

01:05

© 1992 г.

## ФРАКТАЛЬНЫЙ РАСПАД УПРУГИХ ПОЛЕЙ ПРИ РАЗРУШЕНИИ

А. Б. Мосолов

Предложена фрактальная модель распада упругих полей при распространении трещин, основанная на представлении об иерархическом строении разрушенной зоны и самоподобии процессов множественного разрушения. На основе этой модели исследован вопрос об асимптотиках упругих полей в вершине трещины в гранулярной среде. Рассматривается каскад разломов и трещин в очаге разрушения как фрактальный кластер, описан процесс излучения энергии из очага землетрясения. Получена скейлинговая связь между сейсмической энергией и характерным размером очага землетрясения, обобщающая известную формулу М. А. Садовского. Описано динамическое поведение трещины с учетом фрактального характера распада упругих полей в ее вершине.

## Введение

Хорошо известно, что процессы разрушения часто протекают автомодельно (по крайней мере в некотором диапазоне управляющих параметров), а образующиеся при разрушении структуры — поверхности трещин и разломов, сетки трещин, системы полос сдвига и т. д. характеризуются свойством самоподобия при масштабном скейлинге. В последнее время установлен также фрактальный характер многих процессов и структур в разрушении, что позволяет использовать для их описания мощные методы фрактальной геометрии и ренормгрупповой техники [1–3].

Наиболее характерным фрактальными объектами, возникающими при разрушении материалов являются, например, кластеры микротрещин при множественном разрушении [4, 5], ветвящиеся трещины в стеклообразных материалах и горных породах [6, 7], поверхность одиночных трещин в металлах [8–10], каскады обломков, образовавшихся при взрыве или ударном разрушении.

Образование фрактальных структур особенно часто наблюдается при разрушении преднапряженных материалов (закаленных сталей, стекла, льда, горных пород) и для процессов множественного разрушения, когда акту образования глобального разлома (магистральной трещины) предшествует достаточно долгий подготовительный этап накопления по-

вреджений, сопровождающийся ростом самоподобного кластера дефектов [3, 5].

Учет фрактальной структуры трещин может приводить к заметным изменениям в описании процесса разрушения. Так, в работе [11] показано, что поле напряжений в вершине фрактального разреза (двумерной фрактальной трещины) в линейно упругом теле имеет особенность вида  $r^{-\alpha}$ ,  $\alpha = (2-D)/2$ , где  $r$  — расстояние от вершины трещины,  $D$  — ее фрактальная размерность. Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае характеризуется аномальной скейлинговой зависимостью от макроразмера разреза  $l$ :  $K \sim \sigma l^\alpha$ .

1. В случае множественного разрушения фракталом естественно считать каскад трещин в очаге разрушения. Рассмотрим более подробно модель фрактальной структуры разломов в очаге множественного разрушения на очень важном примере очага землетрясения [12].

В работе [13], вероятно, впервые было высказано предположение о том, что сейсмическая энергия, выделяющаяся при землетрясении, пропорциональна объему очага  $V$ . Это предположение было проведено и уточнено в работах [14, 15], где показано, что в первом приближении связь между энергией и объемом очага имеет вид

$$\lg \mathcal{E} = \lg V + 3, \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{E}$  — сейсмическая энергия, измеряемая в эрг;  $V$  — объем очага, измеряемый в  $\text{см}^3$ .

Кажущаяся несогласованность размерностей в формуле (1.1) не должна вводить в заблуждение, поскольку фактически вместо  $\mathcal{E}$  и  $V$  нужно использовать безмерные величины  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ ,  $\bar{V} = V/V_0$ , где  $\mathcal{E}_0 = 10^{-5}$  Дж,  $V_0 = 10^{-6}$  м<sup>3</sup>.

