

01;09
© 1992 г.АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГЛАДКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК
ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

В. В. Залипаев, М. П. Попов

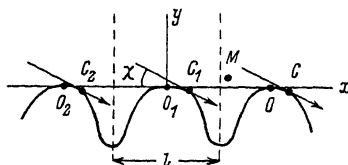
Излагаются основные идеи предлагаемой асимптотической теории гладких дифракционных решеток для коротких длин волн и скользящего падения исходной плоской волны. Приводятся формулы для амплитуд дифракционных волн и обсуждаются физические результаты, вытекающие из них.

Введение

Задачи дифракции плоской волны на периодических структурах образуют в настоящее время отдельную область теории дифракции, включающую в себя большое количество статей и монографий (см., например, [1-3] и приведенную там библиографию). С точки зрения используемых для исследования математических методов эти задачи можно разделить на два различных типа. К первому типу можно отнести негладкие дифракционные решетки. В этом случае имеется ряд задач, допускающих построение точных решений в замкнутом виде. Например, в [4] получено решение задачи дифракции на решетке из полуплоскостей и найдена асимптотика этого решения в случае коротких волн. Ясно, что, располагая точным решением, можно провести детальный анализ физических свойств соответствующей дифракционной решетки.

Ко второму типу можно отнести периодические структуры, образованные телами с гладкими границами. В этом случае нам неизвестна ни одна задача, допускающая точное решение в замкнутом виде. Основным способом исследования таких задач являются численные методы (см. [1,3] и библиографию). Однако численные методы встречают серьезные трудности в случае рассеяния коротких волн, особенно когда возникают освещенные и затененные участки периодической границы. С другой стороны, можно ожидать, что методы коротковолновой асимптотики окажутся полезными при исследовании таких задач.

Используя основные идеи коротковолнового приближения, хорошо известные в теории дифракции, мы развиваем асимптотическую теорию гладких дифракционных решеток в том случае, когда плоская волна падает под малым углом скольжения на границу. Такая ситуация актуальна, например, для морской радиолокации, если считать, что поверхность моря в первом приближении является волнистой периодической границей.



Приведем математическую формулировку задачи. Пусть гладкая периодическая граница S с периодом l ¹ освещается плоской волной $u_{\text{пад}} = \exp[ik(x\cos\chi - y\sin\chi)]$, в которой k — волновое число, χ — угол скольжения (рис. 1). Обозначим через $u_{\text{отр}}$ дифракционное поле, отраженное от границы S , и будем считать, что полное поле $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$ над S , условию Дирихле $u|_S = 0$ на границе S , а также условию Флоке $u(x + l, y) = \exp[ikl\cos\chi]u(x, y)$ над S . Кроме того, дифракционное поле должно удовлетворять условию излучения при $y \rightarrow \infty$, которое с физической точки зрения означает, что в разложении $u_{\text{отр}}$ по плоским волнам отсутствуют волны, набегающие на решетку сверху (рис. 1). Это требование может быть сформулировано следующим образом: над решеткой S отраженное поле $u_{\text{отр}}$ разлагается в ряд

$$u_{\text{отр}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \exp[i(w_n x + v_n y)], \quad (1.1)$$

где

$$w_n = \frac{2\pi n}{l} + k\cos\chi \text{ и } v_n = \sqrt{k^2 - w_n^2},$$

причем $\text{Im } v_n \geq 0$.

Не зависящие от x, y величины R_n в (1.1) называются коэффициентами возбуждения плоских волн, или n -амплитудами дифракционных волн. Для тех номеров n , для которых $|w_n| < k$ и потому $\text{Im } v_n = 0$, в (1.1) получаем отраженные от S плоские волны, убегающие от S под углом φ_n с осью x , определяемым из равенств $w_n = k\cos\varphi_n$, $v_n = k\sin\varphi_n$. Очевидно, что при фиксированном волновом числе k таких волн будет конечное число. Для тех номеров, для которых $|w_n| > k$, величина v_n становится чисто мнимой. Им соответствуют в (1.1) так называемые неоднородные плоские волны, которые затухают с ростом y как $\exp[-y|v_n|]$ и распространяются вдоль решетки.

