

01;10
©1992

РАДИАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

А.Н.Лебедев, А.В.Серов

Получено уравнение, описывающее потенциал силового поля, возникающего при движении заряженного сгустка произвольной формы в пространственно-периодическом магнитном поле, включая радиационные эффекты. Исследовано распределение по сгустку усредненных сил реакции когерентного излучения и потерь энергии на единицу длины.

Введение

Описание “торможения излучением” электрона, движущегося в магнитном поле, является, как известно, не вполне удовлетворительным и содержит внутренние противоречия. Только в сильно релятивистском случае, когда излучение резко направлено, а длина формирования гораздо меньше радиуса кривизны траектории, физическая интерпретация силы самодействия как импульса отдачи, ушедшего вперед излучения, проста и наглядна. Однако это относится лишь к системам, характерные размеры которых гораздо меньше длины волны излучения.

Вопрос приобретает новую окраску в системах с когерентным излучением, например в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ). Сам механизм индуцированного излучения в классическом описании сводится к самофазировке электронов пучка под действием коллективного поля излучения. Это автоматически означает, что когерентно излучающей системой является сгусток или последовательность сфазированных сгустков, каждый из которых имеет размер, по крайней мере продольный, сравнимый с длиной волны. В этом случае потери энергии и импульс отдачи будут сложным образом распределены по сгустку и нет физических оснований пользоваться уравнениями движения отдельных электронов с силой самодействия или прибегать к “индивидуальным” законам сохранения. Кроме того, в когерентно излучающем сгустке, содержащем N частиц, отношение “классического радиуса”, равного $(Ne)^2/c^2(Nm) = Nr_0$, к длине излучаемой волны λ увеличивается в N раз и может реально достигать больших значений. Как правило, это означает, что собственные поля пучка оказывают определяющее влияние на его динамику, т.е. необходим самосогласованный подход к определению движения частиц

с учетом реакции излучения и генерируемого ими электромагнитного поля. Важность учета реакции индуцированного излучения совершенно очевидна как для понимания процесса самофазировки, так и в таких до сих пор открытых вопросах, как флуктуационные явления, оказавшиеся столь существенными в синхротронах.¹

В данной работе в приближении заданного движения сгустка исследовано распределение по "нежесткому" сгустку сил реакции когерентного ондуляторного излучения на произвольных расстояниях, включая, естественно, и ближнюю зону.

Уравнение для усредненных сил

В ондуляторе характерная длина формирования излучения совпадает с периодом ондулятора, на котором радиус кривизны траектории меняется существенно. Фактически это означает, что элементы сгустка всегда испытывают относительные перемещения и в отличие от случая точечной частицы не существует такой сопутствующей системы отсчета, в которой распределение заряда и тока стационарно. В большинстве практически интересных случаев скорости относительного перемещения частиц в сгустке являются нерелятивистскими. Это означает малость амплитуды поперечной скорости β_{\perp} по сравнению с γ^{-1} , где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — полная энергия частицы.

Обозначив через \mathbf{r}_{\sim} переменную часть поперечного смещения частицы относительно выбранной оси z (с ортом \mathbf{n}), заметим, что продольная составляющая скорости будет равна

$$\beta = \beta \cdot (1 + r_{\sim}'^2)^{-1/2}, \quad (1)$$

где штрих означает производную по z .

В этой ситуации вместо времени естественно ввести переменную

$$\sigma = \beta \int \beta_z^{-1} dz - \beta t = \int (1 + \mathbf{r}_{\sim}'^2)^{1/2} dz - \beta t, \quad (2)$$

имеющую физический смысл расстояния вдоль траектории, отсчитанного от частицы, проходящей точку $z = 0$ в момент времени $t = 0$. Отметим, что при постоянной энергии величина σ является одночастичным интегралом движения. Вектор скорости частицы может быть представлен в виде

$$\beta = \beta_z(\mathbf{n} + \mathbf{r}_{\sim}') \simeq \beta(\mathbf{n}(1 - r_{\sim}'^2/2) + \mathbf{r}_{\sim}'), \quad (3)$$

где приближенная часть равенства справедлива с точностью до членов порядка $r_{\sim}'^2$ включительно.

Проведенный ниже расчет основан на разложении всех искомых величин по степеням r_{\sim} и поиске в первом исчезающем порядке усредненных сил радиационного взаимодействия. Поскольку частица находится на непостоянном радиусе $\mathbf{r} + \mathbf{r}_{\sim}(z)$, то действующее на нее поле (например,

¹ Заметим, что традиционный самосогласованный подход, развитый в применении к ЛСЭ, например, в [1] не снимает проблему, так как базируется на уравнении Власова, построенном для канонических систем, не включающих реакцию излучения.

