01; 02

ФАЗОВАЯ ФОКУСИРОВКА И ДЕФОКУСИРОВКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ УСКОРЕНИИ И ТОРМОЖЕНИИ ЧАСТИЦ В СЕРФОТРОНЕ

В. А. Буц, И. К. Ковальчук, С. С. Моисеев, В. В. Мухин

Исследуется динамика движения как ускоряющихся, так и тормозящихся частиц в схеме серфотронного взаимодействия их с полем. Изучено влияние флуктуаций параметров волны на устойчивость фазовых колебаний частиц. Показано, что ускоряемые вдоль фронта волны частицы разных знаков при временах $t \gg \gamma_0 v_{y0}/\omega_H v_{ph}$ (γ_0, v_{y0} — начальные значения релятивистского фактора и скорости, v_{ph} — фазовая скорость волны, $\omega_н$ — циклотронная частота) имеют разные устойчивые стационарные фазы. При $t \ll \gamma_0 v_{y0}/\omega_H v_{ph}$ стационарные фазы не зависят от знака и массы частицы. Эти стационарные фазы экспоненциально неустойчивы для тормозящихся частиц. Ускоряемые частицы имеют как устойчивые, так и неустойчивые фазы. Показано, что введение флуктуаций параметров волны при больших временах мало влияет на характер движения ускоряемых частиц. При малых временах реальная часть показателя экспоненты неустойчивой стационарной фазы возрастает, для устойчивых модуль реальной части показателя уменьшается, при некотором критическом уровне флуктуаций эта стационарная фаза может стать неустойчивой.

Одним из наиболее перспективных направлений коллективных методов ускорения [1-4] является метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме [4]. Предельные напряженности электрических полей в плазме могут достигать больших значений, что позволяет получать высокие темпы ускорения в нетрадиционных ускорителях. В одном из таких методов [5], получившем название серфотронного ускорения, заряженная частица, захваченная продольной плазменной волной, распространяющейся перпендикулярно постоянному однородному магнитному полю, ускоряется в направлении, перпендикулярном электрическому полю и постоянному магнитному полю вдоль фронта волны. В работе [6] исследовано движение частицы при временах $t \gg c/\omega_H V_{ph}$ (ω_H — циклотронная частота, v_{ph} — фазовая скорость волны) и показано, что существуют стационарные фазы движения частицы, при этом одна из них экспоненциально неустойчива, а вблизи другой частица совершает затухающие колебания.

В настоящей работе учтено влияние начальной скорости v_{y0}, соответствующей направлению вдоль фронта волны, и найдены стационарные фазы при временах $t \ll \gamma_0 v_{y0}/\omega_H V_{ph}$ (γ_0, v_{y0} — начальные значения релятивистского фактора и скорости). Для частиц, которые в направлении вдоль фронта волны, перпендикулярном электрическому и магнитному полям, тормозятся, не существует устойчивых стационарных фаз; для ускоряемых частиц одна из фаз устойчива, другая неустойчива. Стационарные фазы не зависят от заряда и массы частицы. Кроме того, исследовано влияние флуктуаций на устойчивость фаз.

Рассмотрим движение заряженной частицы с зарядом e и массой m в электростатической волне, распространяющейся вдоль оси X, с компонентой поля $E_x = E_0 \sin(kX - \omega t)$, и постоянном однородном магнитном поле H, направленном вдоль оси Z; ω, k — частота и волновое число соответственно. Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v_x) = \frac{e}{m} E_0 \sin(kX - \omega t) + \omega_H v_y,$$
$$\frac{d}{dt}(\gamma v_y) = -\omega_H v_x, \tag{1}$$
$$\frac{d}{dt}(\gamma v_z) = 0,$$

где $\gamma = (1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор; v_x, v_y, v_z — компоненты скорости частицы, ω_H — циклотронная частота.

Полагаем далее $v_z = 0$. Из второго уравнения системы (1) получим

$$v_y = \frac{A - \omega_H x}{\gamma}, \tag{2}$$

где A — константа интегрирования.

Кроме того, из этой системы можно получить уравнение для γ

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{m} E_0 v_x \sin(kX - \omega t). \tag{3}$$

Подставим v_y в первое уравнение (1), перейдя к новой переменной ξ, определяемой условием $x = v_{ph} t + \xi$ ($v_{ph} = \omega/k$ — фазовая скорость волны), получим следующее уравнение:

$$\ddot{\xi} - \frac{\frac{e}{m} E_0 \sin(k\xi)\left(1 - \frac{(v_{ph} + \dot{\xi})^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{(A - \omega_H v_{ph} t - \omega_H \xi)^2}{c^2}\right)} -$$

$$
-\frac{\omega_H(A-\omega_H v_{ph}t-\omega_H\xi)\left(1-\dfrac{(v_{ph}+\dot\xi)^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{(A-\omega_H v_{ph}t-\omega_H\xi)^2}{c^2}\right)}=0. \tag{4}
$$

Предполагается, что частица захвачена волной и ξ меняется в пределах длины волны. Уравнение (4) проанализируем в двух случаях $\omega_H v_{ph}t \gg A,\ \omega_H\xi$ и $A \gg \omega_H v_{ph}t,\ \omega_H\xi$, что соответствует большим временам для первого неравенства и малым для второго. В первом случае оно сведется к виду

$$
\ddot\xi-\frac{c^2}{v_{ph}t}\left(1-\frac{(v_{ph}+\xi)^2}{c^2}\right)\times
$$

$$
\times\left[\operatorname{sign}(e)\,\frac{E_0}{H}\left(1-\frac{(v_{ph}+\xi)^2}{c^2}\right)^{1/2}\sin(k\xi)-1\right]=0. \tag{5}
$$

Полагая $\dot\xi=0$ и $\ddot\xi=0$, получаем уравнение для стационарных фаз

$$
\sin(k\xi_0)=\operatorname{sign}(e)\,\frac{H\gamma_{ph}}{E_0}, \tag{6}
$$

где $\gamma_{ph}=(1-v_{ph}^2/c^2)^{-1/2}$.