Мы рассматриваем сформулированную выше задачу при следующих двух дополнительных предположениях: 1) длина волны $\lambda = 2\pi/k$ много меньше по сравнению с периодом l , глубиной впадин, радиусом кривизны холмов границы S , т.е. мы рассматриваем случай коротковолнового приближения; 2) угол скольжения χ достаточно мал или $\chi(kl)^\beta = O(1)$ при $\beta \geq 1/3$, когда $kl \rightarrow \infty$. При этом падающая плоская волна освещает

¹ Мы ограничиваемся рассмотрением периодической границы синусоидального вида, когда на периоде имеется один максимум.

голько вершины холмов границы, в то время как впадины оказываются в глубокой тени.

В этом случае естественно считать, что дифракционное поле формируется за счет бесконечного числа многократно дифрагированных полей (МДП). Так, в результате рассеяния плоской волны на одном холме границы S возникает однократно дифрагированное поле. Оно затем падает на следующий холм, порождая двукратно дифрагированное поле. Этот процесс продолжается до бесконечности. В результате поле представляет собой бесконечную сумму МДП, рассеянных вперед по направлению падения плоской волны. В этой задаче отсутствует рассеяние назад от холмов границы, так как граница гладкая и рассматриваются короткие волны.

Цель данной работы — представить результаты физического характера, вытекающие из анализа построенного нами асимптотического решения рассматриваемой задачи. В разделе 1 излагаются основные идеи, использованные для построения решения, и приводятся окончательные формулы для волнового поля. В разделе 2 приводятся результаты их анализа.

1. Схема построения асимптотики и основные формулы

Решение рассматриваемой задачи содержит два этапа. К первому из них относится задача построения n -кратного дифрагированного поля для любого натурального n . Второй этап состоит в суммировании бесконечного ряда из многократно дифрагированных полей. Остановимся вначале на первом из них.

При $n = 1$ мы получаем по существу классическую задачу дифракции плоской волны на гладком выпуклом контуре, в данном случае на одном изолированном холме границы. Ее исследованию в коротковолновом приближении посвящено большое число работ (см. [5—7] и приведенную там библиографию). Наибольший интерес для нас представляет дифракционное поле, возникающее в полутени, т.е. в окрестности так называемого предельного луча, касающегося холма границы в точке C (рис. 1). Именно это дифрагированное на холме границы поле плоской волны освещает вершину следующего холма (при малых углах скольжения χ), т.е. является падающим полем в задаче о двукратной дифракции. Напомним характерные черты этого полутеневого поля [6]. Главный член коротковолновой асимптотики содержит интеграл Френеля, описывающий характерный переход от света к тени. Он оказывается таким же, как и при дифракции плоской волны на полуплоскости. Таким образом, в первом приближении поле в полутени не зависит от того, является ли препятствие гладким или представляет собой плоский экран. Несколько меньшими по величине (они содержат множителем $k^{-1/6}$, $k \rightarrow \infty$) называются два интеграла, содержащие отношение функций Эйри, названных В. А. Фоком фоном [5]. Эти интегралы, часто называемые фокоскими, являются характерными для гладкого препятствия. Они несут информацию о кривизне границы и краевых условиях, задаваемых на ней.

Существенное значение на первом этапе имеет решение задачи о двукратной дифракции. Ее специфической особенностью по сравнению с вышеописанной является то, что падающее поле содержит интеграл Френеля, который уже нельзя считать медленно меняющейся функцией. Что касается фона, то он дополнительных трудностей не вносит. Решение задачи о двукратной дифракции, потребовавшей громоздких вычислений, изложено в [8]. Здесь мы укажем лишь на основные моменты построения решения. Техника решения базируется на методе склеивания локальных

асимптотик, используемого в [6]. Вначале дифракционное поле строится в зоне Фока, возникающей в окрестности вершины холма границы — точка 0 на рис. 1. Пусть s — длина дуги границы, отсчитываемая от точки 0, n — длина нормали ($n > 0$ над S). Область Фока определяется условиями $sk^{1/3} = O(1)$ и $nk^{2/3} = O(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Обозначим через ρ радиус кривизны S в точке 0 и введем безразмерные координаты $\sigma = sk^{1/3}(2\rho^2)^{-1/3}$ и $\nu = nk^{2/3}(\frac{1}{2}\rho)^{-1/3}$. Поле в зоне Фока отыскивается в виде асимптотического ряда

$$u = \exp[iks] \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(\sigma, \nu) k^{-j/6}. \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнение Гельмгольца, получаем две независимые между собой рекуррентные последовательности уравнений для u_j с четными и нечетными номерами следующего вида:

$$L_0 u_0 = 0; L_0 u_2 + L_1 u_0 = 0; \dots \quad (2.2)$$

В (2.2) L_k ($k = 0, 1, \dots$) суть дифференциальные операторы в частных производных; например,

$$L_0 u = \left(i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \right) u.$$

Уравнение (2.2) надлежит решать в полуплоскости $\nu \geq 0$, $-\infty < \tau < +\infty$ при определенном краевом условии на границе $\nu = 0$ и некотором условии излучения при $\nu \rightarrow +\infty$. Эти задачи решаются явно и позволяют однозначно определить шаг за шагом функции u_j . Возникающие формулы для u_j в существенном такие же, как и при падении плоской волны или волны, описываемой лучевым разложением, на выпуклое тело (ср. [5, 6] и [8]).

