

01;03

©1992 г.

## МЕХАНИЗМ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

*А.И.Григорьев, О.А.Григорьев, С.О.Ширяева*

На основе аналитического и численного анализа дисперсионного уравнения для капиллярных волн на плоской заряженной поверхности электропроводной вязкой жидкости исследуется влияние вязкости и поверхностной плотности заряда на особенности реализации в такой системе неустойчивости Тонкса-Френкеля. В пределах ситуаций мало- и сильновязкой жидкости получены аналитические асимптотические выражения для инкрементов нарастания неустойчивости и декрементов затухания капиллярных волн. Предложен качественный механизм развития неустойчивости Тонкса-Френкеля на нелинейной стадии.

1. С явлением неустойчивости заряженной поверхности жидкости (НЗПЖ) приходится сталкиваться в связи с проблемой эрозии электродов сильноточных дуг, в жидкометаллических источниках ионов и устройствах для масс-спектрометрии термически нестабильных и нелетучих жидкостей, при исследовании грозового электричества, при разработке методов электростатического монодиспергирования жидкостей [1-3]. Но, несмотря на очевидную важность детального понимания физического механизма развития НЗПЖ и значительное количество экспериментальных исследований, ясности в этом вопросе нет из-за существенной нелинейности реализующихся физических процессов, затрудняющей гносеологический анализ явления.

Основные теоретические результаты по изучению НЗПЖ были получены Рэлеем [4], Тонксом [5], Френкелем [6] в конце прошлого — начале нашего веков и носили критерильный характер. И тем не менее в работах [4-6] содержалось все необходимое для построения физически строгой качественной картины развития неустойчивости: математический и теоретический аппарат для анализа явления в [4,6] и схематическая качественная модель развития неустойчивости на нелинейной стадии в [5]. К сожалению, в [4,6] авторы ограничились лишь выводом критериев неустойчивости для плоской поверхности жидкости в [6], для сферической капли в [4] и не уделили внимания физическим механизмам ее реализации.

Как было показано в [4,6], НЗПЖ связана с неустойчивостью капиллярных волн, всегда существующих в жидкости уже в силу теплового

движения молекул, и проявляется в том, что амплитуда одной из мод капиллярных волн при выполнении некоего критерия, связывающего коэффициент поверхностного натяжения жидкости и поверхностную плотность заряда, начинает экспоненциально увеличиваться со временем. В итоге на поверхности жидкости образуются эмиттирующие выступы (ЭВ), с вершин которых начинается эмиссия мелких сильно заряженных капелек. За пределами рассмотрения работ [4,6] остался анализ закономерностей формирования ЭВ. Качественное же рассмотрение, проведенное в [5], не содержало даже упоминания об основном субъекте явления — капиллярных волнах.

Определенный сдвиг в сторону лучшего понимания закономерностей формирования ЭВ при развитии НЗПЖ связан с работами [7-9], в которых исследовались закономерности развития неустойчивости капиллярных волн в сфероидальных каплях. В [7-9] было показано, что неустойчивость заряженной капли во внешнем электрическом поле, начинающаяся с реализации неустойчивости основной моды, связана с перераспределением поверхностной плотности заряда на удлиняющейся капле, увеличением концентрации заряда на ее вершинах и соответствующим генерированием на вершинах капли неустойчивости более высоких мод. Суперпозиция амплитуд неустойчивых мод и приводит к образованию ЭВ. И тем не менее эта картина весьма схематична и не включает в себя ни анализа закономерностей генерирования неустойчивости высоких мод капиллярных волн при увеличении поверхностной плотности заряда в окрестности зарождающегося ЭВ, ни учета влияния вязкости, роль которой в реализации неустойчивости высоких мод должна быть существенной. Для устранения указанных недостатков исследуем закономерности возбуждения неустойчивости капиллярных волн на плоской поверхности вязкой электропроводной жидкости.

