

01

©1992 г.

## РАСЧЕТ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДИПОЛЬНЫХ И КВАДРУПОЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПРОВОДЯЩИМ ЭКРАНОМ

*В.Н.Канунников, И.И.Логачев*

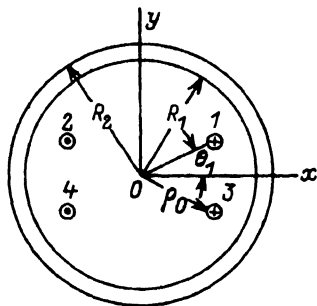
Для дипольных и квадрупольных магнитных систем из неограниченных по длине проводников малого сечения, заключенных в цилиндрический проводящий экран, в квазистационарном приближении получены аналитические выражения (ряды) для векторного потенциала, магнитной индукции и ее градиента при синусоидальном токе возбуждения. Рассмотрены системы из четырех и восьми проводников. Найдена геометрия дипольной системы, формирующая поле, близкое к однородному, и геометрия квадрупольной системы, обеспечивающая постоянство градиента индукции в приосевой области. Приводятся численные оценки, показывающие влияние экрана на пространственно-временное распределение поля при возбуждении системы синусоидальным током, а также периодическими импульсами тока треугольной формы.

### Введение

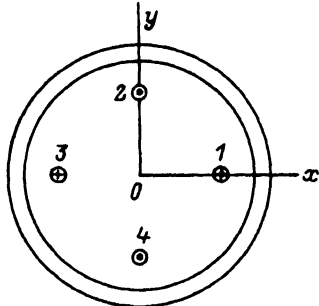
При разработке высокочастотных и импульсных магнитных систем необходимо учитывать влияние проводящих экранов (например, вакуумной камеры) на формирование пространственно-временного распределения магнитного поля. Индуцируемые в экранах вихревые токи приводят к перераспределению магнитного поля и к его ослаблению. Оценки влияния неограниченных плоских экранов на распределение поля в дипольном безжелезном отклоняющем магните получены, например, в работе [1]. Расчет характеристик магнитного поля, генерируемого импульсом тока произвольной формы, протекающего по двухпроводной линии, расположенной внутри цилиндрического экрана, выполнен в работах [2,3].

Ниже рассматриваются дипольные и квадрупольные системы из неограниченных по длине проводников пренебрежимо малого сечения, окруженных круглым цилиндрическим проводящим экраном. Для этих систем получены выражения в форме рядов для векторного потенциала при синусоидальном токе возбуждения, а также найдено поле в системе при периодических импульсах тока возбуждения треугольной формы. Разработанный в работе аппарат позволяет в принципе рассматривать импульсы возбуждения произвольной формы.

а



б



в

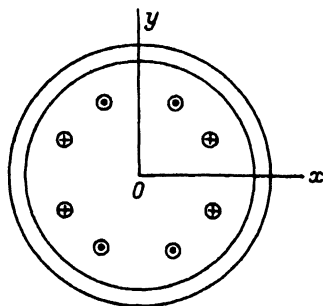


Рис. 1. Геометрия магнитной системы.

а — дипольная система, б — квадрупольная система из четырех проводников, в — квадрупольная система из восьми проводников.

### Поле без экрана

а) Для оценки поля в дипольной и квадрупольной системах без экрана воспользуемся выражением для векторного электромагнитного потенциала проводника с током [4]

$$\mathbf{A}^s = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \oint \frac{ds}{r}. \quad (1)$$

Для прямолинейного проводника  $r^2 = \rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\theta - \theta_i) + z^2 \equiv a_i^2 + z^2$ ;  $ds = (0, 0, dz)$ ;  $r^2$  — квадрат расстояния от элемента тока до точки наблюдения;  $\rho$  — радиальная координата точки наблюдения;  $\rho_i$  — радиальная координата проводника с током;  $a_i = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\theta - \theta_i)}$  — расстояние проводника до точки наблюдения;  $\theta$  — угловая координата точки наблюдения;  $\theta_i$  — угловая координата проводника с током.

б) Дипольная система. Проинтегрируем выражение (1) с учетом направления токов (рис. 1, а)

$$A_z^s = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \ln a_i. \quad (2)$$

Остальные компоненты равны нулю.