Далее строится поле у полутени, т.е. в окрестности оси x за соответствующим холмом границы. Используются координаты τ , α , соответствующие лучам соскальзывания: α характеризует точку на границе, а τ — точку на луче, касающемся границы в точке α [6]. Для точек на границе имеем $\tau = \alpha$ и $\tau = \alpha = 0$ в точке 0 на вершине холма. Мы рассматриваем окрестность полутени, определяемую условием $\alpha k^{1/2} = O(1)$ при $k \rightarrow \infty$, а τ остается ограниченным и $\tau > 0$. Полагая $\gamma = \alpha k^{1/2}(2\rho)^{-1/2}$, волновое поле в полутени отыскивается в виде следующего асимптотического ряда:

$$u = \exp[ik\tau] \sum_{j=0}^{\infty} W_j(\tau, \gamma) k^{-j/2}. \quad (2.3)$$

Для нахождения коэффициентов W_j возникает рекуррентная последовательность уравнений

$$N_0 W_0 = 0; N_0 W_1 + N_1 W_0 = 0; \dots, \quad (2.4)$$

в которой N_j ($j = 0, 1, \dots$) суть дифференциальные операторы по τ , γ . В частности,

$$N_0 W = \left(2i\tau^3 \frac{\partial}{\partial \tau} + i\tau^2 + \frac{1}{2} \tau \rho \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) W.$$

Уравнение (2.4) надлежит решать в полуплоскости $\tau > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$ при некоторых условиях на поведение решения, когда $\gamma \rightarrow \pm \infty$. В отличие от зоны Фока эти условия не определяют функции W_j единственным образом. Для их однозначного нахождения требуется склеить в некоторой промежуточной области решения уравнений (2.2) в зоне Фока с решениями (2.4). Эта область определяется тем, что координаты τ , ν внутреннего разложения считаются большими ($\tau, \nu \rightarrow +\infty$), а координаты τ , γ внешнего разложения малыми ($\tau \ll 1$, $|\alpha| \ll 1$, причем $|\alpha| \ll \tau$). Сама процедура склеивания оказывается довольно громоздкой [8] и позволяет однозначно определить $W_j(\tau, \gamma)$, тем самым построить двукратно дифрагированное поле в полутени. Оно, очевидно, является падающим полем для задачи о трехкратной дифракции на следующем холме границы. Главный член полутенёвого поля описывает дифракцию Френеля, но это уже двукратный интеграл следующего вида:

$$W_0(\tau, \gamma) = \frac{\text{const}}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 \exp \left[2\gamma_c \sqrt{\frac{l}{\rho}} e^{-l} \frac{\pi}{4} x_1 - x_l^2 + \right. \\ \left. + 2 x_1 x_2 - \left(1 + \frac{l}{\tau} \right) x_2^2 + 2\gamma \sqrt{\frac{l}{\rho}} e^{-l} \frac{3\pi}{4} x_2 \right], \quad (2.5)$$

в котором параметр γ_c связан с углом скольжения падающей плоской волны (различные постоянные, не зависящие от γ и τ , обозначены const. Следует подчеркнуть, что интеграл (2.5) оказывается точно таким же, как если бы вместо двух холмов границы было два плоских экрана. Это значит, что двукратная дифракция Френеля, так же как и однократная, не зависит от того, является ли граница гладкой или нет. Следующими за главным членом будут слагаемые, образующие фон. Они содержат множитель $k^{-1/6}$, описываются двойными интегралами (2.5), но кроме экспоненты по одной из переменных интегрирования обязательно содержат отношение функций Эйри. Таких членов будет четыре. Их происхождение объясняется просто: френелевская часть однократной дифракции порождает два фона при дифракции на втором холме, каждый из двух фонов однократной дифракции приводит к появлению френелевской дифракции за вторым холмом. В работе [8] описана процедура построения любого числа коэффициентов W'_j в разложении (2.3), однако она требует громоздких вычислений.