2. Пусть имеется однородно заряженная с поверхностной плотностью заряда  $\nu$  неограниченная плоская поверхность вязкой электропроводной жидкости, заполняющей в поле сил тяжести полупространство  $z < 0$ . Уравнение граничной поверхности в отсутствие возмущений записывается в виде  $z = 0$ . Пусть  $\sigma$  и  $\nu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости, а  $\rho$  — ее удельная плотность. Зададимся целью получить дисперсионное уравнение для капиллярно-гравитационных волн в такой системе. В [10] приводится подробный вывод дисперсионного уравнения для капиллярных волн в подобной системе в отсутствие поверхностного заряда. Повторяя те же рассуждения, что и в [10], добавив лишь в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений слагаемое, учитывающее давление электрического поля, согласно [6], несложно получить искомое соотношение

$$\alpha^2 + 2\nu k^2 \alpha + 4\nu^2 k^4 \left( 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2} + 1} \right) + \omega_0^2 = 0, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k \kappa^2), \quad (2)$$

здесь  $\alpha$  — комплексный показатель во временной зависимости амплитуд капиллярных волн  $\zeta \sim \exp(\alpha t)$ ,  $k$  — волновое число.

Из (1), (2) отчетливо выделяются три предельные ситуации.

а)  $\nu = 0$  —случай идеальной жидкости, рассмотренный в [6]. При этом из (1) сразу получаем, что  $\alpha = \pm i\omega_0$ , а критическое условие развития неустойчивости определится соотношением  $\omega_0^2 \leq 0$ . Амплитуды капиллярных волн начинают увеличиваться по экспоненциальному закону, когда  $\omega_0^2$  проходит через нуль и становится отрицательным. В этом случае одно из значений  $\alpha$  становится положительным, что и обеспечивает экспоненциальный рост амплитуд.

Анализируя дискриминант квадратного относительно  $k$  трехчлена, стоящего в (2) в скобках, несложно выписать критические условия неустойчивости капиллярных волн на заряженной поверхности жидкости в виде

$$\frac{\kappa^2 a}{\sigma} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

где  $a = (2\sigma/\rho g)^{1/2}$  — капиллярная постоянная жидкости.

Это же соотношение можно переписать иначе, переходя от поверхностной плотности заряда  $\kappa$  к напряженности электрического поля  $E$  у поверхности жидкости:  $E = 4\pi\kappa$ . Тогда получим

$$w \equiv \frac{E^2 a}{\sigma} > 8\sqrt{2\pi}. \quad (3)$$

Полученный результат означает, что заряженная поверхность жидкости становится неустойчивой, когда поверхностная плотность заряда превышает критическое значение  $\kappa = \kappa_*$

$$\kappa > \kappa_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}a}}. \quad (4)$$

Пусть условие (4) выполнено. Естественно задаться вопросом, капиллярные волны какой длины (с каким  $k$ ) будут наиболее неустойчивы при заданном  $\kappa$ . Для ответа на этот вопрос из (2) выразим  $(-i\omega_0)$ , характеризующее инкремент нарастания неустойчивости при выполнении условия (4), найдем производную  $\partial(i\omega)/\partial k$ , приравняем ее нулю и получим квадратное относительно  $k$  алгебраическое уравнение

$$3\sigma k^2 - 8\pi\kappa^2 k + \rho g = 0,$$

решения которого определяют максимальное и минимальное значения инкремента

$$k_{1,2} = \frac{4\pi\kappa^2}{3\sigma} \pm \sqrt{\frac{16\pi^2\kappa^4}{9\sigma^2} - \frac{\rho g}{3\sigma}}. \quad (5)$$

Большой из корней как раз и дает искомое волновое число для капиллярных волн с максимальным инкрементом нарастания неустойчивости. Для наглядности обезразмерим  $k$  на капиллярную постоянную, тогда (5) можно переписать в виде

$$ak_{1,2} = \frac{w}{12\pi} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{96\pi^2}{w^2}} \right). \quad (5a)$$

Отсюда уже несложно видеть, что на пределе устойчивости (определяемом (3)) наиболее неустойчивы волны с  $k \simeq 1.5a$ . При удалении от предела устойчивости в закритическую область волновое число наиболее неустойчивой моды увеличивается примерно пропорционально  $w$ .