Воспользуемся разложением  $\ln a_i$  в ряд [4]

$$\ln a_i = \ln \rho_i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\rho}{\rho_i} \right)^n \cos n(\theta - \theta_i), \quad \rho \leq \rho_i, \quad (3)$$

$$\ln a_i = \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\rho_i}{\rho} \right)^n \cos n(\theta - \theta_i), \quad \rho > \rho_i. \quad (4)$$

Для случая равноудаленных от оси токонесущих проводников ( $\rho_i = \text{const} = \rho_0$ ):

$$A_z^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1, \quad \rho \leq \rho_0, \quad (5)$$

$$A_z^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1, \quad \rho > \rho_0. \quad (6)$$

Отсюда легко находятся составляющие индукции магнитного поля

$$B_\rho^s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^s}{\partial \theta} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{\rho_0^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1, \quad \rho \leq \rho_0,$$

$$B_\theta^s = -\frac{\partial A_z^s}{\partial \rho} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{\rho_0^{2n+1}} \cos(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1, \quad (7)$$

$$B_\rho^s = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n+1}}{\rho^{2n+2}} \sin(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1, \quad \rho > \rho_0,$$

$$B_\theta^s = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n+1}}{\rho^{2n+2}} \cos(2n+1)\theta \cdot \cos(2n+1)\theta_1. \quad (8)$$

Ряды (7) и (8) суммируются. Для случая  $\rho < \rho_0$

$$B_\rho^s = \frac{\mu_0 I}{\pi \rho_0} \left(1 + \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \left\{ \frac{\sin(\theta + \theta_1)}{1 - 2\frac{\rho^2}{\rho_0^2} \cos 2(\theta + \theta_1) + \frac{\rho^4}{\rho_0^4}} + \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{1 - 2\frac{\rho^2}{\rho_0^2} \cos 2(\theta - \theta_1) + \frac{\rho^4}{\rho_0^4}} \right\},$$

$$B_\theta^s = \frac{\mu_0 I}{\pi \rho_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \left\{ \frac{\cos(\theta - \theta_1)}{1 - 2\frac{\rho^2}{\rho_0^2} \cos 2(\theta - \theta_1) + \frac{\rho^4}{\rho_0^4}} + \frac{\cos(\theta + \theta_1)}{1 - 2\frac{\rho^2}{\rho_0^2} \cos 2(\theta + \theta_1) + \frac{\rho^4}{\rho_0^4}} \right\}. \quad (9)$$

В практических приложениях интерес представляет составляющая  $B_y$  в декартовой системе координат

$$B_y = B_\rho \sin \theta + B_\theta \cos \theta = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2n} \cos(2n+1)\theta_1 \cos(2n\theta). \quad (10)$$

Представление индукции поля в виде рядов (7) и (8) удобно при нахождении таких параметров дипольной системы, которые позволяют добиться однородности поля в данной области с заданной точностью. При  $\theta_1 = \pi/6$  коэффициент при члене ряда  $\rho^2/\rho_0^2$  равен нулю. В этом случае неоднородность поля в приосевой области связана с членами  $O(\rho^4/\rho_0^4)$ .

в) Расчет для квадрупольной системы из четырех проводников (рис. 1, б) выполняется аналогичным образом

$$A_z^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(2n+1)} \cos 2(2n+1)\theta, \quad \rho < \rho_0. \quad (11)$$

В дальнейшем нас будет интересовать область  $\rho < \rho_0$ . Составляющие индукции находятся из выражения для векторного потенциала

$$B_\rho^s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^s}{\partial \theta} = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(2n+1)} \sin 2(2n+1)\theta,$$

$$B_\theta^s = -\frac{\partial A_z^s}{\partial \rho} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(2n+1)} \cos 2(2n+1)\theta. \quad (12)$$

Ряды (12) суммируются

$$B_\rho^s = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho}{\rho_0^2} \frac{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4\right] \sin 2\theta}{1 - 2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \cos 4\theta + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^8},$$

$$B_\theta^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho}{\rho_0^2} \frac{\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4\right] \cos 2\theta}{1 - 2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \cos 4\theta + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^8}. \quad (13)$$

При  $\theta = 0$  приходим к известным выражениям [5]

$$B_\rho^s = 0, \quad B_\theta^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho}{\rho_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4}. \quad (14)$$

Градиент индукции остается постоянным с точностью до членов  $O\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4\right)$ .