Соотношение (1.1) фактически основано на неявном предположении о том, что все элементы объема очага землетрясения равноправны, одинаково разрушены и излучают равную энергию, т.е. подразумевается, что внутренней структуры у очага землетрясения нет. Вместе с тем известно, что разрушенная геологическая среда характеризуется достаточно четкой дискретной иерархической структурой [15]. Под этим обычно понимается, что размеры фрагментов разрушенной структуры  $L_n$  связаны соотношением

$$L_n / L_{n+1} \approx k_n. \quad (1.2)$$

Масштабный коэффициент  $k_n$  обычно меняется в пределах от 2 до 5 со средним значением  $\bar{k} = \langle k_n \rangle \approx 3.5$ . Для полного задания иерархической структуры закон (1.2) необходимо дополнить законом распределения фрагментов  $N_n = N(L_n)$ . Предполагая, что структура разломов в очаге характеризуется фрактальной геометрией (и, значит, самоподобием), примем автомодельный закон распределения фрагментов по размерам

$$N(L_n) = \lambda^{-1} N(L_{n+1}). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) совместно с (1.2) превращается в простейшее ре-  
норм групповое уравнение

$$N(L_n) = \lambda^{-1} N(L_n / \bar{k}),$$

которое приводит к степенному закону распределения фрагментов

$$N(L_n) \sim L_n^{-D}, \quad D = \ln \lambda / \ln \bar{k}.$$

Такой закон распределения фрагментов, образовавшихся при разрушении и растрескивании различных сред, неоднократно обсуждался в литературе в связи с представлениями о подобии и автомодельности процессов множественного разрушения [3, 5]. В рассматриваемом случае показатель  $D$  совпадает с фрактальной размерностью кластера разломов (трещин) в очаге землетрясения.

Будем считать, что каждый элемент фрактального кластера разломов вносит одинаковый вклад в излучение сейсмической энергии, пропорциональный  $\eta(\Delta\sigma)^2/2\rho c^2$ , где  $\Delta\sigma$  — амплитуда изменения напряжений при излучении упругой волны,  $\rho$  — плотность материала,  $c$  — скорость звука,  $\eta$  — величина сейсмического действия. Полная энергия, излученная из очага, очевидно, пропорциональна массе кластера  $M \sim L^D$  ( $L$  — характерный размер очага, поэтому с точностью до размерного

коэффициента, характеризующего детальную геометрию кластера разломов) находим  $E \sim \frac{(\sigma^2)}{2\rho c^2} L^D$ .

Следовательно,

$$\lg E = D \lg L + Q, \quad (1.4)$$

где  $Q$  — коэффициент, зависящий от конкретных характеристик землетрясения (или более обще — очага разрушения).

Соотношение (1.4) переходит в (1.1), если игнорируется внутренняя иерархическая структура очага разрушения. В этом смысле соотношение (1.1) можно рассматривать как первое приближение, поскольку в нем производится „осреднение“ структуры и, следовательно,  $D = 3$ .

Вообще говоря, фрактальная размерность может существенно зависеть от строения очага, физико-химических характеристик материала в очаге разрушения и моды разрушения.

В качестве примера определения  $D$  на рис. 1 построены зависимости  $E$  от длины и ширины очага землетрясения для трех наиболее представительных выборок (относящихся к одному району) из таблицы землетрясений, приведенной в [14]. Хотя среднее значение  $D$  при осреднении по всем районам близко к 3 [14], хорошо видно, что коэффициент  $D$  существенно зависит от района и может заметно отклоняться от 3. Для калифорнийских землетрясений (рис. 1, б) удается построить лишь зависимость  $\lg E$  от  $\lg L$ . Это может объясняться тем, что эти землетрясения связаны в основном с сейсмоактивным разломом Сан-Андреас, и поэтому наиболее подходящей для них моделью будет фрактальная модель пониженной размерности, т.е. модель типа „ветвящейся“ трещины.