Из (2) и (5) несложно найти, что инкремент наиболее неустойчивой моды увеличивается с увеличением поверхностной плотности заряда примерно пропорционально ее третьей степени. Чтобы убедиться в этом, безразмерим соотношение (2), выделим выражение для квадрата инкремента

$$\alpha^2 \frac{\rho}{\sigma a^3} \equiv \frac{\omega_0^2}{\sigma a^3} \rho = -ka \left( 2 + k^2 a^2 - \frac{ka}{4\pi} w \right)$$

и подставим сюда  $k$  из (5а). В итоге получим, что инкремент наиболее неустойчивой моды пропорционален  $w^{3/2}$  или  $\sim \kappa^3$ , тогда как, согласно (5а), волновое число наиболее неустойчивой моды пропорционально  $\kappa^2$ .

б)  $\gamma \equiv 2\nu k^2/\alpha \ll 1$  — случай маловязкой жидкости. Дисперсионное уравнение (1) в линейном по  $\gamma$  приближении при введении обозначений  $\omega = \alpha/\omega_0$ ,  $\eta = 2\nu k^2/\omega_0$  записывается в виде

$$\omega^2 + 2\omega\eta + 1 = 0 \quad (6)$$

или в размерной форме

$$\alpha^2 + 2\alpha(2\nu k^2) + \omega_0^2 = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$\alpha_{1,2} = -2\nu k^2 \pm i\sqrt{\omega_0^2 - 4\nu^2 k^4}. \quad (7)$$

Вещественная часть  $\alpha_j$  определяет декремент затухания капиллярных волн, а мнимая — частоты периодического движения. Несложно видеть, что при переходе  $\omega_0^2$  через нуль, т.е. при отрицательных значениях  $\omega_0^2$ , больший из корней становится положительным и амплитуды капиллярных волн начинают экспоненциально нарастать со временем. Т.е. получается, что в приближении малой вязкости критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости совпадают с таковыми для случая идеальной жидкости, рассмотренными в предыдущем разделе. Отличие от ситуации с волнами в идеальной жидкости лишь в том, что частоты капиллярного волнового движения, согласно (7), зависят от вязкости. От нее же зависит и инкремент нарастания неустойчивости. Так, при  $|\omega_0| \gg 2\nu k$  из (7) легко получить

$$\alpha_1 = \omega_0 - 2\nu k^2 \left( 1 - \frac{\nu k^2}{\omega_0} \right).$$

в)  $\gamma \equiv 2\nu k^2/\alpha \gg 1$  — случай сильно вязкой жидкости. В этой ситуации дисперсионное уравнение (1) в линейном по  $\eta^{-1}$  (по  $\gamma^{-1}$ ) приближении принимает вид

$$\omega^2 + \frac{16}{9}\eta\omega + \frac{8}{9}\omega_0^2 = 0 \quad (8)$$

или в размерной форме

$$\alpha^2 + \frac{16}{9}\nu k^2 \alpha + \frac{8}{9}\omega_0^2 = 0$$

и имеет решения

$$\alpha_1 = -\frac{\omega_0^2}{2\nu k^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{16}{9}\nu k^2, \quad (9)$$

соответствующие экспоненциальному затуханию капиллярных волн со временем. Несложно однако видеть, что  $\omega_0^2$  при виртуальном увеличении поверхностной плотности заряда может стать отрицательным. В этом случае  $\alpha_1$  станет положительным и амплитуда соответствующих ему движений жидкости начнет экспоненциально нарастать со временем. Т.е. критическим условием реализации неустойчивости сильно вязкой жидкости остается по прежнему  $\omega_0^2 \leq 0$ . Наиболее существенным отличием данной ситуации от рассмотренных случаев а, б является сильная зависимость инкремента нарастания неустойчивости от вязкости и волнового числа. Из (9) видно, что инкремент нарастания неустойчивости при  $\gamma \gg 1$  (при больших значениях  $\nu k^2$ ) будет мал даже при сильно закритических плотностях заряда. Это подтверждается экспериментами по исследованию неустойчивости сильно заряженных вязких жидкостей, описанными в [11] (где приведены и интересные фотографии эмиттирующих выступов на нелинейной стадии развития).