Действительно ( $\rho < \rho_0$ ),

$$\frac{\partial B_\theta^s}{\partial \rho} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0^2} \left[1 + 5\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4 + 9\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^8 + \dots\right]. \quad (15)$$

В приосевой области ( $\rho \ll \rho_0$ ) выражения (13) упрощаются

$$B_\rho^s = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho}{\rho_0^2} \sin(2\theta),$$

$$B_\theta^s = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho}{\rho_0^2} \cos(2\theta). \quad (16)$$

г) Большими возможностями обладает квадрупольная система из восьми проводников, представленная на рис. 1, в. Она составлена из двух подсистем, рассмотренных выше (по четыре проводника в каждой). Эти подсистемы повернуты вокруг оси  $z$  на угол  $\theta_1$  из положения, показанного на рис. 1, б: одна — по часовой стрелке, другая — против нее. Введение дополнительного параметра  $\theta_1$  позволяет нам оптимизировать распределение поля.

Потенциал этой системы дается выражением

$$= A_z^s = -\frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(2n+1)} \times \\ \times \cos 2(2n+1)\theta \cdot \cos 2(2n+1)\theta_1, \quad \rho \leq \rho_0, \quad (17)$$

из которого легко найти градиент индукции. Рассмотрим радиальную компоненту градиента

$$\frac{\partial B_\rho^s}{\partial \rho} = \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\rho^{4n}}{\rho_0^{2(2n+1)}} \sin 2(2n+1)\theta \cos 2(2n+1)\theta_1, \\ \frac{\partial B_\theta^s}{\partial \rho} = \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \frac{\rho^{4n}}{\rho_0^{2(2n+1)}} \cos 2(2n+1)\theta \cos 2(2n+1)\theta_1. \quad (18)$$

Для характерных плоскостей квадрупольной линзы ( $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ),  $B_\rho^s = 0$ . Соответствующим расположением проводников ( $\theta_1 = \pi/12$ ) можно добиться того, что второй член разложения (18) обратится в нуль. Поэтому в приосевой области ( $\rho/\rho_0 \ll 1$ ) с большой точностью градиент будет постоянной величиной

$$\frac{\partial B_\theta^s}{\partial \rho} = \frac{4\mu_0 I}{\pi \rho_0^2} \cos \frac{\pi}{6}. \quad (19)$$

### Наведенное магнитное поле

а) Для учета влияния круглого цилиндрического экрана, имеющего толщину  $r_0$  и изготовленного из немагнитного материала ( $\mu = 1$ ), необходимо рассмотреть квазистационарную задачу. Рассмотрим случай, когда токи, создающие магнитное поле, меняются по гармоническому закону  $I \sim e^{i\omega t}$  и решения можно записать в комплексной форме.

В дипольной системе без экрана векторный потенциал представим в виде ( $\rho > \rho_0$ )

$$A_z = A(\rho, \theta) e^{i\omega t}, \quad (20)$$

где

$$A(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(I, \rho_0, \theta_1) \rho^{-(2n+1)} \cos(2n+1)\theta, \\ a_{2n+1}(I, \rho_0, \theta_1) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\rho_0^{2n+1}}{2n+1} \cos(2n+1)\theta_1.$$

При изменении магнитного поля в экране возникает индукционный ток. Поэтому векторный потенциал как внутри экрана, так и в других областях равен сумме векторного потенциала от проводников с током и векторного потенциала от тока, наведенного в экране,

$$A_z = A_z^s + A_z^i.$$

Векторный потенциал индукционного тока имеет тот же характер зависимости от угла  $\theta$ , т.е.

$$A_z^i = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(\rho) \cos(2n+1)\theta. \quad (21)$$

Векторный потенциал  $A$  описывается уравнением типа уравнения диффузии  $\Delta A = i\mu_0\sigma\omega A$  [6] и в нашем случае принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 A_z^i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z^i}{\partial z^2} - i\mu_0\sigma\omega A_z^i = i\mu_0\sigma\omega A_z^s$$

или

$$\frac{\partial^2 b_{2n+1}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_{2n+1}}{\partial \rho} - \frac{(2n+1)^2}{\rho^2} b_{2n+1} - i\mu_0\sigma\omega b_{2n+1} = i\mu_0\sigma\omega a_{2n+1} \rho^{-(2n+1)}. \quad (22)$$

Характер решения уравнения (22) для трех областей:

$$\text{I) } \rho \leq R_1, \quad \text{II) } R_1 < \rho < R_2 = R_1 + r_0, \quad \text{III) } \rho \geq R_2 = R_1 + r_0$$