Базируясь на технике, разработанной для двукратной дифракции, оказалось возможным получить формулы для n -кратной дифракции при любом целом $n \geq 3$ [8, 9]. Существенным здесь является то обстоя-

дальство, что поле в полутени строится в виде разложения по степеням $k^{-j/2}$, а не $k^{-j/3}$, как в [6]. В результате френелевские и фоновые члены записываются по существу в одинаковой форме — в виде n -кратного интеграла с одной и той же экспонентой под знаком интеграла. Так, n -кратная дифракция Френеля $W_0^{(n)}(\tau, \gamma)$ описывается следующим интегралом:

$$W_0^{(n)}(\tau, \gamma) = \frac{\text{const}}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{-\infty}^0 dx_2 \dots \int_{-\infty}^0 dx_n \exp \left[2\gamma_c \sqrt{\frac{l}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{4}} x_1 - \sum_{m=1}^{n-1} (x_m - x_{m+1})^2 - x_n^2 \frac{l}{\tau} + 2\gamma \sqrt{\frac{l}{\rho}} e^{i\frac{3\pi}{4}} x_n \right]. \quad (2.6)$$

Фоновые члены, как и раньше, по одной из переменных интегрирования содержат отношение функций Эйри и имеют порядок $k^{-1/6}$ вблизи предельного луча. Число их, очевидно, $2n$.

Следующий этап — представление решения в виде бесконечного ряда многократно дифрагированных полей и его суммирование изложен в [9]. Укажем на основные моменты этой процедуры.

Пусть точка наблюдения M находится в окрестности полутени (рис. 1). Полное поле $U(M)$ в M возникает за счет дифракции плоской волны на предыдущих холмах границы. Влияние последующих холмов пренебрежимо мало в рассматриваемом коротковолновом приближении. Падая на первый холм границы, плоская волна порождает однократно дифрагированное поле $U^{(1)}(M)$, которое определяется областью Фока около точки C_1 (рис. 1). Подчеркнем, что $U^{(1)}$ не содержит падающую плоскую волну. Далее, в результате дифракции плоской волны на втором холме возникает однократно дифрагированное поле, порождаемое зоной Фока около точки C_2 . Это поле падает затем на первый холм и, дифрагируя на нем, порождает в точке M двукратно дифрагированное поле $U^{(2)}(M)$. Нужно отметить, что $U^{(2)}$ означает полное поле, т.е. сумму падающего и чисто дифрагированного, в отличие от $U^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получаем, что полное поле $U(M)$ представляется в виде следующего ряда:

$$U(M) = U_{\text{пад}}(M) + U^{(1)}(M) + \sum_{n=2}^{\infty} U^{(n)}(M), \quad (2.7)$$

где $U^{(n)}(M)$ означает n -кратно дифрагированное поле (полное) в точке M .

Следует подчеркнуть, что именно бесконечная сумма в (2.7) удовлетворяет условию Флоке. Тот факт, что (2.7) удовлетворяет (приблизленно) уравнению Гельмгольца и краевым условиям, следует из построения $U^{(n)}$.

Для того чтобы получить окончательное асимптотическое разложение для решения $U(M)$ рассматриваемой задачи, нужно перестроить ряд (2.7), собирая вместе члены одного и того же порядка. В результате возникает разложение по степеням $k^{-1/6}$.

$$U(M) = U_{\text{пад}}(M) + \sum_{j=0}^{\infty} V_j(M) k^{-j/6}, \quad (2.8)$$

в котором $V_j(M)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) суть бесконечные ряды, члены которых состоят из кратных интегралов. В частности, $V_0(M)$ есть ряд по n из n -кратных интегралов вида (2.6). Оказалось, что возникающие ряды могут быть просуммированы с помощью следующего интегрального уравнения типа Винера—Хопфа—Фока:

$$\varphi(y) = \varphi_0(y) + \frac{\Omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp[-(y-x)^2] \varphi(x) dx, \quad (2.9)$$