3. Проведем теперь анализ решений дисперсионного уравнения (1) при произвольных значениях  $\nu k^2$ . Для этого обезразмерим все члены соотношения (1), разделив их на  $\omega_0^2$ , после чего получим

$$(\omega + \eta)^2 + 1 = \eta^2 \sqrt{\frac{2\omega}{\eta} + 1}, \quad (10)$$

где

$$\omega = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \eta = \frac{2\nu k^2}{\omega_0}.$$

На рис. 1. представлены кривыми 1 и 2 соответственно зависимости от параметра  $\eta$ , характеризующего вязкость, вещественной и мнимой частей комплексной частоты при  $\omega_0^2 > 0$ . Вещественная часть частоты  $\text{Re } \omega$  отрицательна и дает декремент затухания капиллярных волн, а мнимая часть  $\text{Im } \omega$  — их частоты. Обращает на себя внимание факт, что при  $\eta \geq \eta_* = 2.6$  периодические волновые движения исчезают, а декремент затухания при  $\eta = \eta_*$  достигает своего максимума (речь идет о меньшем из двух вещественных корней уравнения (1) при  $\eta \geq \eta_*$ ). Большой корень, соответствующий быстрому затуханию движения жидкости [11], опущен из рассмотрения как не представляющий физического интереса. Штриховыми линиями на рис. 1 нанесены те же зависимости, получаемые из асимптотических уравнений (6) при малых  $\eta$  и из (8) при больших  $\eta$ .

Несложно видеть, что при виртуальном переходе  $\omega_0^2$  через нуль в область отрицательных значений (что соответствует переходу к мнимым значениям  $\omega_0$ ) уравнение (9) примет вид

$$(x + y)^2 - 1 = y^2 \sqrt{\frac{2x}{y} + 1}, \quad (10a)$$

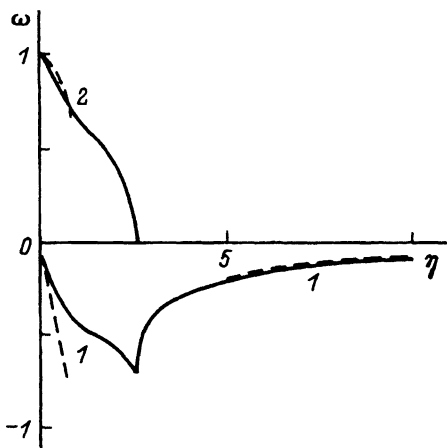


Рис. 1. Зависимость декремента затухания (1) и частоты (2) капиллярных волн на заряженной плоской поверхности жидкости от безразмерного параметра  $\eta$ , характеризующего вязкость.

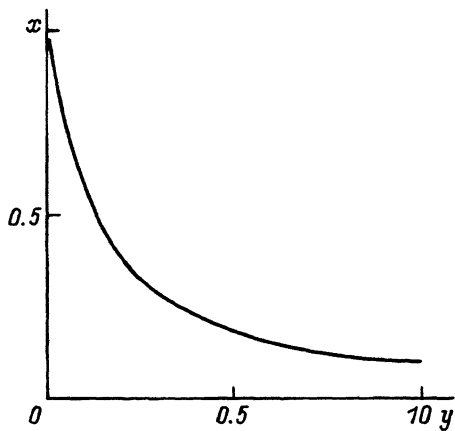


Рис. 2. Зависимость инкремента нарастания неустойчивости капиллярных волн на плоской заряженной поверхности жидкости от параметра  $\eta$ , характеризующего вязкость.

где  $x = \text{Im}(-i\omega)$ ,  $y = \text{Im}(-i\eta)$  в обозначениях (10).

Это уравнение имеет лишь вещественное решение, соответствующее экспоненциальному нарастанию амплитуд капиллярных волн. На рис. 2 представлена зависимость  $x$  от  $y$ , найденная из этого уравнения.