различен

$$\text{I) } b_{2n+1} = A_{2n+1} \rho^{2n+1},$$

$$\text{II) } b_{2n+1} = C_{2n+1} J_{2n+1}(\alpha\rho) + D_{2n+1} Y_{2n+1}(\alpha\rho) - a_{2n+1} \rho^{-(2n+1)},$$

$$\text{III) } b_{2n+1} = B_{2n+1} \rho^{-(2n+1)}, \quad (23)$$

где  $J_{2n+1}$  и  $Y_{2n+1}$  — функции Бесселя первого и второго рода,  $\alpha^2 = -i\mu_0\sigma\omega$ ,  $a_{2n+1}$  определяется из формулы (20).

Коэффициенты  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+1}$ ,  $C_{2n+1}$ ,  $D_{2n+1}$  находятся из условий непрерывности касательных составляющих магнитного и электрического полей на внешней и внутренней границах экрана. Приведем эти выражения

$$A_{2n+1} = -a_{2n+1} R_1^{-2(2n+1)} \frac{J_{2n}(\alpha R_1) Y_{2n}(\alpha R_2) - J_{2n}(\alpha R_2) Y_{2n}(\alpha R_1)}{J_{2n}(\alpha R_2) Y_{2n+2}(\alpha R_1) - Y_{2n}(\alpha R_2) J_{2n+2}(\alpha R_1)},$$

$$C_{2n+1} = -a_{2n+1} \frac{2(2n+1)}{\alpha} R_1^{-2(2n+1)} \times \\ \times \frac{Y_{2n}(\alpha R_2)}{J_{2n}(\alpha R_2) Y_{2n+1}(\alpha R_1) - Y_{2n}(\alpha R_2) J_{2n+1}(\alpha R_1)},$$

$$\begin{aligned}
D_{2n+1} &= -a_{2n+1} \frac{2(2n+1)}{\alpha} R_1^{-2(2n+1)} \times \\
&\times \frac{J_{2n}(\alpha R_2)}{J_{2n}(\alpha R_2)Y_{2n+1}(\alpha R_1) - Y_{2n}(\alpha R_2)J_{2n+1}(\alpha R_1)}, \\
B_{2n+1} &= -a_{2n+1} \left[ 1 + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{-2(2n+1)} \times \right. \\
&\times \left. \frac{J_{2n+2}(\alpha R_2)Y_{2n}(\alpha R_2) - J_{2n}(\alpha R_2)Y_{2n+2}(\alpha R_2)}{J_{2n}(\alpha R_2)Y_{2n+1}(\alpha R_1) - Y_{2n}(\alpha R_2)J_{2n+1}(\alpha R_1)} \right]. \quad (24)
\end{aligned}$$

б) Векторный потенциал токов, наведенных в экране, для случая квадрупольной системы, состоящей из четырех проводников, находится аналогично. Различие состоит в иной зависимости от угла

$$A_z^i = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2(2n+1)}(\rho) \cos(2(2n+1)\theta) \quad (25)$$

и в другом виде правой части диффузионного уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 b_{2(2n+1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_{2(2n+1)}}{\partial \rho} - \frac{4(2n+1)^2}{\rho^2} b_{2(2n+1)} - i\mu\sigma\omega b_{2(2n+1)} = \\
= i\mu_0\sigma\omega a_{2(2n+1)}\rho^{-2(2n+1)}. \quad (26)
\end{aligned}$$

с учетом этого коэффициенты  $A_{2(2n+1)}$ ,  $B_{2(2n+1)}$ ,  $C_{2(2n+1)}$ ,  $D_{2(2n+1)}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
A_{2(2n+1)} &= a_{2(2n+1)} R_1^{-4(2n+1)} \times \\
&\times \frac{J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_1)Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_1)J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)}{J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)}, \\
C_{2(2n+1)} &= 2 \frac{a_{2(2n+1)}}{\alpha} R_1^{-2(2n+1)} \times \\
&\times \frac{2(2n+1)Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)}{J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)}, \\
D_{2(2n+1)} &= -2 \frac{a_{2(2n+1)}}{\alpha} R_1^{-2(2n+1)-1} \times \\
&\times \frac{2(2n+1)J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)}{J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - Y_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2)}, \\
B_{2(2n+1)} &= a_{2(2n+1)} \left[ \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{-2(2n+1)-1} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \frac{J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_2) Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) Y_{2(2n+1)+1}(\alpha R_2)}{J_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1) Y_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) - J_{2(2n+1)-1}(\alpha R_2) Y_{2(2n+1)+1}(\alpha R_1)} - 1 \Bigg]. \quad (27)$$