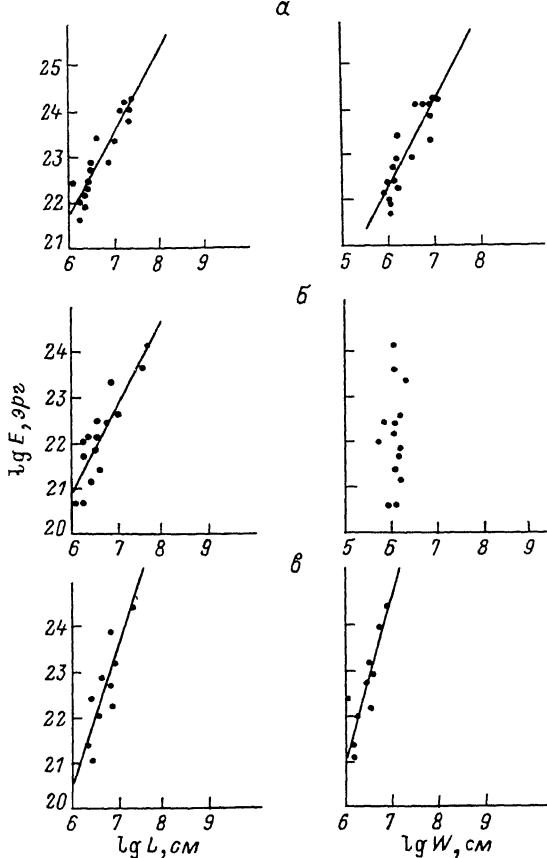


Рис. 1. Зависимость энергии землетрясения от параметров очага.

Длины  $L$  и ширины  $W$  по данным работы [14]; а — японские землетрясения, б — калифорнийские (разлом Сан-Андреас), в — туркменские. Значения фрактальной размерности очага землетрясения  $d_f$ , коэффициенты корреляции  $s$ : а — (1.84, 0.93), (1.88, 0.89); б — (2.01, 0.91); (-, -), в — (3.1, 0.84), (3.39, 0.86).

В случае туркменских землетрясений (рис. 1, в) фрактальная размерность чуть больше 3, что, вероятно, объясняется ограниченностью выборки.

Поскольку фрактальная размерность  $D$  характеризует степень заполнения фракталом объемлющего пространства, то, зная  $D$ , можно высказать предварительные суждения о характере разрушения в очаге. Так, для туркменских землетрясений  $D \approx 3$ , и можно предположить, что очаги разрушения более или менее равномерны. Для японских землетрясений  $D < 2$ , и поэтому должна наблюдаться сильная неоднородность разрушения в очаге и разрушенные зоны должны формировать линейчатые структуры.

Разумеется рассмотренная модель может применяться не только для описания структуры очагов землетрясений, но и во многих других случаях, когда в процессе разрушения материала формируется очаг множе-

ственного разрушения. В частности фрактальная модель очага разрушения может быть применена для описания данных по акустической эмиссии.

2. В рассмотренном выше примере фрактальную структуру имел сам кластер трещин в очаге разрушения. Однако и в том случае, когда трещина или система трещин не является фрактальным множеством (например, трещина представляет собой просто классический разрез), при разрушении могут возникать структуры, характеризующиеся фрактальными свойствами.

Вспомним, что многие реальные материалы имеют четко выраженное зернистое строение. Зерна могут отличаться размерами, формой, ориентацией; отдельно взятое зерно зачастую обладает заметной анизотропией. На макромасштабе, конечно, все неоднородности микроструктуры обычно сглаживаются, и для описания поведения материалов можно пользоваться приближением однородной сплошной среды.

Совсем иначе обстоят дела на микро- и мезомасштабах. На таком уровне рассмотрения уже нельзя игнорировать неоднородность реальной гранулярной структуры материала. Неоднородность структуры приводит, в частности, к неоднородному распределению напряжений на мезомасштабе, даже если макронапряженное состояние однородно. Одни зерна оказываются недогруженными, в то время как другие перегруженными. В результате поле напряжений формирует „ветвистые“ или „ячеистые“ структуры областей с различным уровнем напряжений. Не лишне заметить, что на мезомасштабе  $l$ ,  $\epsilon \ll l \ll L$  в рассматриваемой среде отсутствует характерный масштаб (ведь макронапряженное состояние однородно), поэтому возникающие на мезомасштабе структуры с большой вероятностью будут самоподобны, в частности, самоподобным можно считать и распределение напряжений. Результаты экспериментальных исследований [16, 17] и данные модельных расчетов [18] вполне подтверждают сказанное и показывают, что формирующиеся в гранулярной среде „ветвистые“ структуры перенапряженных областей весьма напоминают фрактальные кластеры микротрещин.