в котором $\varphi_0(y)$ — некоторая известная функция, $\Omega = \exp[ikl(1 - \cos \chi)]$ является спектральным параметром. Дело в том, что выражения для V_j в (2.8) включают в себя ряды Неймана для уравнения (2.9) с некоторой функцией $\varphi_0(y)$. Так, можно видеть непосредственно в (2.6), что выражение $W_0^{(n)}(\tau, \gamma)$ содержит итерированное ядро уравнения (2.9). С другой стороны, известно [5], что решение (2.9) для широкого класса неоднородных членов $\varphi_0(y)$ может быть получено в явном виде методом Винера—Хопфа. Это обстоятельство позволяет получать вместо бесконечных рядов для V_j замкнутые формулы, содержащие интегралы типа Коши. В [9] такое суммирование осуществлено для V_0 и V_1 как в окрестности предельного луча, так и в зоне Фока при условии, что $\Omega \neq 1$, т.е. когда не возникают аномалии Вуда. Суммированию многократно дифрагированных полей в случае возникновения аномалий Вуда посвящена работа [10]. С помощью указанной выше процедуры суммирования МДП в работе [11] было построено асимптотическое разложение для коэффициентов возбуждения R_n дифракционных волн. Приведем ниже формулы для двух членов асимптотики R_n , на основании которых исследовались физические свойства рассеянного поля в данной задаче.

Предположим, что угол φ_n с осью x , под которым убегают от границы дифракционные плоские волны (см. (1.)), удовлетворяет условию $0 < \varphi_n \leq C_1 k^{-1/3}$, где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная и $k \rightarrow \infty$. Это означает, что соответствующие волны распространяются под малыми углами к границе в области освещенной полутени. Обозначим

$$p = \left(\frac{1}{2} k \rho \right)^{1/6},$$

тогда асимптотика при $p \rightarrow \infty$ амплитуд R_n этих волн имеет вид

$$R_n = R_n^{(0)} + R_n^{(1)} p^{-1} + O(p^{-2}). \quad (2.10)$$

Главный член $R_n^{(0)}$ описывается следующей формулой:

$$R_n^{(0)} = \frac{\exp \left[U(\varphi_n \sqrt{kl}, q) + U(\chi \sqrt{kl}, q) - i \Delta_n \right]}{ikl \varphi_n (\varphi_n + \chi)}, \quad (2.11)$$

в которой $q = kl(-\cos\chi)/2\pi$; $\Delta = k\rho(\varphi_n^3 + \chi^3)/6$, а через $U(s, q)$ обозначена функция Вайнштейна

$$U(s, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - \exp[2\pi i q - t^{2/2}])}{t - s \exp[i\pi/4]} dt, \quad (2.12)$$

возникшая в задаче дифракции на открытом конце волновода [4]. Напомним, что χ в (2.11) есть угол скольжения падающей плоской волны. Выражение для $R_n^{(1)}$ оказывается более сложным. Обозначим

$$\psi_n = \varphi_n \left(\frac{1}{2} k\rho \right)^{1/3} \quad \text{и} \quad \psi_c = \chi \left(\frac{1}{2} k\rho \right)^{1/3},$$

тогда

$$R_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2\pi\rho}{l}} \frac{\exp[i\pi/4 - i\Delta_n]}{\varphi_n \sqrt{kl}} \left\{ E(\psi_n, \psi_c) + E(0, \psi_c) \left(\exp[U(\varphi_n \sqrt{kl}, q)] - 1 \right) \right\}, \quad (2.13)$$

где дополнительно обозначено

$$E(\psi_n, \psi_c) = \Phi(\psi_n + \psi_c) + \phi(\psi_n) (\exp[U(\chi \sqrt{kl}, q)] - 1), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \phi(\psi) = & \frac{\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right]}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\psi z]}{\exp[i2\pi/3]} \frac{w_2(z)}{w_1(z)} dz + \\ & + \frac{\exp\left[-i\frac{5\pi}{4}\right]}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp[-i\psi z] \frac{v(z)}{w_1(z)} dz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Функция $\phi(\psi)$ в (2.15) представляет собой фоновое слагаемое, возникающее в задаче дифракции на гладком выпуклом контуре [5]. Через $w_1(z)$, $w_2(z)$ и $v(z)$ в формуле для $\phi(\psi)$ обозначены функции Эйри в определении Фока [5].