в) Потенциал наведенных токов в квадрупольной системе из восьми проводников отличается от потенциала в квадрупольной системе из четырех проводников (25) только наличием постоянного множителя  $\cos(2(2n+1)\theta_1)$  и множителя, равного 2:

### Приближенные выражения и оценки

а) Если толщина стенки экрана  $r$  значительно меньше радиуса  $r_0 \ll R_1, R_2$  где  $R_2 = R_1 + r_0$ , то можно ограничиться первым членом разложения выражения (24) в ряд по малому параметру  $r_0/R_1$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем выражение для наведенного потенциала в дипольной системе

$$A_z^i = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{\rho_0 \rho}{R_1^2} \right)^{2n+1} \times \\ \times \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{2(2n+1)}{\alpha R_1} - \frac{4n(2n+1)}{\alpha R_1^2} r_0} \cos(2n+1)\theta_1 \cos(2n+1)\theta. \quad (28)$$

Получим выражение для составляющих индукции наведенного поля

$$B_\rho^i = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n+1} \rho^{2n}}{R_1^{2(2n+1)}} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{2(2n+1)}{\alpha R_1} - \frac{4n(2n+1)}{\alpha R_1^2} r_0} \cos(2n+1)\theta_L \sin(2n+1)\theta, \\ B_\theta^i = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n+1} \rho^{2n}}{R_1^{2(2n+1)}} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{2(2n+1)}{\alpha R_1} - \frac{4n(2n+1)}{\alpha R_1^2} r_0} \cos(2n+1)\theta_1 \cos(2n+1)\theta. \quad (29)$$

Рассмотрим составляющую  $B_y^i = B_\rho^i \sin \theta + B_\theta^i \cos \theta$

$$B_y^i = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n+1} \rho^{2n}}{R_1^{2(2n+1)}} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{2(2n+1)}{\alpha R_1} - \frac{4n(2n+1)}{\alpha R_1^2} r_0} \cos(2n+1)\theta_1 \cos 2n\theta. \quad (30)$$

Сравнение ее с индукцией в системе без экрана (10) показывает, что здесь случаю однородного поля тоже соответствует  $\theta_1 = \pi/6$  (зависимость от  $\rho$  начинается с члена  $(\rho/\rho_0)^4$ ).

б) Выражение (30) сильно упрощается в начале координат ( $\rho = 0$ ), где остается только первый член бесконечной суммы с  $n = 0$

$$B_y^i = -\frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0} \left( \frac{\rho_0}{R_1} \right)^2 \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{2}{\alpha R_1}} \cos \theta_1. \quad (31)$$



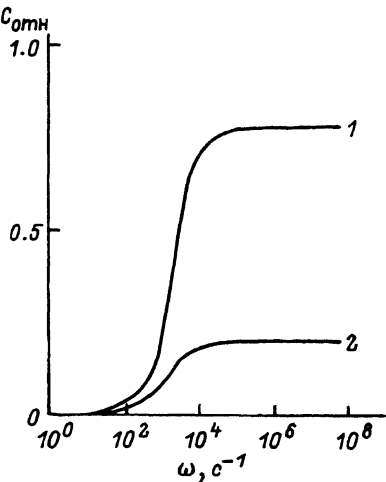


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды наведенного поля от частоты для дипольной системы.

$R_1$ , м: 1 — 0.25, 2 — 50.

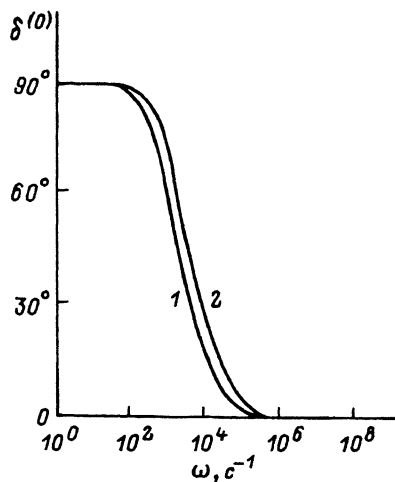


Рис. 3. Зависимость фазы наведенного поля от частоты для дипольной системы.