электрическое) можно с точностью до квадратичных членов представить в виде

$$(1 + \mathbf{r}_{\sim} \nabla + (\mathbf{r}_{\sim} \nabla)^2 / 2 + \dots)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots), \quad (4)$$

где ∇ — оператор поперечного по отношению оси z градиента, а нижний индекс означает порядок разложения по \mathbf{r}_{\sim} .

Дальнейшие вычисления резко упрощаются, если интересоваться лишь силами, усредненными вдоль траектории по многим периодам осциллирующей величины \mathbf{r}_{\sim} . Учитывая, что при усреднении все величины с индексом 1 обращаются в нуль, а также тот очевидный факт, что поля нулевого порядка не зависят от z (при постоянном σ), поскольку относятся к прямолинейно движущимся сгустку, имеем для соответствующих порядков разложения силы Лоренца

$$\langle \mathbf{f}_0 \rangle = \mathbf{f}_0, \quad \langle \mathbf{f}_1 \rangle = 0, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по z при постоянном σ .

Тогда средняя по траектории сила может быть представлена в виде двух слагаемых

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \mathbf{f}_{\text{ст}} + \mathbf{f}_{\text{рад}}, \quad (6)$$

имеющих разный физический смысл. Первое из них

$$\mathbf{f}_{\text{ст}} = (1 + \langle (\mathbf{r}'_{\sim} \nabla)^2 \rangle / 2) \left\{ \langle \mathbf{E} \rangle + \beta(1 - \langle r'^2_{\sim} \rangle / 2) [\mathbf{n} \langle \mathbf{B} \rangle] \right\} + \beta \langle (\mathbf{r}_{\sim} \nabla) [\mathbf{r}'_{\sim} \mathbf{B}_0] \rangle \quad (7)$$

отражает электро- и магнитостатическое взаимодействие частиц. В выражении (7) сознательно оставлены превышающие точность члены четвертого порядка, чтобы подчеркнуть физический смысл $\mathbf{f}_{\text{ст}}$ как силы Лоренца, действующей на частицу, летящую по прямой со средней скоростью $\beta(1 - \langle r'^2_{\sim} \rangle / 2)$ в полях, усредненных независимо по z и по поперечным перемещениям электрона.

Радиационная часть взаимодействия $\mathbf{f}_{\text{рад}}$ в (6) обусловлена полями первого порядка, усредненными вместе с вектором поперечного смещения частицы,

$$\mathbf{f}_{\text{рад}} = \beta \langle [\mathbf{r}'_{\sim} \mathbf{B}_1] \rangle + \langle (\mathbf{r}_{\sim} \nabla) \{ \mathbf{E}_1 + \beta [\mathbf{n} \mathbf{B}_1] \} \rangle. \quad (8)$$

Чтобы получить уравнение для $\mathbf{f}_{\text{рад}}$, надо сделать более конкретные предположения о характере ондуляторных колебаний. Мы будем в дальнейшем предполагать их гармоническими по z , т.е. подчиняющимися уравнению

$$\mathbf{r}''_{\sim} = k_0^2 \mathbf{r}_{\sim}. \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (9) векторное, так что в рассматриваемый класс пока включаются ондуляторы с произвольной эллиптичностью — от плоских до спиральных, с волновым числом k_0 . Замечая, что комплексный вектор $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{\sim} - (i/k_0) \mathbf{r}'_{\sim}$ периодичен и удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{R}' = i_0 \mathbf{R}, \quad (10)$$

радиационную силу $\mathbf{f}_{\text{рад}}$ можно представить как

$$\mathbf{f}_{\text{рад}} = \text{Re} \mathbf{F} = \text{Re} \langle (\mathbf{R} \nabla) \{ \mathbf{E}_1 + \beta [\mathbf{n} \mathbf{B}_1] \} + ik_0 \beta [\mathbf{R} \mathbf{B}_1] \rangle. \quad (11)$$

Усредняя уравнения Максвелла в координатах (σ, z, r) и учитывая (11), получаем уравнение для комплексной силы \mathbf{F}

$$L\mathbf{F} = 4\pi(\nabla + \mathbf{n}(\partial/\partial\sigma - ik_0))((\mathbf{R}\nabla)(q_1 - \beta\mathbf{n}\mathbf{j}_1) - ik_0\beta(\mathbf{R}\mathbf{j}_1)), \quad (12)$$

где q, j — плотности заряда и тока, $L = \nabla^2 - k_0^2 - 2ik_0\partial/\partial\sigma + \gamma^{-2}\partial^2/\partial\sigma^2$.

