КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

01 Журнал технической физики, т. 62, в. 8, 1992

О ВЫБОРЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕД

В.М.Воробьев

1. Известно [1,2], что одним из основных моментов применения гамильтоновского формализма для описания волновых движений в нелинейных средах является определение нормальных переменных $a^s_{\mathbf{k}}$ ($s = 1, 2, \ldots, 2N, N$ — количество собственных мод системы, $\mathbf{k}$ — волновой вектор), в которых диагонализуется квадратичный гамильтониан, а динамические уравнения принимают стандартный вид.

Для равновесных систем эта процедура была развита В.Е.Захаровым и в настоящее время общепринята [1]. Иная ситуация имеет место для неустойчивых консервативных систем. Здесь выбор нормальных переменных достаточно нетривиален. Например, в работах [3,4] в качестве последних выбраны нормированные амплитуды собственных мод среды, что позволяет получить динамические уравнения в виде, формально аналогичном стандартному, однако имеющие комплексные коэффициенты взаимодействия. Это усложняет исследование нелинейной динамики рассматриваемых систем и, в частности, не позволяет применять уже разработанную каноническую технику [5]. Другой подход используется при описании параметрически неустойчивых сред, когда внешнее воздействие на систему не включается в квадратичный гамильтониан, поэтому он диагонализуется нормальными переменными системы в отсутствие воздействия. Этот путь оказался плодотворным и позволил создать так называемую S-теорию (см., например, [6]), позволяющую эффективно исследовать нелинейную эволюцию системы.

В данной работе показано, что этот способ выбора нормальных переменных можно распространить на такие неустойчивые консервативные системы, которые формально не являются параметрическими, например потоковые системы, параметры которых зависят от пространственных координат, времени и т.д. В качестве конкретного примера рассмотрена двухпотоковая гидродинамическая система, в которой [7] при определенных условиях возможно развитие неустойчивости.

2. Предположим, что в системе, состоящей из двух сред гидродинамического типа, одна из них, например первая, движется через другую с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0)$. Ограничиваясь потенциальными возмущениями, ее гамильтониан можно записать следующим образом [4]:

$$H = \sum_{l=1}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \left[n_l u_{0l} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{2} n_{0l} (\nabla \Phi_l)^2 + \frac{1}{2} n_l (\nabla \Phi_l)^2 + E \right], \qquad (1)$$

где n_l, Φ_l — соответственно возмущения плотности и потенциала скорости, являющиеся каноническими переменными ($\mathbf{v}_l = \nabla \Phi_l$); n_{0l}, $v_{0l} = v_0 \delta_{l,1}$ — их равновесные значения; E — внутренняя энергия системы, которая определяется уравнениями состояния сред и в достаточно общем виде представима в виде бесконечного ряда по степеням фурье-компонент плотностей сред $N_l(\mathbf{k}, t)$ [5].

Перейдем к нормальным переменным $a^s_{\mathbf{k}}$ ($s = 1, \ldots, 4$), таким что квадратичная часть гамильтониана (1) принимает вид

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{s'=1}^{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}' \left[\omega^{s'}_{\mathbf{k}'} a^{s'}_{\mathbf{k}'} a^{s'*}_{\mathbf{k}'} + v_0 \sum_{s''=1}^{4} h^{s'}_{s''}(\mathbf{k}') a^{s'}_{\mathbf{k}'} + \text{к.с.} \right], \qquad (2)$$

где $\omega^s_{\mathbf{k}}$ — частоты собственных мод системы; $h^s_{s'}(\mathbf{k})$ — коэффициенты, возникшие из-за наличия потоковых слагаемых, которые определяют параметрическое взаимодействие мод; v_0 — играет роль постоянной накачки.