1, 2 — то же, что и на рис. 2.

Сравним это выражение с выражением (10) для индукции в дипольной системе без экрана в начале координат ( $\rho = 0$ )

$$B_y^s = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0} \cos \theta_1. \quad (32)$$

Из выражения (31) видно, что экран приводит к изменению амплитуды магнитной индукции и к сдвигу ее фазы. Если ток изменяется по гармоническому закону  $I = I_0 \cos \omega t$ , то

$$B_y^s = B_0 \cos \omega t,$$

$$B_y^i = -C_0 \cos(\omega t + \delta),$$

$$C_0 = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0} \left( \frac{\rho_0}{R_1} \right)^2 \frac{\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1 \cos \theta_1}{\sqrt{4 + (\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1)^2}},$$

$$B_0 = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho_0} \cos \theta_1, \quad \text{tg } \delta = \frac{2}{\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1}. \quad (33)$$

В качестве примера на рис. 2 и 3 приведены зависимости относительной амплитуды  $C_{\text{отн}} = C_0/B_0$  и фазы  $\delta$  составляющей  $B_y^i$  в центре системы для двух значений радиуса экрана при  $\rho_0 = 0.22$  м,  $r_0 = 0.001$  м,  $\sigma = 1.38 \cdot 10^6$  (Ом·м) $^{-1}$  (нержавеющая сталь).

в) Обратимся теперь к членам ряда с  $n \neq 0$ . В силу комплексного характера выражения (30) каждый член бесконечной суммы будет давать

клад в амплитуду и фазу наведенного поля, т.е. индукция поля в произвольной точке равна сумме членов вида

$$B_y^i = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega t + \delta_n),$$

$$C_n = \frac{2\mu_0 I \rho_0^{2n+1} \rho^{2n}}{\pi R_1^{2(2n+1)}} \frac{\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1}{\sqrt{\left[2(2n+1) + \frac{r_0}{R_1} 4n(2n+1)\right]^2 + (\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{2(2n+1) + \frac{r_0}{R_1} 4n(2n+1)}{\sqrt{\left[2(2n+1) + \frac{r_0}{R_1} 4n(2n+1)\right]^2 + (\mu_0 \sigma \omega r_0 R_1)^2}}. \quad (34)$$

г) Рассмотрим теперь квадрупольную систему из четырех проводников. Воспользуемся теми же условиями, что и в случае дипольной системы, разложим выражения (27) в ряд по малому параметру  $r_0/R_1$ . Тогда потенциал наведенного поля принимает следующий вид:

$$A_z^i = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \left(\frac{\rho_0 \rho}{R_1^2}\right)^{2(2n+1)} \frac{\alpha r_0 \cos(2(2n+1)\theta)}{\alpha r_0 - \frac{4(2n+1)}{\alpha R_1} \left[1 + \frac{2(2n+1)-1}{R_1} r_0\right]}. \quad (35)$$

Из этого выражения находятся составляющие индукции наведенного поля

$$B_\rho^i = - \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0 \rho}{R_1^2}\right)^{2(2n+1)} \times$$

$$\times \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{4(2n+1)}{\alpha R_1} \left[1 + \frac{2(2n+1)-1}{R_1} r_0\right]} \sin 2(2n+1)\theta, \quad (36)$$

$$B_\theta^i = - \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0 \rho}{R_1^2}\right)^{2(2n+1)} \times$$

$$\times \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{4n(2n+1)}{\alpha R_1} \left[1 + \frac{2(2n+1)-1}{R_1} r_0\right]} \cos 2(2n+1)\theta. \quad (37)$$

д) В приосевой области можно ограничиться первыми членами рядов (36), (37)

$$B_\rho^i = - \frac{2\mu_0 I \rho_0^2 \rho}{\pi R_1^4} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{4}{\alpha R_1} \left(1 + \frac{r_0}{R_1}\right)} \sin 2\theta, \quad (38)$$

$$B_\theta^i = - \frac{2\mu_0 I \rho_0^2 \rho}{\pi R_1^4} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{4}{\alpha R_1} \left(1 + \frac{r_0}{R_1}\right)} \cos 2\theta. \quad (39)$$