Пусть далее углы φ_n , под которыми убегают от границы рассеянные плоские волны, удовлетворяют условию $c_1 k^{-1/3} \leq \varphi_n \leq c_2 k^{-1/6}$, где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые постоянные. В этом случае асимптотику амплитуд R_n этих волн можно получить методом геометрикооптического отражения полутеневых МПД от дуги границы, примыкающей к зоне Фока слева. На формирование таких дифракционных волн зона Фока вблизи вершины холма границы влияние не оказывает [8, 11]. Асимптотическое разложение для R_n в этом случае может быть представлено по степеням того же параметра p , что и в (2.10). При этом главный член асимптотики, который в отличие от (2.10) мы обозначим $T_n^{(0)}$ имеет вид

$$T_n^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2l}} \frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} - i\Delta_n\right]}{\varphi_n \sqrt{kl}} \left\{ -\sqrt{\varphi_n + \chi} \exp\left[ik\rho \frac{(\varphi_n + \chi)^3}{24}\right] + \sqrt{\varphi_n} \times \right. \\ \times \exp\left[ik\rho \frac{\varphi_n^3}{24} + \frac{(z_n - z_c)^2}{4} + U(\chi \sqrt{kl}, q)\right] \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \\ \left. \frac{\exp\left[-\frac{(z - z_n)^2}{4}\right] K_+^{-1}(z)}{z - z_c} dz \right\}, \quad (2.16)$$

где

$$z_n = \varphi_n^2 \frac{\rho}{4} \sqrt{\frac{k}{2l}} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right], \quad z_c = \chi \sqrt{2kl} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right],$$

ε — некоторое положительное число, а функция $K_+(z)$ определяется формулой

$$K_+(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - \exp[2\pi i q - t^{2/2}])}{t - z} dt\right]. \quad (2.17)$$

Поправочный член $T_n^{(1)}$, аналогичный $R_n^{(1)}$ в (2.10), имеет следующий вид:

$$T_n^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi\varphi_n}{2}} \frac{\rho}{l} \frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} - i\Delta_n\right]}{\varphi_n \sqrt{kl}} \left\{ E(\omega_n, \psi_c) + \right. \\ \left. + E(0, \psi_c) \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \exp\left[-\frac{(z - z_n)^2}{4}\right] K_+^{-1}(z) dz - 1 \right] \right\}, \quad (2.18)$$

котором

$$\omega_n = -\varphi_n^2 \frac{\rho}{8l} \left(\frac{1}{2} k\rho \right)^{1/3} \quad \text{и} \quad \psi_c = \chi \left(\frac{1}{2} k\rho \right)^{1/3}.$$

Можно показать, что при $\varphi_n = ck^{-1/3+\delta}$ ($0 < \delta < \frac{1}{12}$, $c = \text{const} > 0$, $k \rightarrow \infty$) формулы (2.11)–(2.15) и (2.16)–(2.18) склеиваются друг с другом.

2. Анализ формул для амплитуд дифракционных волн

Отметим прежде всего следующее обстоятельство. В работе [12] рассматривалась задача дифракции плоской волны на периодической структуре из наклонных полуплоскостей. Из построенного точного решения получена коротковолновая асимптотика амплитуд дифрагированных плоских волн в том случае, когда угол скольжения падающей волны мал. Оказалось, что главный член $R_n^{(0)}$ в (2.10), (2.11) совпадает с главным членом асимптотики амплитуд дифракционных волн для решетки из наклонных полуплоскостей. Это означает, что в первом приближении рассматриваемая нами гладкая дифракционная решетка ведет себя так же, как и негладкая для скользких углов падения и наблюдения.

Действительно, как следует из (2.11), выражение для $R_n^{(0)}$ при $\chi k^{1/2} = O(1)$ и $\varphi_n k^{1/2} = O(1)$, если $k \rightarrow \infty$, т. е. когда величиной Δ_n можно пренебречь, не зависит от радиуса кривизны ρ в вершине холма границы. Оно также не зависит от конкретного вида краевых условий, задаваемых на границе. Этот факт следует считать естественным, поскольку $R_n^{(0)}$ возникает при суммировании френелевской части МПД, которая этими свойствами обладает (см. раздел 1). Следует однако подчеркнуть, что такого совпадения нет для периодической структуры из вертикальных полуплоскостей [4]. Это объясняется тем, что схема возникновения МПД в последнем случае существенно более сложная, чем для наклонных полуплоскостей: здесь возникает рассеяние не только вперед, но и назад, и они перепутываются между собой.

Следующий член $R_n^{(1)}$ в (2.10) уже зависит от радиуса кривизны ρ границы и краевых условий на ней. За счет множителя

$$p^{-1} = \left(\frac{1}{2} k\rho \right)^{1/6}$$

он меньше главного члена $R_n^{(0)}$, однако даже при больших $k\rho$ он дает заметный вклад за счет малой степени $1/6$.

