или $\varphi = 0$, где $\varphi = \arccos(H/M)$ — угол наклона образующей) получаем формулу для емкости цилиндрического конденсатора [2]. В противоположном предельном случае $\varphi \to \pi/2$ приходим к формуле для емкости кольцевого конденсатора [1]. Как и ранее, можно положить $\bar{\chi} = \ln\pi + 1/2$.

б) Сферический конденсатор (общий случай). Рассмотрим конденсатор с обкладками в виде сферических ободков, ограниченных азимутальными углами θ_1 и $\theta_2 (\theta_2-\theta_1 = \Delta\theta > 0)$. Его емкость равна

$$C \simeq C_0\cdot\left\{1-\frac{d}{2\pi a(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}\left[\sin\theta_1\cdot\ln\frac{\Delta_1}{d}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\theta_2\cdot\ln\frac{\Delta_2}{d}+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)\cdot\bar{\chi}\right]\right\}^{-1}, \tag{32}$$

где $C_0 = (\cos\theta_1-\cos\theta_2)ab/2(a-b)$, $\Delta_{1,2} \simeq a\cdot\min(\sin\theta_{1,2}, \Delta\theta)$.

Полагая $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 0$, возвращаемся к выражению (11). При $\theta_1 \simeq \theta_2$ ($\Delta\theta \ll \theta_{1,2}$) формулы (31) и (32) совпадают. Пределу полосковой линии соответствует $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 \ll 1$.

в) „Лейденская банка". Обкладки конденсатора представляют собой два вложенных друг в друга цилиндрических тонкостенных стакана с плоским дном. Их радиусы равны R_1 и R_2, высоты H_1 и H_2. Зазор между обкладками мал и постоянен ($d = R_1 - R_2 = H_1 - H_2$). Согласно формуле (28),

$$C \simeq \frac{\bar{R}}{4\pi p\gamma}\left[1-p\gamma\cdot\left(\ln\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}, \tag{33}$$

где $\gamma = d/\pi\bar{R}$ и $p = \bar{R}/(2\bar{H}+\bar{R})$ ($\bar{R} = (R_1+R_2)/2$ — средний радиус конденсатора, $\bar{H} = (H_1+H_2)/2$ — его средняя высота).

Если дно рассматриваемого конденсатора не плоское, а полусферическое, то $p = \bar{R}/2\bar{H}$.

г) Плоский конденсатор с эллиптическими пластинами. Полуоси эллипса равны a и b, эксцентриситет $\varepsilon^2 = 1 - (b/a)^2$. В данном случае можно было бы, воспользовавшись равенством (29), получить для емкости точную асимптотическую формулу. Однако емкость эллиптического конденсатора в приближении Хоу неизвестна, поэтому прибегнем к качественным оценкам и положим $\Delta = 2S/L - \pi b/2E(\varepsilon)$ ($E(\varepsilon)$ — полный эллиптический интеграл второго рода). В результате получим

$$C \simeq C_0\cdot\left[1+\gamma\cdot\left(\ln\frac{16}{\gamma}-1\right)\right], \tag{34}$$

где $C_0 = ab/4d$ и $\gamma = (2d/\pi^2 b)\cdot E(\varepsilon)$.

Заключение

Развитый в работе метод вычисления емкости применим для любых электростатических систем с эквидистантными электродами. Полученные с его помощью расчетные формулы не претендуют на высокую точность вычисления емкости, они, скорее, нужны для быстрого учета краевых эффектов. Несмотря на то что все приведенные выше результаты формально справедливы в пределе $\alpha \to 0$, из-за логарифмической зависимости краевой поправки от геометрических параметров область их применимости может быть расширена вплоть до $\alpha \lesssim 1$. При $\alpha \simeq 1$ вклад краевых поправок достигает половины емкости $\tilde{C}$, в то время как погрешность асимптотических формул не превышает 10%. Приемлемая точность расчетных формул сочетается с относительной простотой их вывода. Сравнивая приближенные формулы с численными данными для емкости, можно в принципе подобрать значение константы χ, обеспечивающее значительно более высокую точность во всем интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Последнее выходит за рамки настоящей работы.

Автор глубоко признателен С.Г.Каршенбойму и М.И.Эйдесу за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Шелюто В.А.* //ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 2. С. 1–5.
[2] *Шелюто В.А.* //ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 178–180.
[3] *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
[4] *Минков И.М.* // ЖТФ. 1960. Т. 30. Вып. 11. С. 355–361.
[5] *Shelyuto V.A.* // Zeitschrift für Ang. Math. und Phys. (ZAMP). 1989. Vol. 40. N 4. P. 608–612.
[6] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[8] *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 334 с.
[9] *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 6. С. 1327–1328.
[10] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1960. Т. 2. 886 с.
[11] *Сойбельман Я.С.* / /Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25. № 6. С. 167–181.
[12] *Семахин А.Н., Шнеерсон Г.А.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 10. С. 5–12.

Всероссийский научно-исследовательский
институт метрологии им.Д.И.Менделеева
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
10 октября 1991 г.
В окончательной редакции
15 апреля 1992 г.