Сравним выражения (38) и (39) с выражениями для индукции магнитного поля в квадрупольной системе без экрана (16). Из сравнения видно, что влияние экрана, как и в случае дипольной системы, сводится к изменению амплитуды магнитной индукции и сдвигу ее фазы. Если ток изменяется по гармоническому закону  $I = I_0 \cos \omega t$ , выражения (36) и (37) принимают вид

$$B_\rho^i = - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{4n+1} \sin 2(2n+1)\theta \cos(\omega t - \delta_n), \quad (40)$$

$$B_\theta^i = - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{4n+1} \cos 2(2n+1)\theta \cos(\omega t - \delta_n), \quad (41)$$

где

$$B_n^i = \frac{2\mu_0 I \rho_0^{2(2n+1)}}{\pi R_1^{4(2n+1)}} \frac{\mu_0 \sigma \omega \tau_0 R_1}{\sqrt{\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2 \tau_0^2 R_1^2 + 16(2n+1)^2 \left[1 + \frac{2(2n+1)-1}{R_1} r_0\right]}},$$

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{4(2n+1) \left[1 + \frac{2(2n+1)-1}{R_1} r_0\right]}{\mu_0 \sigma \omega \tau_0 R_1}.$$

В приосевой области ( $\rho \ll \rho_0, R_1$ ) эти выражения значительно упрощаются. Там можно ограничиться первым членом ряда  $n = 0$

$$B_0^i = \frac{2\mu_0 I \rho_0^2}{\pi R_1^4} \frac{\mu_0 \sigma \omega \tau_0 R_1}{\sqrt{\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2 \tau_0^2 R_1^2 + 16 \left(1 + \frac{r_0}{R_1}\right)^2}}, \quad (42)$$

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{4 \left(1 + \frac{r_0}{R_1}\right)}{\mu_0 \sigma \omega \tau_0 R_1}. \quad (43)$$

В качестве примера на рис. 4 и 5 приведены зависимости от частоты  $\omega$  относительной амплитуды  $C_{\text{отн}} = B_0^i / B_{0s}^s$  и фазы  $\delta_0$  наведенного поля в приосевой области для трех значений радиуса экрана при  $\rho_0 = 0.22$  м,  $\tau_0 = 0.001$  м,  $\sigma = 1.38 \cdot 10^6$  (Ом·м)<sup>-1</sup> (нержавеющая сталь).

е) Как уже отмечалось, квадрупольная система из восьми проводников отличается от квадрупольной системы из четырех проводников множителем  $\cos 2(2n+1)\theta_1$ . Поэтому все приведенные выше выражения для системы из четырех проводников справедливы и в этом случае. Из соотношений (36), (37) просто получить и выражения для градиента индукции магнитного поля. Для характерных плоскостей ( $\theta = 0, \theta = \pi/2$ ) и в приосевой области  $\rho/\rho_0 \ll 1$  выражение для радиальной составляющей градиента принимает вид

$$\frac{\partial B_\theta^i}{\partial \rho} = - \frac{4\mu_0 I \rho_0^2}{\pi R_1^4} \frac{\alpha r_0}{\alpha r_0 - \frac{4}{\alpha R_1} \left(1 + \frac{r_0}{R_1}\right)} \cos(2\theta_1). \quad (44)$$

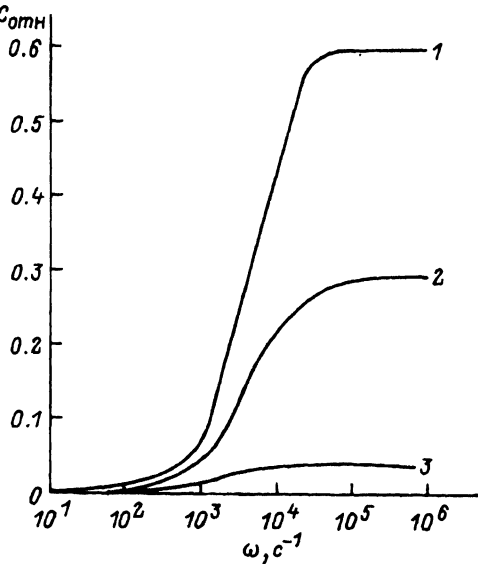


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды наведенного поля от частоты для квадрупольной системы.  
 $R_1, \text{ м: } 1 - 0.25, 2 - 30, 3 - 0.50.$

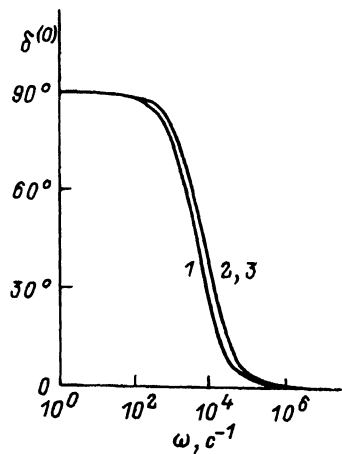


Рис. 5. Зависимость фазы наведенного поля от частоты для квадрупольной системы.  
 1-3 — то же, что и на рис. 4.