Влияние поправочного члена $R_n^{(1)}$ на модуль амплитуд дифракционных волн в диапазоне изменения параметров k , l , ρ , характерных для радиолокации вблизи морской поверхности, показано на рис. 2. Амплитуды дифракционных волн рассчитывались по формулам (2.10)–(2.15) при $kl = 4000$ и $k\rho = 1000$ для различных значений параметра

$$q = \frac{k}{2\pi} (1 - \cos \chi) \approx \frac{kl\chi^2}{4\pi},$$

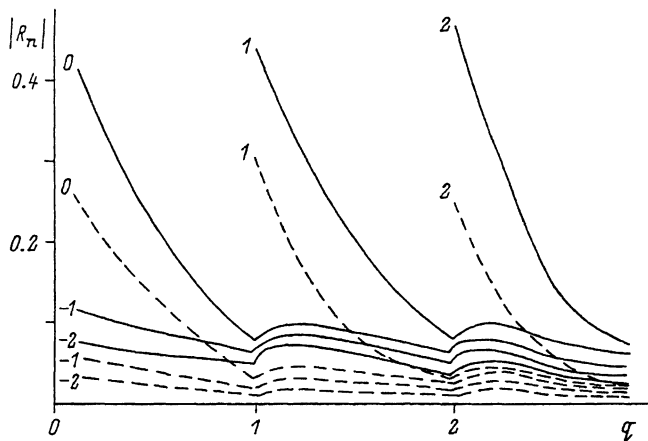


Рис. 2

т.е. при различных углах скольжения χ падающей плоской волны. Сплошными линиями представлены зависимости $|R_n|$ от q для значений n от 2 до -2 , полученные с учетом двух членов $R_n^{(0)}$ и $R_n^{(1)}$ в (2.10). Штриховые линии получены лишь с учетом главного члена $R_n^{(0)}$. Абсолютная погрешность, возникающая при отбрасывании фоновых членов, доходит до 50%. Не исключено, что в рассматриваемом диапазоне изменения параметров задачи следовало бы учесть и третий член в асимптотике (2.10). Отметим, что изломы на кривых рис. 2 в целых точках $q = 1, 2$ соответствуют аномалиям Вуда. При целых значениях параметра q рождаются новые плоские волны, убегающие от границы. Влияние фона на волновое поле вблизи границы между холмами рассматривалось в нашей работе [13].

Как уже отмечалось в разделе 1, формулы (2.11)–(2.15) справедливы для малых дифракционных углов φ_n . С увеличением φ_n они переходят в формулы (2.16)–(2.18). Результаты расчетов модулей амплитуд дифракционных волн для $kl = 4000$, $k\rho = 1000$ и $q = 2.5$ по этим формулам, приведенные в таблице, демонстрируют этот процесс перехода „полутеневых“ формул (2.11)–(2.15) в „геометрооптические“ (2.16)–(2.18).

В этой таблице R_n и T_n означают амплитуды дифракционных волн, вычисленные по формулам (2.11)–(2.15) и (2.16)–(2.18) соответст-

n	$ R_n \cdot 10^2$	$ T_n \cdot 10^2$	n	$ R_n \cdot 10^2$	$ T_n \cdot 10^2$
-1	5.24	4.49	-9	3.10	3.02
-2	4.65	4.11	-10	3.00	2.95
-3	4.24	3.84	-11	2.91	2.88
-7	3.35	3.21	-12	2.83	2.81
-8	3.22	3.11	-13	2.76	2.76

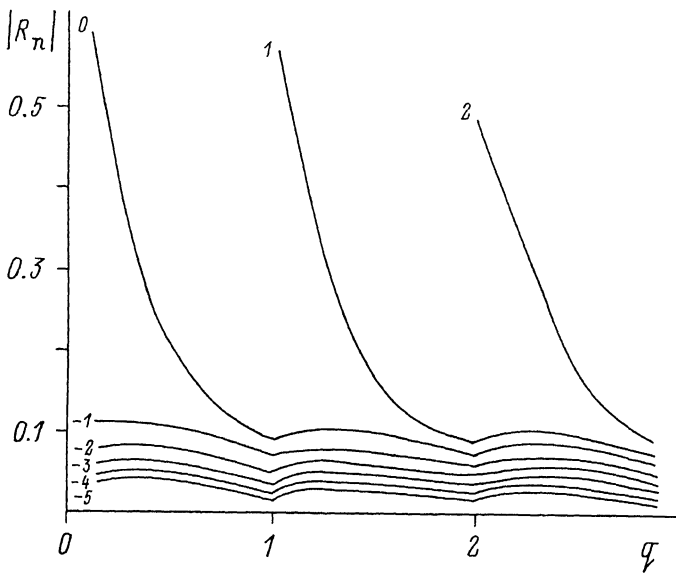


Рис. 3

венно. Можно видеть, что удовлетворительное совпадение между ними наблюдается уже при $n = -7, -8$ и сохраняется до $n = -12, -13$.