По абсолютно аналогичной схеме получается уравнение для усредненных потерь энергии на единицу длины

$$w = \langle \beta(1 + \mathbf{r}_{\sim}\nabla + (\mathbf{r}_{\sim}\nabla)^2/2 + \dots)\mathbf{E} \rangle = \beta\{(1 - \beta\langle \mathbf{r}_{\sim}'^2 \rangle)/2 + 1/2 \cdot \langle (\mathbf{r}_{\sim}\nabla)^2 \rangle\} \mathbf{n} + \langle \mathbf{r}_{\sim}'(\mathbf{r}_{\sim}\nabla) \rangle \langle \mathbf{E} \rangle + \text{Re}W, \quad (13)$$

где

$$W = \beta\mathbf{n}\langle (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{E}_1 \rangle + ik_0\beta\langle \mathbf{R}\mathbf{E}_1 \rangle$$

удовлетворяет уравнению

$$LW = 4\pi\beta(\partial/\partial\sigma)\{ \langle (\mathbf{R}\nabla)(q_1 - \beta(\mathbf{n}\mathbf{j}_1)) \rangle - ik_0\beta\langle \mathbf{R}\mathbf{j}_1 \rangle \}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в (13) соответствует работе кулоновских сил, а $\text{Re}W$ — радиационных. Нетрудно видеть, что уравнения (12) и (24) сводятся к одному скалярному для комплексного потенциала Φ

$$L\Phi = \langle (\mathbf{R}\nabla)(q_1 - \beta\mathbf{n}\mathbf{j}_1) - ik_0\beta\mathbf{R}\mathbf{j}_1 \rangle, \quad (15)$$

причем

$$\mathbf{F} = (\nabla + \mathbf{n}(\partial/\partial\sigma - ik_0))\Phi, \quad (16)$$

$$W = \beta\partial\Phi/\partial\sigma. \quad (17)$$

Заряд и ток сгустка, движущегося через ондулятор

Пользуясь предложением о заданном поле поперечных смещений, зависящих при постоянном σ только от z , нетрудно получить рекуррентные соотношения для зарядов и токов сгустка в разных порядках по \mathbf{r}_{\sim} . Из уравнения непрерывности в нулевом порядке следует, что q_0 может быть произвольной функцией аргументов. В первом порядке имеем

$$\partial q_1/\partial z = -(\mathbf{r}_{\sim}'\nabla)q_0 \quad (18)$$

или

$$q_1 = -(\mathbf{r}_{\sim}\nabla)q_0, \quad (19)$$

если учесть, что при $z \rightarrow \infty$ ондуляторное поле обращается в нуль. После этого легко находится и

$$\mathbf{j}_1 = (q\beta)_1 = q_0\beta\mathbf{r}_{\sim}' - \beta\mathbf{n}(\mathbf{r}_{\sim}\nabla)q_0. \quad (20)$$

Подстановка (19), (20) в (15) приводит к следующему уравнению для "потенциала" Φ :

$$L\Phi = -4\pi(\gamma^{-2}\langle (\mathbf{r}_{\sim}\nabla)^2 \rangle + \beta^2\langle \mathbf{r}_{\sim}'^2 \rangle)q_0. \quad (21)$$

Интересно отметить физическую природу двух слагаемых в первой части. Первое из них связано с поперечной неоднородностью равновесной плотности и представляет собой вклад осциллирующего электрического диполя. Второе обусловлено поперечными токами и в случае спирального ондулятора может быть сопоставлено с синхротронным излучением.

Для плоского ондулятора с синусоидальными колебаниями поперечной скорости вида

$$\beta_x = \beta_0 \sin k_0 z; \quad \beta_y = 0 \quad (22)$$

входящий в (21) оператор равен

$$\gamma^{-2} \langle (\mathbf{r} \sim \nabla)^2 \rangle + \beta^2 \langle \mathbf{r}' \sim \rangle = \beta^2 / 2 (1 + \gamma^{-2} k^{-2} \partial^2 / \partial x^2), \quad (23)$$

а для спирального (с круговой спиралью)

$$\beta_x = \beta_0 \sin k_0 z; \quad \beta_y = \beta_0 \cos k_0 z, \quad (24)$$

$$\gamma^{-2} \langle (\mathbf{r} \sim \nabla)^2 \rangle + \beta^2 \langle \mathbf{r}' \sim \rangle = \beta_0^2 / 2 (2 + \gamma^{-2} k_0^{-2} (\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r)). \quad (25)$$

Для этого последнего варианта и проводятся ниже конкретные расчеты.