Уравнения для нормальных переменных можно получить стандартным способом (см., например, [1,5]), варьированием гамильтониана

$$\dot{a}^s_{\mathbf{k}} = -i\omega^s_{\mathbf{k}} a^s_{\mathbf{k}} - i v_0 \sum_{s'=1}^{4} h^s_{s'}(\mathbf{k}) a^{ss'}_{\mathbf{k}} - i \sum_{s',s''=1}^{4} \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' V^s_{s',s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \times$$

$$\times a^{s'}_{\mathbf{k}'} \ldots a^{s''}_{\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') - i \sum_{s',s'',s'''=1}^{4} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}''' W^s_{s',s'',s'''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \times$$

$$\times a^{s'}_{\mathbf{k}'} a^{s''}_{\mathbf{k}''} a^{s'''}_{\mathbf{k}'''} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}'''),$$

где $V^s_{s',s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$, $W^s_{s',s'',s'''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''')$ — матричные элементы, описывающие нелинейные (трех- и четырехволновые) взаимодействия мод.

Они являются вещественными, удовлетворяют всем свойствам симметрии [5] и определяются характеристиками сред в отсутствие движения.

3. Пренебрежем в уравнении (3) нелинейными слагаемыми. Тогда для вещественных амплитуд и фаз ($a^s_{\mathbf{k}} = u^s_{\mathbf{k}} \exp(i\varphi^s_{\mathbf{k}})$) имеет место следующая система уравнений ($s, s' = 1, \ldots, 4$):

$$\dot{\Psi}^s_{s'}(\mathbf{k}, t) = \omega^s_{\mathbf{k}} - \omega^{s'}_{\mathbf{k}} + v_0 \sum_{s_1=1}^{4} u^{s_1}_{\mathbf{k}} \left[\frac{h^s_{s_1}(\mathbf{k})}{u^s_{\mathbf{k}}} \cos \Psi^s_{s_1}(\mathbf{k}, t) - \frac{h^{s'}_{s_1}(\mathbf{k})}{u^{s'}_{\mathbf{k}}} \cos \Psi^{s'}_{s_1}(\mathbf{k}, t) \right], \qquad (4)$$

$$\dot{u}^s_{\mathbf{k}} = u_0 \sum_{s_1=1}^{4} h^s_{s_1}(\mathbf{k}) u^{s_1}_{\mathbf{k}} \sin \Psi^s_{s_1}(\mathbf{k}, t), \quad \Psi^s_{s_1}(\mathbf{k}, t) = \varphi^s_{\mathbf{k}} - \varphi^{s'}_{\mathbf{k}}. \qquad (5)$$

Легко видеть, что в линейном приближении динамика рассматриваемой системы полностью определяется фазой $\Psi^{s}_{s'}(\mathbf{k},t)$, что позволяет существенно упростить уравнение (3) при описании нелинейной стадии неустойчивости и построить аналог S-теории для многомодовых систем. В самом деле, вследствие того, что необходимым условием развития неустойчивости является установление для фазы $\Psi^{s}_{s'}$ стационарного значения, определяемого уравнением $\dot{\Psi}^{s}_{s'}(\mathbf{k},t) = 0$, наибольший вклад в нелинейные взаимодействия будут выносить слагаемые, содержащие фазы $\Psi^{s}_{s'}(\mathbf{k},t)$ и являющиеся в этом смысле "резонансными". Следовательно, вместо (3) можно записать систему уравнений

$$\dot{a}^{s}_{\mathbf{k}} = -i\omega^{s}_{\mathbf{k}}a^{s}_{\mathbf{k}} - i\sum_{s_1=1}^{4} a^{s_1}_{\mathbf{k}}\left[v_0 h^{s}_{s_1}(\mathbf{k}) + \sum_{s_2=1}^{4} P^{s}_{s_1,s_2}(\mathbf{k})a^{s}_{0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s_2,s_3=1}^{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa \tilde{H}^{s}_{s_1,s_2,s_4}(\mathbf{k},\varkappa)a^{s_2}_{\varkappa}a^{s_3*}_{\varkappa}\right], \tag{6}$$

$$\dot{a}^{s}_{0} = -i\omega^{s}_{0}a^{s}_{0} - i\sum_{s_2,s_3=1}^{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa T^{s}_{s_2,s_4}(\mathbf{k})a^{s_2}_{\varkappa}a^{s_3*}_{\varkappa},$$