На рис. 3 приведена зависимость модулей амплитуд дифракционных волн от параметра q , рассчитанных при $kl = 2000$ и $kr = 500$. Для всех $n < -5$ модули R_n становятся малыми и они не показаны на этом рисунке. Рис. 3 позволяет сделать следующий вывод о поведении амплитуд R_n в зависимости от n при фиксированном q , а значит, фиксированном угле скольжения χ . Оказывается, что основная энергия рассеянного поля концентрируется вблизи периодической границы, так как $|R_n|$ растут с уменьшением дифракционного угла φ_n . С увеличением φ_n они монотонно убывают. Приведенные в разделе 1 формулы позволяют рассчитывать амплитуды всех дифракционных волн. Дело здесь в том, что для больших по модулю и отрицательных n на формирование соответствующих дифракционных плоских волн существенное влияние оказывают те участки границы, которые уже попадают в глубокую тень. Поэтому и амплитуды этих волн будут малые. Этот факт находит свое отражение в монотонном убывании $|R_n|$ с убыванием n , рассчитанных по „геометрооптическим“ формулам (2.16) — (2.18).

Здесь уместно указать на отличие гладкой решетки, рассматриваемой нами, от периодической структуры из вертикальных полуплоскостей [4]. Расчет по формулам из [4] для коротких волн и скользящего падения показывает наличие сильного рассеяния назад, т.е. для достаточно больших по модулю и отрицательных n модули R_n снова возрастают практически до таких же значений, что и при малых φ_n . В случае же гладкой решетки такого не происходит и вся энергия рассеивается только вперед.

Приведенные в разделе 1 основные формулы относятся к тому случаю, когда волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца и на границе выполняются условия Дирихле. Однако формулы легко обобщаются на случай краевых условий Неймана или импедансного. Не вызывает сомнений возможность обобщения излагаемой теории на волновые процессы, описываемые уравнениями Максвелла в трехмерном случае.

Остановимся подробнее на том, для каких решеток применима эта теория. Как видно из изложенного, в коротковолновом приближении и скользющем падении плоской волны дифракционное поле формируется за счет многократных дифракций на вершинах холмов границы. Остальная часть границы оказывается в глубокой тени и ее свойства не сказываются на рассеянном поле. Поэтому затененную часть границы S можно деформировать как угодно. В частности, вместо синусоидальной границы (рис. 1) можно рассматривать периодическую структуру из изолированных тел, которые между собой могут и не соприкасаться. В этом случае можно утверждать, что коэффициенты возбуждения прошедших плоских волн будут пренебрежимо малы (экспоненциально малы) для коротких волн и скользющего падения. Но существенным для наших построений остается гладкость границы в окрестности вершин холмов, т.е. тех участков границы, которые формируют рассеянное поле.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Topics in Current Physics/ Electromagnetic Theory of Gratings / Ed. R.Petit. Vol. 2. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
- [2] Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки. Киев: Наукова думка, 1986. 231 с.
- [3] Вайнштейн Л.А., Суков А.И. // РиЭ. 1984. Т. 29. № 8. С. 1472.
- [4] Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.
- [5] Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
- [6] Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л., 1974. 125 с.
- [7] Буслаев В.С. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 1. С. 149—235.
- [8] Залипаев В.В., Попов М.М. // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1987. Т. 165. С. 59—90.
- [9] Залипаев В.В., Попов М.М. // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1988. Т. 173. С. 60—86.
- [10] Залипаев В.В., Попов М.М. // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1990. Т. 186. С. 87—100.
- [11] Залипаев В.В. // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1990. Т. 186. С. 71—86.
- [12] Залипаев В.В. // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1989. Т. 179. С. 58—66.

[13] *Залипаев В.В., Попов М.М.* // Записки науч. семинара ЛОМИ. 1989.
Т. 179. С. 67—72.

Математический институт им. В. А. Стеклова
С.-Петербургское отделение

Поступило в Редакцию
4 июня 1991 г.
В окончательной редакции
16 октября 1991 г.