Представим теперь, что в нагруженной гранулярной (на мезомасштабе) среде распространяется трещина (или разрез), пусть даже с гладкими, не фрактальными берегами. При продвижении трещины зерна, примыкающие к ее поверхности, будут разгружаться. Этот процесс разгрузки, начавшись на поверхности трещины, будет распространяться в толщу материала: разгруженные зерна „потянут“ за собой соседей, те — своих соседей, и т.д. Однако процесс разгрузки вовсе необязательно охватывает все зерна. Учитывая неоднородность гранулярной структуры материала, будем считать, аналогично тому, как это сделано в работе [19], что процесс разгрузки будет охватывать лишь некоторые выделенные цепочки перенапряженных зерен, как это показано на рис. 2. В остальных зернах, конечно же, тоже будет происходить перераспределение напряжений, но этим в первом приближении пренебрежем.

Основываясь на результатах работ [16—19], предположим, что разгруженные зерна образуют фрактальное множество размерности  $D$ . Вопрос о вычислении величины  $D$  является весьма сложным и требует отдельного рассмотрения. В данной работе ограничимся лишь обсуждением следствий сделанного предположения.

Для простоты и наглядности будем сначала интересоваться квазистатическим развитием одиночной, не фрактальной трещины — разреза в двумерной геометрии (рис. 2).

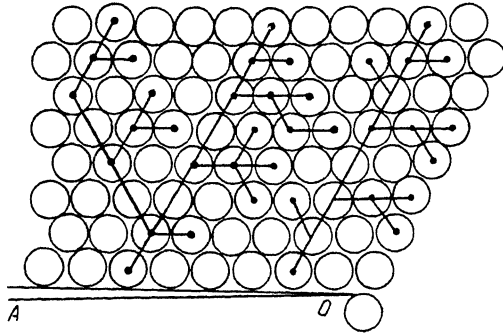


Рис. 2. Схема распада упругих полей в окрестности вершины трещины АО.

Перенапряженные зерна материала, в которых происходит при продвижении трещины наиболее заметное изменение интенсивности упругих полей — разгрузка, образуют „ветвящиеся“ фрактальные структуры, показанные сплошными линиями, соединяющими центры перенапряженных зерен.

Пусть характерный размер трещин  $L$ , размер разгруженной структуры  $R$ , а характерный размер зерна  $\varepsilon$ . Будем считать, что  $R \sim L$ . При продвижении трещины на расстояние  $\Delta L$  поверхностная энергия увеличивается на величину

$$\Delta\Pi \sim 2\gamma\varepsilon\left(\frac{\Delta L}{\varepsilon}\right),$$

где  $\gamma$  — плотность поверхностной энергии.

При продвижении трещины происходят разгрузка зерен, примыкающих к ее поверхности, и, как следствие, „прирост“ всей фрактальной структуры разгруженных зерен. Будем считать, что при разгрузке одного зерна высвобождается энергия

$$u \sim \frac{(\Delta\sigma)^2}{2E} \varepsilon^2,$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\Delta\sigma$  — характерная величина изменения напряжения в зерне, считаем, что  $\Delta\sigma \sim \sigma$ .

Приращение высвобожденной упругой энергии  $\Delta V$  при продвижении трещины, очевидно, пропорционально приращению „массы“ разгруженной фрактальной структуры при увеличении ее характерного размера на  $\Delta R$ , т. е.

$$\Delta V \sim u \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^{D-1} \Delta R.$$

Сравнивая  $\Delta V$  и  $\Delta\Pi$  и учитывая, что  $\Delta L \sim \Delta R$ , находим

$$(\Delta\sigma)^2 \varepsilon (R/\varepsilon)^{d-1} \sim 4\gamma E. \quad (2.1)$$

Считая, как обычно, что левая часть соотношения (2.1) пропорциональна квадрату интенсивности напряжений в вершине трещины получаем, что, несмотря на то, что рассматриваемая трещина имеет гладкие берега, интенсивность напряжений описывается фрактальным законом [11]

$$K \sim \sigma \sqrt{R} \left( \frac{R}{\varepsilon} \right)^{\frac{D-2}{2}}. \quad (2.2)$$

Зависимость (2.2), кроме всего прочего, означает, что на мезомасштабе в окрестности вершины трещины сингулярное поведение поля напряжений описывается следующей степенной зависимостью:

$$\sigma_{ij} \sim Kr^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{D-1}{2},$$

где  $r$  — расстояние от кончика трещины.