Распределение радиационных сил в электронном сгустке

Будем полагать распределение заряда в сгустке аксиально симметричным. При этом удобно перейти к Бессель-трансформантам, например

$$\Phi_\nu(\sigma) = \int_0^\infty r J_0(\nu r) \Phi(r, \sigma) dr, \quad (26)$$

обозначаемым далее индексом ν . Тогда остается решить одно комплексное уравнение в обыкновенных производных

$$[\gamma^{-2} \partial^2 / \partial \sigma^2 - 2ik_0 \partial / \partial \sigma - (\nu^2 + k_0^2)] \Phi_\nu = -2\pi \beta_0^2 (2 - \nu^2 \gamma^{-2} k_0^{-2}) q_\nu. \quad (27)$$

Уравнение (27) из-за наличия комплексного оператора $2ik_0 \partial / \partial \sigma$ имеет осцилляторные свободные решения. Действительно, представляя решение однородного уравнения в виде $e^{iK\sigma}$, для собственных частот K получаем два значения

$$K_\pm = k_0 \gamma^2 \pm \gamma (k_0^2 \gamma^2 \beta^2 - \nu^2)^{1/2}. \quad (28)$$

Для выяснения их физического смысла примем прежде всего, что в области $\nu^2 > k_0^2 \gamma^2 \beta^2$

$$(k_0^2 \gamma^2 \beta^2 - \nu^2)^{1/2} = i(\nu^2 - k_0^2 \gamma^2 \beta^2)^{1/2}, \quad (29)$$

следовательно, $\text{Im } K_+ \geq 0$; $\text{Im } K_- \leq 0$. Поскольку функции $\exp(ik_\pm \sigma)$ представляет собой решения, создаваемые точечным источником, расположенным при $\sigma = 0$, то они должны затухать или по крайней мере не

возрастает как при $\sigma \rightarrow +\infty$, так и при $\sigma \rightarrow -\infty$. При $\nu^2 > k_0^2 \beta^2 \gamma^2$ такому условию соответствует выбор $\exp(iK_+ \sigma)$ перед источником ($\sigma > 0$) и $\exp(iK_- \sigma)$ за источником ($\sigma < 0$). Следуя принципу аналитического продолжения, это правило надо распространить и на область $\nu^2 < k_0^2 \beta^2 \gamma^2$.

Отсюда сразу видна резкая асимметрия радиационных сил. Полагая $\nu = 0$, т.е. рассматривая силы от равномерно заряженной плоскости, нетрудно видеть, что при $\sigma > 0$ решение имеет быстроосциллирующий характер с волновым числом

$$K_+(\nu = 0) = k_0 \gamma^2 (1 + \beta) = k_0 / (1 - \beta). \quad (30)$$

Это отражает хорошо известный “двойной” доплер-эффект, согласно которому излучаемая точно вперед (излучение от плоскости направлено только точно вперед и точно назад) волна примерно в $2\gamma^2$ раз короче периода ондулятора. Согласно тем же представлениям, сила позади источника имеет гораздо больший период

$$K_-(\nu = 0) = k_0 \gamma^2 (1 - \beta) = k_0 / (1 + \beta). \quad (31)$$

Накладывая условие непрерывности квазипотенциала Φ_ν при $\sigma = 0$ и выполняя отмеченные выше условия причинности для бесконечно тонкого по σ источника, т.е. для

$$q_0(r, \sigma) = Q(r) \delta(\sigma), \quad (32)$$

имеем решение при $\sigma \geq 0$

$$\Phi_\nu = i\pi \beta_0^2 \gamma (k_0^3 \beta^2 \gamma^2 - \nu^2)^{-1/2} (2 - \nu^2 k^{-2} \gamma^{-2}) Q_\nu \exp(iK_\pm \sigma). \quad (33)$$

Отметим принципиально различную роль длинноволновых и коротковолновых гармоник поперечного распределения плотности, отличающихся по критерию $\nu \lesseqgtr k_0 \beta \gamma$. В излучение, или в дальное действие, дают вклад только длинноволновые гармоники с малым ν ; а коротковолновая часть силового поля экспоненциально затухает на расстоянии порядка длины волны, хотя и вносит вклад в “самодействие” сгустка.

В предельном случае очень широкого сгустка, т.е. при Q_ν , отличном от нуля только для очень малых $\nu \ll k_0 \gamma^2 \beta^2$, обратное преобразование Бесселя дает

$$\Phi(r, \sigma) = (2\pi i \beta_0^2 / k_0 \beta) \exp(ik_0 \gamma^2 (1 \pm \beta) \sigma) Q(r), \quad (34)$$

где $Q(r)$ имеет смысл поверхностной плотности заряда тонкого диска, по предложению мало меняющейся на расстояниях порядка $(k_0 \beta \gamma)^{-1}$.

Отметим, что электрическая часть излучения, связанная с краевыми эффектами, при этом отсутствует.