Качественно иную информацию о поведении решения уравнения (1) при переходе  $\omega_0^2$  через нуль можно получить, обезразмеривая (1) не на  $\omega_0^2$ , но на  $\nu^2 k^4$ . В этом случае дисперсионное соотношение (1) принимает вид

$$(\Omega + 1)^2 + \beta = \sqrt{2\Omega + 1}, \quad (11)$$

где

$$\beta = \left( \frac{\omega_0}{2\nu k^2} \right)^2, \quad \Omega = \frac{\alpha}{2\nu k^2}.$$

Из этого уравнения удобно провести анализ поведения частот капиллярных волн на заряженной поверхности жидкости, когда поверхностная плотность заряда близка к критической (в малой окрестности  $\omega_0^2 = 0$ ). На рис. 3 кривыми 1–3 представлены зависимости от  $\beta$  для  $\text{Re } \Omega$  и  $\text{Im } \Omega$ , рассчитанные по (11). Несложно видеть, что при  $-0.3 \leq \beta \leq 0$  существуют два решения (11): вещественное (кривая 1) и комплексное ( $\text{Re } \omega$ ,  $\text{Im } \omega$ ) (кривые 2, 3 соответственно). Обе ветви вещественного решения положительны и соответствуют экспоненциальному нарастанию амплитуд неустойчивых волн. Причем в указанном диапазоне значений  $\beta$  большую величину имеет декремент колебательного нарастания амплитуды (кривая 2) и именно он должен реализовываться в эксперименте. При  $\beta < -0.3$  амплитуды неустойчивых мод растут аperiодически по экспоненциальному закону.

В проводимом рассмотрении предметом исследования является влияние вязкости и поверхностной плотности заряда на условия реализации неустойчивости капиллярных волн. Чтобы разделить влияние этих

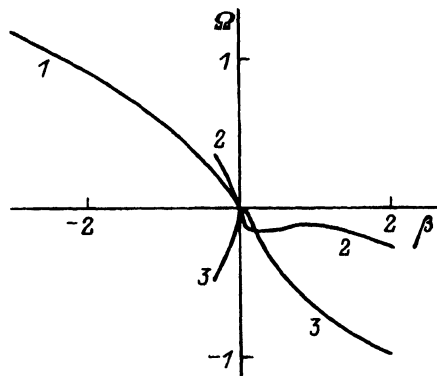


Рис. 3. Зависимость инкремента нарастания неустойчивости (кривая 1 и часть кривой 2 при  $\beta < 0$ ), декремента затухания (2 при  $\beta > 0$ ) и частоты капиллярных волн (3) от параметра  $\beta$ , характеризующего поверхностную плотность заряда.

факторов на частоты капиллярных волн разделим  $\omega_0^2$  на две компоненты, выделяя слагаемое с давлением электрического поля,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2) - \frac{1}{\rho} 4\pi \kappa^2 k^2 \equiv \omega_*^2 - \omega_+^2.$$

Подставим это выражение в (1) и обезразмерим все на  $\omega_*^2 \equiv (k/\rho)(g\rho + \sigma k^2)$ . Получим

$$z^2 + 2\mu z + \mu^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2z}{\mu} + 1} \right) + 1 - \delta = 0,$$

$$z = \frac{\alpha}{\omega_*}, \quad \mu = \frac{2\nu k^2}{\omega_*}, \quad \delta = \left( \frac{\omega_+}{\omega_*} \right)^2. \quad (12)$$

На рис. 4 представлена зависимость инкремента нарастания неустойчивости капиллярных волн, описываемых уравнением (12) при  $\delta \geq 1$  (при  $\omega_+^2 \geq \omega_*^2$  или, что то же самое, при  $\omega_0^2 \leq 1$ ) от величины параметра  $\mu$ , характеризующего вязкость, и параметра  $(1 - \delta)$ , характеризующего степень закритичности поверхностной плотности заряда. Несложно видеть, что инкремент неустойчивости капиллярных волн на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости растет с увеличением  $(1 - \delta)$  и быстро уменьшается с увеличением  $\mu$ . Следует указать, что все кривые, приведенные на рис. 1-4, рассчитывались для положительных значений радикала в уравнениях (10)-(12), так как интересующие нас величины инкрементов нарастания неустойчивости в этом случае превышают таковые для отрицательных значений того же радикала. Для устойчивых волн декременты затухания при отрицательных значениях радикала имеют большие значения, чем при положительных, и потом также опущены из рассмотрения как не представляющие физического интереса.