где

$$P^{s}_{s_1,s_2}(\mathbf{k}) = V^{s}_{s_1,s_2}(\mathbf{k},\mathbf{k},0) + V^{s}_{s_2,s_1}(\mathbf{k},0,\mathbf{k}), \quad T^{s}_{s_1,s_2}(\varkappa) = V^{s}_{s_1,s_2}(0,\varkappa,-\varkappa),$$

$$H^{s}_{s_1,s_2,s_4}(\mathbf{k},\varkappa) = W^{s}_{s_1,s_2,s_4}(\mathbf{k},\mathbf{k},\varkappa,-\varkappa) + W^{s}_{s_2,s_1,s_4}(\mathbf{k},\varkappa,\mathbf{k},-\varkappa) +$$
$$+ W^{s}_{s_2,s_4,s_1}(\mathbf{k},\varkappa,-\varkappa,\mathbf{k}),$$

целочисленный параметр s_4 равен $s_4 = 4 - s_3$ для первой моды, $s_4 = 7 - s_3$ для второй моды системы.

Следует отметить, что данная система уравнений является замкнутой. Действие нелинейных слагаемых заключается в создании "расстройки" для образовавшегося на линейной стадии неустойчивости синхронизма между накачкой и нарастающими модами. Это достигается посредством генерации "нулевой" гармоники a^{s}_{0}, что, как видно из (6), (7), имеет место как при трехволновых (второе слагаемое), так и при черырехволновых взаимодестиях (третье слагаемое в квадратных скобках уравнения (6)).

Таким образом, выделенные нелинейные механизмы, названные авторами обзора [6] "фазовыми", играют основную роль в ограничении неустойчивости для названных выше неравновесных систем. Количественные оценки динамики последних можно получить, используя для исследования уравнений (6), (7) метод "стационарной" фазы, предложенный в работе [8].

Список литературы

[1] *Захаров В.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. Т. 13. С. 431–472.

[2] *Павленко Ю.Г.*// Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М., 1985. 336 с.

[3] *Игнатов А.М.* // ФЭТФ. 1984. Т. 87. Вып. 3. С. 1652–1656.

[4] *Воробьев В.М.* // Изв. вузов. Физика. 1990. Т. 33. № 12. С.72–79.
[5] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Препринт Института автоматики и электрометрии СО АН СССР. Новосибирск, 1982. № 186. 50 с.
[6] *Захаров В.Е., Львов В.С., Сторобинец С.С.* // УФН. 1974. Т. 114. № 4. С. 609–654.
[7] *Бетчов Р., Криминале В.* // Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 262 с.
[8] *Воробьев В.М., Куклин В.М.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т 13. Вып. 22. С. 1354–1358.

Запорожский университет

Поступило в Редакцию
11 июня 1991 г.

---

12 *Журнал технической физики, т. 62, в. 8, 1992*

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ

В.И.Туринов

Введение

Теплофизические характеристики материалов определяют обычно путем измерения фазы для амплитуды тепловой волны, проходящей через образец либо распространяющейся по его поверхности по его поверхности [1–4]. В этих [3,4] и подобных им методах существенная доля мощности теплового излучения рассеивается в пространстве либо в образцах, что в конечном счете требует нагрева их до высокой температуры. Кроме того, для определения теплофизических характеристик зачастую необходимы данные о геометрических параметрах образцов и оптических характеристиках излучающей поверхности. При этом измерение последних для реальных образцов является, как правило, сложной технической задачей со сравнением измерений на эталонных образцах.

Рассмотрим метод измерения коэффициента температуропроводности a, который обладает повышенной пространственной разрешающей способностью и температурной чувствительностью к обнаружению тепловых неоднородностей образцов по сравнению с известными и дает возможность понизить тепловые нагрузки на образцы.

Теоретические соотношения

Пусть на поверхность образца подается короткий импульс излучения с энергией Q, распределенной в сечении луча по закону Гаусса с характерным размером ρ_0. Под действием мгновенного источника тепла $Q = Q_0 \exp(-\rho^2/2\rho_0^2)$, где Q_0 — плотность энергии (Дж/см^2), температура в локальной области при $\tau > 0$ изменяется в функции времени τ и координаты ρ (полярная координата в плоскости образца) также по закону Гаусса с переменным характерным размером $(2a\tau + \rho_0^2)^{1/2}$, которая находится методом функций Грина для мгновенного источника тепла [5].