В некотором смысле обратным предельным случаем является точечный сгусток, поперечные размеры которого гораздо меньше характерной величины $(k_0 \beta \gamma)^{-1}$, хотя по предположению должны оставаться больше амплитуды ондуляторных колебаний, имеющей порядок β_0 / k_0 . Амплитуда Бессель-гармоник Q_ν тогда не зависит от ν вплоть до $\nu \gg k_0 \beta \gamma$ и равна просто $Q_0 / 2\pi$, где Q_0 — полный заряд сгустка. На больших расстояниях от источника интеграл обратного преобразования по ν может

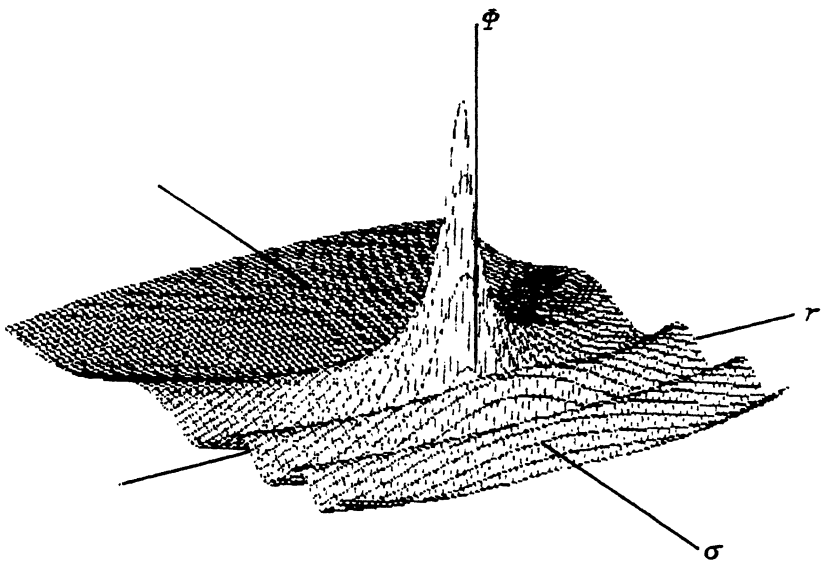


Рис. 1. Действительная часть потенциала радиационного взаимодействия точечного источника ($\gamma = 1.5$).

быть взят методом стационарной фазы с использованием асимптотического представления функции Бесселя. Точка стационарной фазы определяется уравнением

$$\partial(K_{\pm}\sigma \pm \nu r)/\partial\nu = 0 \quad (35)$$

и равна

$$\nu_0 = rk_0\beta\gamma\sqrt{\gamma^2\sigma^2 + r^2}. \quad (36)$$

Несложные выкладки дают после этого следующие асимптотические выражения для комплексного “потенциала” силового поля точечного заряда

$$\begin{aligned} \Phi(r, \sigma) \simeq & (-i\beta_0^2\gamma/2)(\gamma^2\sigma^2 + r^2)^{-1/2}(2 - r^2\beta^2/(\gamma^2\sigma^2 + r^2))Q \times \\ & \times \exp(ik_0\gamma^2\sigma + ik_0\beta\gamma(r^2 + \gamma^2\sigma^2)^{1/2}). \end{aligned} \quad (37)$$

Нетрудно видеть, что он имеет осциллирующий в пространстве характер с амплитудой, спадающей обратно пропорционально лоренц-сокращенному расстоянию от источника. Поверхности равной фазы имеют вид парабол, тесно сдвинутых перед источником, куда распространяются коротковолновая часть излучения, и раздвинутых за источником (рис. 1).

В связи с обсуждением структуры силового поля точечного заряда представляет еще интерес прямое вычисление его силы самодействия и радиационных потерь. Естественно, радиальная сила должна быть равна нулю, а для продольной, вычисляемой как полусумма значений при $\sigma = \pm 0$, имеем из (16) и (33):

$$F_{\nu} = -k_0\gamma^3\beta_0^2\beta^2\pi(k_0^2\gamma^2\beta^2 - \nu^2)^{-1/2}(2 - \nu^2/k_0^2\gamma^2)Q_{\nu}. \quad (38)$$

Поскольку важна лишь действительная часть F_ν , то интегрирование при обратном преобразовании Бесселя распространяется только на $\nu^2 < k_0^2 \beta^2 \gamma^2$, где $Q_\nu \cong \text{const}$. В итоге при $r = 0$ продольная сила самодействия (на весь сгусток) оказывается равной

$$f_\sigma(r = 0, \sigma = 0) = -k_0^2 \gamma^4 \beta_0^2 \beta^3 (1 - \beta^2/3) Q_0^2, \quad (39)$$

а потери на единицу пути $w = -\text{Re } W = -f_0/\beta^2$. Отметим, что w больше продольной составляющей f_σ на относительную величину $\sim \gamma^{-2}$, что отражает угловое распределение излучения, сосредоточенного именно в таком телесном угле. Небезынтересно также наличие в полученных выражениях фактора $(1 - \beta^2/3)$, описывающего интерференцию электрического и магнитного излучений.