4. Для удобства анализа механизма развития неустойчивости сформируем немного отличную задачу — о неустойчивости капиллярных волн на неоднородно заряженной поверхности жидкости. Пусть в отличие от задачи, сформулированной в разделе 2, поверхностная плотность заряда

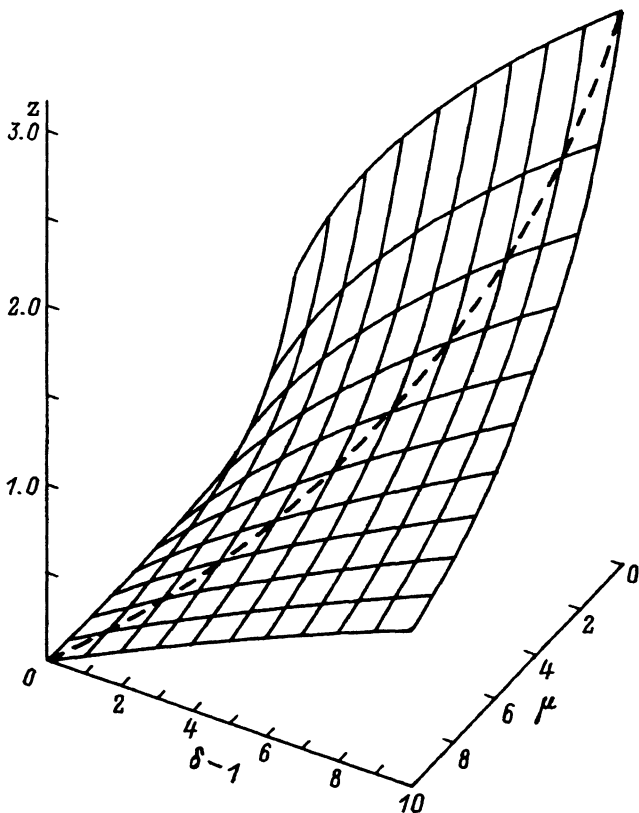


Рис. 4. Зависимость инкремента нарастания неустойчивости капиллярных волн на заряженной плоской поверхности жидкости от степени закритичности поверхностной плотности заряда  $(\delta - 1)$  и безразмерной вязкости жидкости  $\mu$ .  
Вдоль штриховой линии реализуется неустойчивость Тонкса-Френкеля, выражающаяся в формировании на поверхности жидкости заостренных выступов, с вершин которых происходит сброс заряда.

является функцией координаты  $\kappa = \kappa(x)$ . Примем, что скорость изменения поверхностной плотности заряда вдоль  $x$  настолько мала, что на характерной длине капиллярной постоянной жидкости ее можно считать константой, т.е.

$$\frac{a}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \ll 1.$$

При выполнении этого условия с точностью, реализующейся в гидродинамическом приближении волн бесконечно малой амплитуды, можно считать, что линии напряженности электрического поля нормальны к невозмущенной поверхности жидкости  $z = 0$  [10], тогда дисперсионное соотношение рассматриваемой задачи в нулевом приближении по отношению амплитуды капиллярной волны к ее длине совпадает с (1), (2), только под  $\kappa$  в этих соотношениях следует понимать  $\kappa = \kappa(x)$ . Имея в виду, что вдоль координаты  $x$  поверхность безгранична (в соответствии со сказанным в разделе 2), получим, что на участках поверхности с существенно



различными значениями координаты  $x$  (и, следовательно, с различными значениями поверхностной плотности заряда) будут испытывать неустойчивость капиллярные волны с различными значениями волнового числа (см. соотношения (4)–(5)). При этом чем больше плотность заряда на данном участке поверхности, тем более короткие волны будут на нем претерпевать неустойчивость. Но в эту тенденцию следует внести коррективы, связанные с демпфирующим влиянием вязкости.