При соответствующем расположении проводников ( $\theta_1 = \pi/12$ ) непостоянство градиента индукции связано с членом  $(\rho/\rho_0)^8$  и членами более высокого порядка.

Влияние экрана на градиент индукции магнитного поля сказывается на уменьшении амплитуды и изменении фазы.

ж) Развитый выше аппарат позволяет провести расчеты при произвольной форме импульса тока возбуждения. Воспользовавшись разложением импульса тока в ряд Фурье, можно найти амплитуду и фазу каждой гармоники индукции и градиента. Затем, просуммировав их, получить форму импульса магнитной индукции и ее градиента.

В качестве примера рассмотрены импульсы тока треугольной формы длительностью 2500 и 250 мкс с периодом повторения 5000 и 500 мкс соответственно. Эти импульсы возбуждают дипольную систему с уже упоминавшимися параметрами ( $R_1 = 0.25 \text{ м}, \rho_0 = 0.22 \text{ м}, r_0 = 0.001 \text{ м}, \delta = 1.38 \cdot 10^6 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ ). Результаты расчетов по 10 гармоникам разложения приведены на рис. 6. Виден характер искажений формы импульса индукции, возникающих из-за действия экрана.

## Выводы

Развитый метод дает возможность точно учесть влияние экрана на индукцию и ее градиент в дипольной и квадрупольной системах при синусоидальном токе возбуждения.

Полученные явные соотношения позволяют оптимизировать геометрию дипольной и квадрупольной систем. Например, найти такое расположение проводников, которое обеспечивает высокую степень однородности поля или постоянство его градиента.

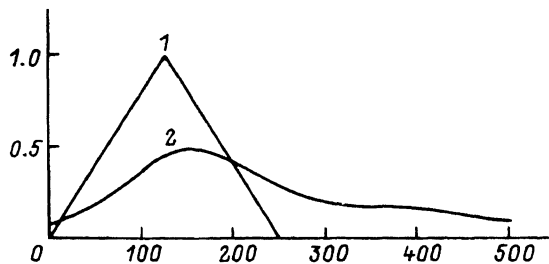
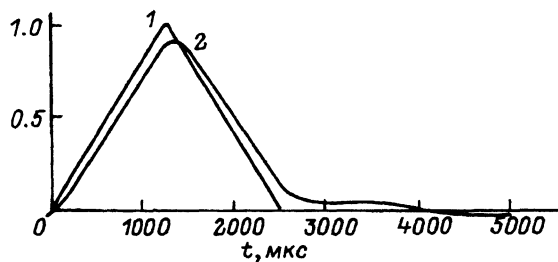


Рис. 6. Искажение импульса индукции магнитного поля в дипольной системе с экраном при ее возбуждении периодическими импульсами треугольной формы.  
 1 — ток возбуждения (отн. ед.),  
 2 — индукция поля на оси системы (отн. ед.).



Найденные выражения позволяют исследовать влияние экрана на пространственно-временное распределение поля и его градиента при возбуждении проводников системы импульсами тока произвольной формы. Авторы благодарят В.А.Кузьмина за полезные обсуждения.

#### Список литературы

- [1] Andrew J. Jason, Richard K. Cooper, Aaron D. Liebman et al. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-20. N 4. P. 2938-2940.
- [2] Затаров В.П., Кислецов А.В., Кривоустов А.В., Мосолов А.Ю. // Электричество. 1990. № 5. С. 50-53.
- [3] Затаров В.П., Кислецов А.В., Кривоустов А.В., Мосолов А.Ю. // Электричество. 1990. № 7. С. 79-81.
- [4] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [5] Явор С.Я. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. М.: Мир, 1968. 263 с.
- [6] Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 391 с.

Московский радиотехнический институт

Поступило в Редакцию  
 22 июля 1991 г.