

09; 10

© 1992 г.

АВТОРЕЗОНАНСНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ТЕМ-ВОЛНЕ
В КОАКСИАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕЮ. А. Андреев, В. Я. Давыдовский,
И. Б. Доценко, С. А. Нагоев

Уравнение движения электрона в ТЕМ-волне, распространяющейся в коаксиальном волноводе вдоль постоянного однородного магнитного поля, с помощью интегралов движения сведено к одномерному нелинейному дифференциальному уравнению 2-го порядка. Решение проводилось при условии авторезонанса для точного уравнения численно и аналитически в линейном приближении по амплитуде поля волны. Получены выражения для эволюции энергии и ларморова радиуса частицы в предположении, что последний мал по сравнению со средним радиусом траектории. Найден режим наиболее эффективного взаимодействия частицы и волны.

Авторезонансное взаимодействие заряженных частиц с электромагнитными волнами обнаружено в СССР в начале 60-х годов [1-3]. Этот эффект был использован для ускорения электронов [4] и усиления электромагнитных волн [5-8]. В последнее время в связи с созданием мощных лазеров вновь усилился интерес к этому эффекту [9, 10].

Использование в авторезонансном режиме сильноточных релятивистских электронных пучков (РЭП) и высоких мощностей излучения приводит к существенному отличию фазовой скорости волн от скорости света в вакууме, т. е. к нарушению условий авторезонанса. Для поддержания синхронизма обычно используются статические поля [11, 12]. При этом удобно применять коаксиальные волноводы, в которых могут быть реализованы радиальное электрическое, продольные электрическое и магнитное поля, варьируемые вдоль пространства взаимодействия. Существенным преимуществом коаксиальных волноводов является возможность использования хорошо освоенных трубчатых электронных пучков. Кроме того, симметрия электрического и магнитного полей предопределяет существование интегралов движения, что приводит к упрощению уравнений для заряженных частиц [13]. Необходимо отметить, что взаимодействие электронов с поперечно-неоднородными полями рассматривалось в [14] на примере цилиндрического волновода, по сравнению с которым коаксиальный представляет самостоятельный интерес, так как в нем возможна ТЕМ-волна, распространяющаяся со скоростью c , т. е. возможен точный авторезонанс.

Здесь рассматривается авторезонансное движение электрона в ТЕМ-волне, распространяющейся в коаксиальном волноводе. Задача представляется нетривиальной, поскольку цилиндрическая симметрия приводит к нелинейному уравнению движения. Задача решается приближенно аналитически и путем численного моделирования точного уравнения движения.

ТЕМ-волна, распространяющаяся в коаксиальном волноводе, описывается потенциалами

$$A_z = \varphi = -A_0 \ln(r/r_0) \cos \psi, \quad \psi = \omega(t - z). \quad (1)$$

Используется система единиц, в которой скорость света, заряд и масса покоя электрона приняты равными единице. Параметр r_0 является калибровочным и не влияет на физические результаты. Постоянное однородное магнитное поле B_0 совпадает с осью z цилиндрической системы координат.

В рассматриваемых полях существует продольный интеграл движения [15]

$$Y = \omega\gamma(1 - u_z) \quad (2)$$

и сохраняется обобщенный момент импульса

$$M = \gamma r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} B_0 r^2. \quad (3)$$

Здесь γ и \vec{u} — безразмерные энергия и скорость электрона. Интегралы (2), (3) позволяют свести задачу к одному дифференциальному уравнению

$$Y^2 r r'' = \frac{A_0 Y}{\omega} \cos \psi + \frac{M^2}{r^2} - \frac{1}{4} B_0^2 r^2, \quad (4)$$

штрихи означают дифференцирование по ψ .

При условии резонанса

$$B_0 = Y \quad (5)$$

уравнение (4) сводится к виду

$$X'' - \frac{(X')^2}{2X} = \epsilon \cos \psi + \frac{M^2 Y^2}{2X} - \frac{X}{2},$$

$$X = \frac{(Yr)^2}{2}, \quad \epsilon = \frac{A_0 Y}{\omega}. \quad (6)$$

Результаты численного решения уравнения движения приведены ниже.

Аналитически уравнение (6) будем решать приближенно в предположении

$$A_0 \ll \omega Y r^2, \quad (7)$$

что означает ограничение на r снизу. Фактически для реализации (7) внутренний радиус коаксиального волновода должен быть достаточно велик. Отметим, что условие (7) не является жестким и легко выполняется при $r \sim 1$ см для реально достижимых напряженностей полей сантиметровых и более коротких волн.