Реакция когерентного излучения на конечный сгусток

Приведенный выше результат (39) кажется совершенно очевидным в том смысле, что точечный электрон принимает на себя всю реакцию коротковолнового излучения, направленного вперед, и тем самым тормозится в продольном направлении. Однако для сгустка конечных размеров этот вывод должен быть пересмотрен. Согласно формулам (16), (33), полная продольная сила, действующая на сгусток, есть

$$F_0 = -2\pi^2 \beta^3 \gamma \int \nu \mu r (k_0^2 \beta^2 \gamma^2 - \nu^2)^{-1/2} (2 - \nu^2/k_0^2 \gamma^2) q_\nu(\sigma') q_\mu(\sigma) \times \\ \times J_0(\mu r) J_0(\nu r) (K_\pm - k_0) \exp(iK_\pm(\sigma - \sigma')) dr d\nu d\mu d\sigma d\sigma', \quad (40)$$

где знаки \pm относятся соответственно к областям $\sigma \gtrless \sigma'$.

Предположим, что продольное распределение сгустков является гауссовым с дисперсией σ_0

$$q_\nu(\sigma) = (Q_\nu/\sigma_0 \pi^{1/2}) \exp(-\sigma^2/\sigma_0^2). \quad (41)$$

Поскольку физический смысл имеет только действительная часть F_0 , то интегрирование по ν распространяется только на "излучаемые" гармоники $\nu < k_0 \beta \gamma$. Тогда интегрирование и подстановка $\nu = k_0 \beta \gamma \sin \phi$ приводит выражение для силы самодействия к виду

$$f_0 = -\pi^2 \beta_0^2 \gamma^4 k_0^2 \beta^2 \int_0^\pi Q_\lambda^2 (2 - \beta^2 \sin^2 \phi) (\beta + \cos \phi) \times \\ \times \exp(-\sigma_0^2 \gamma^4 k_0^2 (1 + \beta \cos \phi)^2 / 4) \sin \phi d\phi. \quad (42)$$

Абсолютно аналогично для потерь имеем

$$w = \pi^2 \beta^2 k_0^2 \gamma^4 \beta_0^2 \int_0^\pi Q_\lambda^2 (2 - \beta^2 \sin^2 \phi) (1 + \beta \cos \phi) \times \\ \times \exp(-\sigma_0^2 k_0^2 \gamma^4 (1 + \beta \cos \phi)^2 / 4) \sin \phi d\phi. \quad (43)$$

Интегральное представление (42), (43) имеет наглядный физический смысл, если учесть, что $(\beta + \cos \phi)$ и $(1 + \beta \cos \phi)$ пропорциональны соответственно продольному импульсу и энергии кванта, вылетевшему под углом $\mu = \arccos((\beta + \cos \phi)/(1 + \beta \cos \phi))$ к оси z . Экспоненциальный фактор под интегралом описывает потерю когерентности соответствующего излучения за счет конечного размера сгустка. Если $k_0 \sigma_0 \gamma^2 \geq 1$, т.е. если продольный размер сгустка сравним с минимальной длиной излучаемых волн, то угловое распределение когерентного излучения существенно меняется по сравнению с некогерентным, особенно в релятивистском случае. Действительно, когерентное излучение вперед резко (экспоненциально) падает при $\sigma_0 k_0 \gamma^2 > 1$, тогда как излучение назад начинает уменьшаться лишь при $\sigma_0 k_0 > 1$. В результате в интервале (по порядку величины)

$$\gamma^{-2} < \sigma_0 k_0 < 1 \quad (44)$$

интегральная сила самодействия может оказаться направленной вперед, что напоминает самоускорение сгустка (правда, при потере его полной энергии). Интегралы, входящие в (42), (43), в случае тонкого пучка ($Q_\nu = Q_0/2\pi$) сводятся к интегралу вероятностей Φ . В результате

$$f_0 = -(\beta_0 k_0 \gamma^2 Q_0/2\alpha^2)^2 \{ \exp(-\alpha^2(1 + \beta^2)) [(1 + \alpha^2(3 - \beta^2)) \text{sh } 2\alpha^2 \beta + \alpha^2(1 - \beta^2) \beta \text{ch } 2\alpha^2 \beta] - (3 - \beta^2) \pi^{1/2} (\alpha/4) (1 + 2\alpha^2(1 - \beta^2)) [\Phi(\alpha(1 + \beta)) - \Phi(\alpha(1 - \beta))] \} \rightarrow -\beta_0^2 k_0^2 \gamma^4 Q_0^2 \beta^3 (1 - \beta^2/3), \quad (45)$$

$$w = (\beta_0 k_0 \gamma^2/2\alpha^2)^2 \beta \{ (1 + 2\alpha^2) \exp(-\alpha^2(1 + \beta^2)) \text{sh } 2\alpha^2 \beta + (\alpha \pi^{1/2}/2) \times [\Phi(\alpha(1 + \beta)) - \Phi(\alpha(1 - \beta))] \} \rightarrow \beta_0^2 k_0^2 \gamma^4 Q_0^2 \beta (1 - \beta^2/3), \quad (46)$$