Раскрытие трещины описывается степенной зависимостью

$$u_i \sim \frac{K}{E} r^{1-\alpha}. \quad (2.3)$$

3. В приведенных выше рассуждениях не учитывалась роль кинетической энергии, поскольку процесс распространения трещины считался квазистатическим. Интересуясь кинетикой развития трещины, нужно учитывать при разрушении влияние скорости движения носика трещины.

Запишем закон сохранения энергии в процессе разрушения в виде

$$T = \int_{L_c}^L (G - G_c) dl, \quad (3.1)$$

где  $T$  — кинетическая энергия, выделившаяся при продвижении трещины от  $L_c$  к  $L$ ;  $G$  — плотность высвобождающейся упругой энергии;  $G_c$  — сопротивление разрушению;  $L_c$  — равновесная длина трещины при заданных нагрузках.

Известно, что  $G \sim k^2/E$ , будем считать сопротивление разрушению  $G_c$  величиной постоянной и равной  $G(L_c)$ , тогда  $G_c \sim K_c^2/E$ .

Используя (2/2), получим, что

$$G \sim \frac{\sigma^2 L^{D-1}}{E}, \quad G_c \sim \frac{\sigma_c^2 L_c^{D-1}}{E}. \quad (3.2)$$

Формула (2.3) позволяет получить для кинетической энергии зерна выражение

$$e \sim \frac{\rho \dot{u}^2}{2} \sim \frac{\rho}{2} \sigma^2 L^{D-3} r^{3-D} \dot{l}^2.$$

Суммируя вклады всех зерен, получаем

$$T \sim \frac{\rho}{2} \sigma^2 L^2 \dot{l}^2. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.1) при учете (3.2) и (3.3) приводит к зависимости вида

$$\dot{l}^2 = k^2 v_0^2 \left\{ \frac{1}{D} \left[ \left( \frac{L_c}{L} \right)^{2-D} - \left( \frac{L_c}{L} \right)^2 \right] - \left( \frac{L_c}{L} \right) + \left( \frac{L_c}{L} \right)^2 \right\}, \quad (3.4)$$

где  $v_0 \sim \sqrt{E/\rho}$ ,  $k$  — безразмерный коэффициент.

Если  $D = 2$ , то, как легко получить из (3.4),

$$\dot{l} = v_0 \left( 1 - \frac{L_c}{L} \right).$$

Это соотношение вполне согласуется с результатами работ [20, 21]. Для случая фрактального распада упругих полей, когда  $D < 2$ , из (3.4) следует, что  $\dot{l}(L_c) = \dot{l}(\infty) = 0$ .

Функция  $\dot{l} = \dot{l}(L)$  имеет характерный вид, показанный на рис. 3, а. Таким образом, можно заключить, что фрактальная структура упругих полей может приводить к своеобразному эффекту самоторможения трещины.

Замечание 1. Зависимость (3.4) получена в предположении, что в движении участвуют все зерна в окрестности носика трещины. Если напротив считать, что основной вклад в кинетическую энергию дают только разгруженные зерна, то