Решение (6) в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) имеет вид

$$X_0(\psi) = C_1 - (C_1^2 - M^2 Y^2)^{1/2} \cos(\psi - C_2), \quad (8)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, и описывает равномерное движение частицы по окружности. Линеаризация (6) с учетом (8) приводит к уравнению

$$X_1'' - \frac{a \sin(\psi - C_2) X_1'}{1 - a \cos(\psi - C_2)} + \frac{X_1}{1 - a \cos(\psi - C_2)} = \varepsilon \cos \psi, \quad (9)$$

где X_1 — линейная добавка к нулевому приближению X_0 , $a = (1 - M^2 Y^2 C_1^{-2})^{1/2}$.

Будем полагать далее

$$a \ll 1, \quad (10)$$

что соответствует случаю, когда ларморов радиус траектории электрона много меньше ее среднего радиуса, т.е. B_0 достаточно велико. Для значений поперечного импульса p_{\perp} , близких к единице, условие (10) становится реальным, начиная со значений магнитных полей порядка 10^4 Гс. С учетом (10) вместо (9) получим

$$X_1'' + X_1 = \varepsilon \cos \psi. \quad (11)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$X_1 = \left(C_3 + \frac{\varepsilon \psi}{2} \right) \sin \psi + C_4 \cos \psi. \quad (12)$$

Постоянные C_3 и C_4 найдем из условий

$$X_1(\psi_0) = 0, \quad X_1'(\psi_0) = 0, \quad (13)$$

ψ_0 — начальная фаза волны, которую без ограничения общности, если это специально не оговорено, будем полагать равной нулю.

Тогда решение примет вид

$$R(\psi) = [2C_1 - 2(C_1^2 - M^2 Y^2)^{1/2} \cos(\psi - \alpha_0) + \varepsilon \psi \sin \psi]^{1/2}. \quad (14)$$

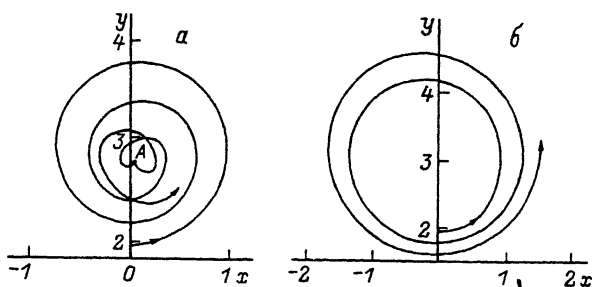


Рис. 1. Траектория частицы для двух значений параметра α_0 .
 $a - \alpha_0 = \pi/2$, $b - \alpha_0 = -\pi/2$.

Здесь $R = Yr$ — безразмерный радиус траектории частицы, $C_1 = P_{\perp}^2(\psi_0) + MY$, $\alpha_0 = \psi_0 - \beta_0$, $p_{\perp}^2(\psi_0) = p_r^2(\psi_0) + p_{\theta}^2(\psi_0)$, $\text{tg}\beta_0 = p_r(\psi_0)R(\psi_0)[p_{\perp}^2(\psi_0) + p_{\theta}(\psi_0)R(\psi_0)]^{-1}$, $\frac{r}{R}$ — импульс частицы. Угол β_0 определяет начальное положение частицы на ларморовой окружности, т.е. α_0 — начальная разность фаз волны и частицы.

Из (14) видно, что в поле волны траектория приобретает вид скручивающейся или раскручивающейся спирали. Это подтверждается результатами численного моделирования точного уравнения (4) с учетом интеграла движения (3), приведенными на рис. 1, на котором траектория электрона показана в прямоугольной системе координат для двух различных значений α_0 .

Энергообмен частицы с волной описывается точным уравнением

$$\gamma' = \frac{E_r}{Y} R', \quad (15)$$

$E_r = \epsilon\omega R^{-1} \cos \psi$ — напряженность электрического поля волны. Интегрирование (15) при условии (7) и (10) дает

$$\gamma(\psi) = \gamma(\psi_0) - \frac{\omega a \epsilon}{8Y} [2\psi \sin \alpha_0 + \cos(2\psi - \alpha_0) - \cos \alpha_0]. \quad (16)$$

Наличие секулярного члена $\psi \sin \alpha_0$ приводит к монотонному изменению энергии. Характер энергообмена частицы с волной определяется начальными условиями. Если $0 < \alpha_0 < \pi$, то энергия частицы монотонно убывает, т.е. возможно усиление волны. Режимы торможения и ускорения частицы разделены значениями начальной фазы $\alpha_0 = 0, \pi$, для которых среднее за период изменение энергии частицы равно нулю.