где $\alpha = \sigma_0 k_0 \gamma^2/2$, а предельные переходы соответствуют точечному сгустку и совпадают, естественно, с (39). Энергетические потери конечно всегда положительны, а продольная сила реакции излучения, согласно отмеченному выше механизму, меняет знак, если продольный размер сгустка превышает длину волны, излучаемую вперед. При условии сильного выполнения неравенства (44), что возможно только в ультрарелятивистском случае,

$$f_0 \simeq -(\beta^2 k^2 \gamma^4 Q^2/4\alpha^2) \{ \exp(-\alpha^2/4\gamma^4) - \pi^{1/2} \alpha \gamma^{-2} [1 - \Phi(\alpha/2\gamma^2)] \}, \quad (47)$$

откуда видно, что смена знака силы происходит при $\alpha \simeq 0.86\gamma^2$. Полное поведение силы реакции в зависимости от размера сгустка представлено на рис. 2.

Реакция излучения в периодически модулированном пучке

С точки зрения приложений к ЛСЭ интерес представляет распределение реакции излучения и потерь по длинному пугу сгустков, который может быть моделирован гармонически модулированным пучком с плотностью

$$q_0 = Q(r) \cos k_m \sigma + \text{Const}, \quad (48)$$

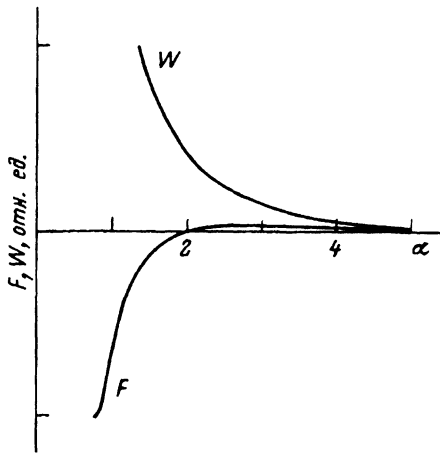


Рис. 2. Сила радиационного торможения F и радиационные потери W в зависимости от относительной длины сгустка α ($\gamma = 1.5$).

где k_m — волновое число модуляции, не совпадающее, вообще говоря, с $k_0\gamma^2(1 \pm \beta)$.

Отвлекаясь от краевых эффектов на головной и хвостовой части пучка, удобно искать периодическое решение непосредственно из уравнения (21). С учетом (25) и (48) представим его в виде

$$\Phi(r, \sigma) = -(2\pi q_0/k_0^2\gamma^2) + \Phi_+ \exp(ik_m\sigma) + \Phi_- \exp(-ik_m\sigma), \quad (49)$$

так как подстановка (49) в (21) приводит к двум однотипным расщепляющимся уравнениям с действительными коэффициентами

$$(\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r - \kappa_{\pm}^2)\Phi_{\pm} = -\pi\beta_0^2 Q(r)(2 + \kappa_{\pm}^2/k_0^2\gamma^2), \quad (50)$$

где

$$\kappa_{\pm}^2 = k_0^2 - 2k_0k_m + k_m^2/\gamma^2 = \gamma^{-2} [k_{m\pm} - k_0\gamma^2(1 + \beta)] [k_{m\pm} - k_0\gamma^2(1 - \beta)]. \quad (51)$$

Нетрудно видеть, что если волновое число модуляции лежит в резонансной полосе

$$k_0\gamma^2(1 - \beta) < k_m < k_0\gamma^2(1 + \beta), \quad (52)$$

то параметр κ_{\pm}^2 становится отрицательным, т.е. радиационное силовое поле пучка осциллирует не только по σ , но и по r , приобретая характер расходящейся волны. Во всех остальных случаях по радиусу на больших расстояниях потенциал спадает монотонно (примерно логарифмически).

С точки зрения самодействия основной интерес представляет силовое поле внутри пучка, которое может быть получено прямым интегрированием (50). Вне области резонанса (52) с условием конечности потенциала на оси и на бесконечности имеем

$$\Phi_{\pm} = \pi\beta_0^2(2 + \kappa_{\pm}^2/k_0^2\gamma^2) \int_0^{\infty} r'Q(r')dr' \cdot \begin{cases} K_0(\kappa_{\pm}r)I_0(\kappa_{\pm}r') & \text{при } r' < r, \\ I_0(\kappa_{\pm}r)K_0(\kappa_{\pm}r') & \text{при } r' > r. \end{cases} \quad (53)$$

В резонансной полосе $\kappa_+^2 < 0$, так что при интегрировании надо учитывать условие излучения, т.е. асимптотику в виде расходящейся волны. Тогда

$$\Phi_+ = (i\pi\beta_0^2/2)(2 + \kappa_+^2/k_0^2\gamma^2) \int r' Q(r') dr' \cdot \begin{cases} J_0(\mu r') H_0^1(\mu r') & \text{при } r' < r, \\ J_0(\mu r) H_0^1(\mu r') & \text{при } r' > r, \end{cases} \quad (54)$$

где $\mu = (-\kappa_+^2)^{1/2}$, а для Φ сохраняется нерезонансное выражение (53).