$$T \sim \frac{\rho \sigma^2}{2} L^D \dot{l}^2.$$

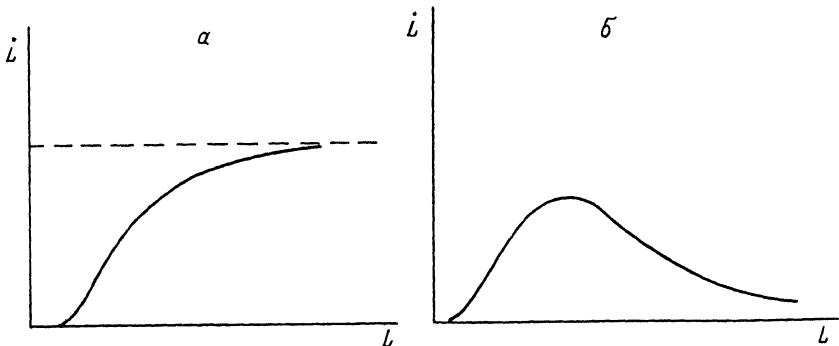


Рис. 3. Качественный вид зависимости скорости роста трещины  $\dot{l}$  от ее длины  $L$  для случая нефрактального (а) и фрактального динамического поведения (б).



$$\dot{L}^2 \approx k^2 v_0^2 \left\{ \frac{1}{D} \left[ 1 - \left( \frac{L_c}{L} \right)^D \right] - \left( \frac{L_c}{L} \right)^{D-1} \left( 1 - \frac{L_c}{L} \right) \right\}. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что теперь торможения нет, длинные трещины распространяются с постоянной скоростью  $\dot{L}(\infty) \approx l v_0$ . Зависимость  $L$  от  $t$ , согласно формуле (3.5), показана на рис. 3, б.

Замечание 2. При рассмотрении динамики трещины учитывалась роль кинетической энергии, но не рассматривались волновые процессы. Следовательно, фактически считалось, что скорость трещины заметно меньше скорости звука.

Автор выражает благодарность Р.В.Гольдштейну и Ф.М.Бородичу за плодотворные обсуждения затронутых в работе вопросов.

### С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Mandelbrot B.B. The fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman and Company, 1982.
- [2] Turcotte D.L. // J. Geophys. Res. 1986. Vol. 91. P. 1921—1926.
- [3] Ботвина Л.Р., Баренблатт Г.И. // Проблемы прочности. 1985. № 12. С. 17—24.
- [4] Takayasu H. // Progr. Theor. Phys. 1985. Vol. 74, N 6. P. 1343—1345
- [5] Мосолов А.Б., Динариев О.Ю. // Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3—7.
- [6] Nolen-Hoeksema R.C., Gordon R.B. // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. // 1987. Vol. 24. N 2. P. 135—144.
- [7] Xie Heping // Int. J. Fracture. 1989. Vol. 41. P. 267—274.
- [8] Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Panilay A.J. // Nature. 1984. Vol. 308. P. 721—722.
- [9] Mecholsky J.J., Mackin T.J. // Mater. Sci. Lett. 1988. Vol. 7. N 11. P. 1145—1147.
- [10] Zhang Shon-Zhy, Lung Chi-wei // J. Phys. D. 1989. Vol. 22. N 6. P. 790—793.
- [11] Мосолов А.Б. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 7. С. 57—60.
- [12] Мосолов А.Б. // Всесоюз. школа-семинар „Физические основы прогнозирования разрушения горных пород“. Иркутск, 1988. С. 108—109.
- [13] Tsuboi C. // J. Phys. Earth. 1956. Vol. 4. N 2. P. 63—69.
- [14] Садовский М.А., Писаренко В.Ф., Штейнберг В.В. // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 598—602.
- [15] Садовский М.А. // ДАН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1087—1088.
- [16] Thornton C., Barnes D.J. // Applied Solid Mechanics-1. / Ed. A.S.Tooth, J.Spence. New York: Elsevier, 1986. P. 191—204.
- [17] Roux S., Stauffer D., Herrmann H.J. // J. Physique. 1987. Vol. 48. N 3. P. 341—345.
- [18] Stauffer D., Herrmann H.J., Roux S. // J. Physique. 1987. Vol. 48. N 3. P. 347—351.
- [19] Финкель В.М. Физика разрушения. М.: Металлургия, 1970. 396 с.
- [20] Броек Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.

[21] Эрдоган Ф. // Разрушение. Т. 2 / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 521—615.

Институт проблем механики  
Москва

Поступило в Редакцию  
19 июля 1991 г.

---