В предположении, что разность фаз между волной и частицей сохраняется неизменной достаточно долго, столь же долго будет происходить и ускорение частицы, причем набранная частицей энергия в прин-

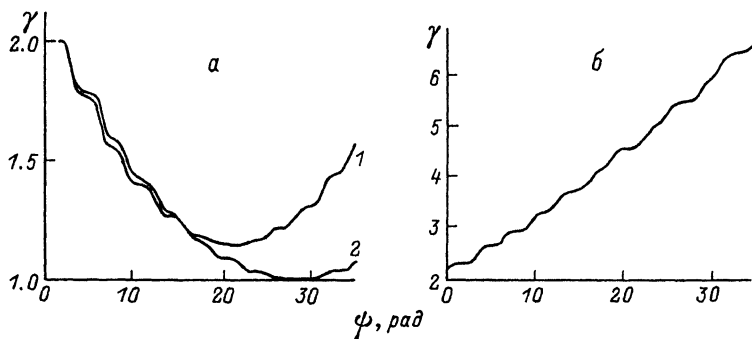


Рис. 2. Зависимость $\gamma(\psi)$ для двух значений параметра α_0 .

ципе ничем не ограничена. Торможение частицы может происходить только до тех пор, пока не обратится в нуль поперечный импульс частицы. Минимальное значение энергии при этом можно определить с помощью продольного интеграла движения (2)

$$\gamma_m = \frac{\omega^2 + Y^2}{2\omega Y}. \quad (17)$$

В случае $\omega = Y$, что возможно, если $\gamma(\psi_0) = 1 + p_z(\psi_0)$, частица отдает волне всю свою кинетическую энергию. В тот момент, когда энергия частицы достигает минимума, радиус ее орбиты имеет вполне определенное значение, которое находится с помощью (3)

$$R_m = (2MY)^{1/2}. \quad (18)$$

После достижения энергии γ_m частица ускоряется, так как она начинает двигаться в поле волны в обратном направлении (точка А на рис. 1, а). Это можно интерпретировать как скачкообразное изменение на π параметра α_0 .

Результаты численного моделирования точных уравнений (4) и (15) для функции $\gamma(\psi)$ показаны на рис. 2. Кривые 1 и 2 на рис. 2, а соответствуют случаю $\alpha_0 = \pi/2$, и в согласии с (16) энергия частицы убывает, пока не достигнет значения γ_m . Для кривой 1 $Y = 0.59\omega$, для кривой 2 $Y = \omega$, следовательно, всю свою кинетическую энергию электрон отдает волне. Кривая, показанная на рис. 2, б, соответствует случаю $\alpha_0 = -\pi/2$, что приводит к монотонному росту энергии частицы.

Определим условие, при котором движение частицы происходит синхронно с изменением поля волны, в том смысле, что разность фаз волны по отношению к частице и орбитального движения частицы по ларморовой окружности не меняется с течением времени, т.е. $\alpha(\psi) = \alpha_0$. Исследуя на экстремум функцию $R(\psi)$, получим, что периодическое по фазе волны движение частицы возможно только в случае, если

$$b \cos \alpha_0 + 1 = 0, \quad (19)$$

где $b = 2p_{\perp}(\psi_0)\varepsilon^{-1}[p_{\perp}^2(\psi_0) + R_m^2]^{1/2}$.

Отметим, что один из корней уравнения (19) соответствует режиму торможения частицы, а другой — ее ускорению. С учетом (19) условие экстремума функции $R(\psi)$ примет вид

$$[\psi - \sigma(b^2 - 1)^{1/2}] \cos \psi = 0. \quad (20)$$

Здесь $\sigma = \text{sgn}(\sin \alpha_0)$ — знаковая функция.

Случай синхронизма между волной и частицей представляет наибольший интерес, так как при этом происходит длительный и наиболее эффективный энергообмен, что обусловлено одновременным изменением направления поля волны и радиального импульса частицы. Если $b \gg 1$, т.е. $\varepsilon \ll a \ll 1$, то обеспечивающие (19) значения $\alpha_0 \approx \pm \pi/2$. При произвольном значении начальной фазы ψ_0 для поддержания синхронизма необходимо, чтобы параметры α_0 , ψ_0 и b были связаны соотношением

$$b \cos \alpha_0 + \cos^2 \psi_0 = 0. \quad (21)$$

Уравнение (20), кроме периодического решения

$$\psi_{ex} = \pi/2 + \pi n, \quad (22)$$

имеет еще одно решение

$$\psi_m = \sigma(b^2 - 1)^{1/2}. \quad (23)$$

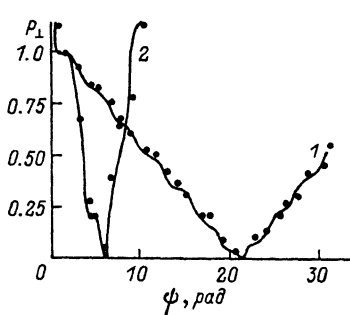
Это решение имеет смысл, если $\delta > 0$, т.е. реализуется режим торможения частицы; при этом оно определяет значение фазы волны, в которой энергия частицы принимает минимальное значение γ_m .