Пользуясь (16) и (53), (54), нетрудно теперь получить выражения для продольных и поперечных радиационных сил самодействия. В нерезонансной области амплитуды Φ_+ чисто действительны, так что продольная сила находится в квадратуре с током, а поперечная дефокусирующая сила — в фазе с ним. В этом отношении радиационное взаимодействие мало чем отличается от кулоновского.

В резонансном случае появляется совершающая работу продольная сила, находящаяся в фазе с током, и поперечная сила фокусировки, сдвинутая по фазе на $\pi/2$. Обе они определяются мнимой частью Φ_+ и, соответственно, равны

$$\begin{aligned} f_\sigma &= -(k_m - k_0)(\pi^2\beta_0^2/2)(2 + \kappa_+^2/k_0^2\gamma^2) J_0(\mu r) Q_\mu \cos k_m \sigma, \\ f_r &= -(\pi^2\beta_0^2/2)(2 + \kappa_+^2/k_0^2\gamma^2) J_1(\mu r) \mu Q \sin k_m \sigma. \end{aligned} \quad (55)$$

Пропорциональность μ -й Бессель-компоненте поперечного распределения заряда обусловлена тем, что только при заданной расстройке дает поле, когерентно складывающееся на всей длине пучка, в то время, как остальные компоненты интерференционно гасятся.

Отметим, что в практически наиболее интересном для ЛСЭ случае $k_m = k_0\gamma^2(1 + \beta)$ радиальная сила взаимодействия обращается в нуль, а продольная не зависит ни от поперечного распределения, ни от поперечной координаты

$$f_\sigma = -\pi^2\beta^2\beta(1 - \beta)^{-1} \cos k_m \sigma \int_0^\infty Q(r) r dr. \quad (56)$$

Заключение

Проведенное исследование, помимо вывода конкретных формул, позволяет сделать некоторые общие заключения о когерентном радиационном взаимодействии в ондуляторе.

1. Хотя в рамках сделанных приближений радиационные силы малы по сравнению с кулоновским взаимодействием, они могут стать сравнимыми при коэффициенте ондуляторности $\gamma^2\beta_0^2 \rightarrow 1$.

2. Радиационная сила, действующая на одну частицу, пропорциональна $\beta_0^2 Q_0$ и должна оказывать существенное влияние на процесс спонтанной фазировки (индуцированное излучение) в ЛСЭ с большим коэффициентом усиления. Этот эффект требует специального исследования, так как выпадает из рассмотрения как в одночастичной теории, так и при самосогласованном подходе с кинетическим уравнением.

3. Угловое распределение сил самодействия и когерентного излучения существенно зависит от размера сгустка, если он больше $(k_0\beta\gamma)^{-1}$ в

поперечном направлении или $(1 - \beta)/k_0$ в продольном. В частности, продольная интегральная сила самодействия может оказаться направленной вперед, если коротковолновая часть когерентного излучения сгустка интерференционно погашена.

4. При исследовании реакции индивидуальных электронов на когерентное излучение одного фотона, что лежит в основе полуклассического учета квантовых флуктуаций излучения, следует исходить из того, что унесенный импульс в результате радиационного взаимодействия распределен по объему когерентности порядка $(k_0\beta\gamma)^{-2} \cdot (1 - \beta)/k_0$, или $(1 - \beta)/k_0^3\gamma\beta^2$ в сопутствующей системе.

5. Если число частиц в объеме когерентности настолько велико, что их коллективный классический радиус превышает излучаемую длину волны, то подход к реакции излучения как к возмущению становится вообще неправомочным и характер излучения должен резко измениться. В сопутствующей системе соответствующая пороговая плотность q' может быть оценена из неравенства $(e/mc^2)q'(1 - \beta)/k_0^3\beta^2\gamma > 1/k_0\gamma$, что в лабораторной системе дает

$$q' > (mc^3/e)k_0^2\beta^2\gamma/(1 - \beta) \simeq 2k_0^2\gamma^3(mc^3/e).$$

Если поперечный размер пучка равен как раз $(k_0\beta\gamma)^{-1}$, то соответствующий ток равен 34γ [kA], что вполне доступно экспериментальному исследованию.

Список литературы

- [1] *Спрэнгл Ф., Смит Р.А.*// Генераторы когерентного излучения на свободных электронах. М.: Мир, 1983. С. 125-142.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Москва

Поступило в Редакцию
23 сентября 1991 г.