Из рис. 4 видно, что при фиксированной вязкости с увеличением волнового числа (с увеличением параметра  $\sim \nu k^2$ ) величина инкремента нарастания неустойчивости снижается при любых значениях степени закритичности поверхностного заряда. Иными словами, на рис. 4 отчетливо выделены две тенденции изменения инкремента: его рост с увеличением степени закритичности ( $\delta - 1$ ) и снижение с увеличением волнового числа неустойчивой моды (с увеличением  $\mu$ ). И если в рамках обсуждаемой модели бесконечной неравномерно заряженной плоской поверхности жидкости задаться вопросом о волновом числе моды, инкремент нарастания которой будет максимален для всей поверхности, то при ответе на него необходимо принимать во внимание обе эти тенденции. Штриховая линия, определяющая максимальное значение инкремента в условиях изменения  $\beta$  и ( $\delta - 1$ ), приведена на рис. 4.

5. Но вернемся к однородно заряженной плоской поверхности и сформулируем качественную модель развития неустойчивости капиллярных волн. Пусть условие (3) выполнено и плоская капиллярная волна с волновым числом, определяемым соотношением (5), начинает увеличивать свою амплитуду экспоненциально во времени. В соответствии с разделом 2 это означает, что на невозмущенной поверхности жидкости  $z = 0$  появляется цилиндрический выступ с характерным конечным размером  $l_0 \sim 2\pi/k_0$ . Экспоненциальный рост амплитуды этого выступа в рамках проводимого рассмотрения гарантирован, пока его амплитуда по крайней мере на порядок меньше длины волны. Согласно этому, примем, что амплитуда появившегося выступа

$$b \lesssim 0.1 \frac{2\pi}{k_0}.$$

Пусть характерное время перераспределения заряда по поверхности жидкости много меньше обратной величины инкремента нарастания неустойчивости. Тогда по мере роста амплитуды образующегося выступа плотность заряда на его поверхности будет расти. А это означает, согласно разделам 2–4, что уже на самом цилиндрическом выступе станет, согласно (5), неустойчивой капиллярная волна с большим значением  $k : k_* > k_0$  (с меньшей длиной волны). Причем инкремент нарастания неустойчивости этой более короткой волны при  $\nu k^2 < \omega_0$  (согласно разделу 2б) будет больше, чем у исходной. Связано это с тем, что инкремент неустойчивости растет с увеличением поверхностной плотности заряда  $\sim \kappa^3$ , тогда как декремент затухания при  $(2\nu k^2)/\alpha \ll 1$  увеличивается с увеличением  $k$  слабо.

В итоге на вершине цилиндрического выступа с поперечным размером  $\sim l_0$  и высотой  $\sim 0.1l_0$  вырастет еще один выступ с поперечным линейным размером  $l_* \sim 2\pi/k_*$  и высотой  $\sim 0.1l_*$ . При этом поле у вершины выступа еще более усилится и будет генерирована, согласно вышесказанному, неустойчивость еще более короткой волны. Этот процесс будет

повторяться до тех пор, пока параметр  $\nu k^2/\alpha$  не достигнет за счет увеличения  $k^2$  некоего предельного значения, при котором демпфирующее влияние вязкости не компенсирует прирост величины инкремента за счет увеличения поверхностной плотности заряда. На этой стадии развития неустойчивости с вершины растущего выступа могут начать срываться сильно заряженные капли [1,3,12]. Дальнейшая судьба оторвавшихся сильно заряженных капель будет реализовываться в соответствии с одним из сценариев, обсужденных в [13,14].

### Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О. // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
- [2] Григорьев А.И. // ЭОМ. 1990. № 6. С. 23–32.
- [3] Дудников В.Г., Шабалин А.Л. Препринт ИЯЖ. № 87-63. Новосибирск, 1987. 66 с.
- [4] Lord Rayleigh // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [5] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [6] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [7] Григорьев А.И. ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [8] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [10] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [11] Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [12] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [13] Григорьев А.И., Григорьев О.А. // ЭОМ. 1991. № 3. С. 41–44.
- [14] Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию  
26 сентября 1991 г.