Значение ψ_m , рассчитанные по формуле (23), находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования точного уравнения (4). Так, для кривых 1 и 2 на рис. 2, а ($p_{\perp}(\psi) = 1.0$, $M = 6.59 \cdot 10^{-10}$ с, $\omega = 10^{10}$ с⁻¹; $\varepsilon = 0.29$) расхождение между результатами линейной теории и численного моделирования составляет 2.5 и 1.2 % соответственно.

В предположении существования синхронизма между волной и частицей безразмерный ларморов радиус ρ совпадает с поперечным импульсом частицы $\rho(\psi) = p_{\perp}(\psi)$. В рамках линейной теории эта величина имеет вид

$$p_{\perp}(\psi) = p_{\perp}(\psi) - \frac{\varepsilon}{2bR_m} \left[\sigma \psi (b^2 - 1)^{1/2} + (1 + \sigma(b^2 - 1)^{1/2}) \frac{\sin 2\psi}{2} \right]. \quad (24)$$

Рис. 3. Зависимость $p_{\perp}(\varphi)$ для двух значений поля волны.



Зависимость (24) показана на рис. 3. Кривая 1 отвечает набору параметров $\epsilon = 0.29$, $p_{\perp}(\psi_0) = 1.08$, $M = 6.59 \cdot 10^{-10}$ с,

$Y = 0.59 \cdot 10^{+10}$ с $^{-1}$, а кривая 2 — $\epsilon = 1.43$, $p_{\perp}(\psi_0) = 1.39$, значения M и Y те же. Точками на рисунке отмечены значения, полученные численным моделированием. Заметно их хорошее совпадение с аналитическими результатами. В частности, значение ψ_m , полученное при табулировании (24), отличается от результата моделирования для кривой 1 на рис. 3 на 1.5 %, а для кривой 2 — на 2.1 %.

Отметим, что совпадение результатов счета с линейной теорией нельзя объяснить просто соблюдением ограничений (7) и (10). В частности, условие (10) не выполнено для всех приведенных кривых. На рис. 2 кривой 1 соответствует значение $a = 0.61$, а кривой 2 — 0.50, на рис. 3 соответственно 0.62 и 0.67. Больше того, для кривой 2 на рис. 3 не выполнено и условие (7), а именно $\epsilon R_0^{-2} = 0.37$ (R_0 — минимальное значение радиуса траектории частицы). Также отметим, что значению $\epsilon = 0.29$ соответствует амплитуда напряженности поля волны $2.5 \cdot 10^6$ В/м, а $\epsilon = 1.43 - 1.25 \cdot 10^7$ В/м.

Таким образом, линейное по полю волны приближение, развитое в работе, достаточно точно описывает авторезонансное взаимодействие в коаксиальном волноводе для значений интенсивности и частоты волн, представляющих практический интерес.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1259—1263.
- [2] Давыдовский В.Я. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43, Вып. 9. С. 886—888.
- [3] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 1. С. 261—266.
- [4] Воронин В.С., Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // Тр. ФИАН. 1973. Т. 69. С. 95—111.
- [5] Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я. // ЖТФ. 1975. Т. 45. Вып. 1. С. 3—8.
- [6] Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я., Сапогин В.Г. // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 3. С. 495—503.
- [7] Блюх Ю.П., Любарский М.Г., Онищенко И.Н. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 1. С. 114—121.
- [8] Братман В.Л., Денисов Г.Г., Офицеров М.М. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1983. Вып. 3. С. 96—127.
- [9] Loeb A., Fridland L. // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 129. N 5. P. 329—332.

- [10] *Pendergast K.D., Danly B.G., Temkin R.J., Wurtele J.S.* // IEEE. 1988. Vol. 16. N 2. P. 122—128.
- [11] *Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я., Даниленко В.Н., Сапогин В.Г.* // Изв. вузов. Физика. 1980. № 11. С. 96—97.
- [12] *Курин А.Ф.* // РиЭ. 1983. Т. 28. № 6. С. 1148—1153.
- [13] *Жураховский В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 12. С. 1847—1852.
- [14] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. и др.* // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979. Вып. 1. С. 157—216.
- [15] *Давыдовский В.Я.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. Вып. 8. С. 519—525.

Таганрогский радиотехнический
институт им. В.Д.Калмыкова

Поступило в Редакцию
12 февраля 1990 г.
В окончательной редакции
11 августа 1991 г.