Во втором случае получим следующее уравнение:

$$
\ddot\xi-\frac{\dfrac{e}{m}\left(1-\dfrac{(v_{ph}+\dot\xi)^2}{c^2}\right)}{1+A^2/c^2}\left[E_0\left(1-\frac{(v_{ph}+\dot\xi)^2}{c^2}\right)\sin(k\xi)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{HA/c}{(1+A^2/c^2)^{1/2}}\right]=0, \tag{7}
$$

а стационарные точки его определяются уравнением

$$
\sin(k\xi_0)=-\frac{H\gamma_{ph}}{E_0}\,\frac{A/c}{(1+A^2/c^2)^{1/2}}. \tag{8}
$$

Из уравнения (6) следует, что в первом случае стационарная фаза зависит от знака заряда и не зависит от массы, во втором случае она не зависит ни от заряда, ни от массы.

Для выяснения условий устойчивости стационарных фаз линеаризуем уравнения (5) и (7), полагая $\xi = \xi_0 + \tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} \ll \tilde{\xi}_0$, $\dot{\tilde{\xi}} \ll v_{ph}$; $\omega_H v_{ph} t \ll A$ для второго случая. Учитывая при этом условия (6) и (8), получим следующие уравнения для первого случая:

$$\ddot{\tilde{\xi}} t + \ddot{\tilde{\xi}} - \text{sign}\,(e) \frac{E_0 c^2 k}{H v_{ph} \gamma^3} \cos\,(k\xi_0)\tilde{\xi} = 0, \tag{9}$$

для второго случая

$$\ddot{\tilde{\xi}} - \frac{v_{ph}}{c} \frac{\omega_H A/c}{1 + A^2/c^2} \dot{\tilde{\xi}} + \frac{\omega_H A/k}{\gamma_{ph}^2 (1 + A^2/c)} \text{ctg}\,(k\xi_0)\tilde{\xi} = - \frac{\omega_H^2 v_{ph} t}{\gamma_{ph}^2 (1 + A^2/c)}. \tag{10}$$

Из уравнения (9) получим

$$\tilde{\xi} = D_1 J_0 \left(2 \frac{ck}{\gamma_{ph}\omega} \sqrt{-\,\text{ctg}\,(k\xi_0)\omega t}\right) + D_2 N_0 \left(2 \frac{ck}{\gamma_{ph}\omega} \sqrt{-\text{ctg}\,(k\xi_0)\omega t}\right), \tag{11}$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка соответственно.

Из (11) следует, что одна из стационарных фаз первого случая, соответствующая условию $\text{ctg}\,(k\xi_0) < 0$, устойчива и частица совершает вблизи нее затухающие колебания с асимптотикой

$$\tilde{\xi} \simeq \frac{\cos \left(2 \frac{ck}{\gamma_{ph}\omega} \sqrt{|\text{ctg}\,(k\xi_0)|}\right)}{\left(2 \frac{ck}{\gamma_{ph}\omega}\right)^{1/2} (|\text{ctg}\,(k\xi_0)|\omega t)^{1/4}},$$

а вторая, $\text{ctg}\,(k\xi_0) > 0$, неустойчива с асимптотикой

$$\tilde{\xi} \simeq \exp \left(2 \frac{ck}{\gamma_{ph}\omega} \sqrt{|\text{ctg}\,(k\xi_0)|\omega t}\right).$$

Это соответствует результатам, полученным в [6].

Правая часть уравнения (10) дает вклад в решение $\simeq a_0 + a_1 t$; однородное уравнение имеет решения вида $\exp(\lambda_{1,2} t)$, где

$$\lambda_{1,2} = \frac{v_{ph}}{2c} \frac{\omega_H A/c}{1 + A^2/c^2} \mp \sqrt{\frac{v_{ph}^2}{4c^2} \frac{\omega_H^2 A^2/c^2}{(1 + A^2/c^2)^2} - \frac{k\omega_H A \text{ctg}(k\xi_0)}{\gamma_{ph}^2 (1 + A^2/c^2)}}. \tag{12}$$

При $\omega_H A > 0$ движение частицы вблизи стационарной фазы (8) экспоненциально неустойчиво и частица не может быть локализована в этой области. При $\omega_H A < 0$ существуют экспоненциально неустойчивая фаза, удовлетворяющая условию $\mathrm{ctg}\,(k\xi_0) < 0$, и устойчивая, уход от которой более медленный, порядка $\simeq a_0 + a_1 t$. Сравнивая условие $\omega_H a > 0$ с выражением (2) для v_y, приходим к выводу, что оно выполняется для частиц, которые испытывают торможение вдоль оси Y. Из выражений (3) и (8) следует, что в этом случае $d\gamma/dt < 0$ и частица теряет энергию. Таким образом, для тормозящихся частиц не существует устойчивых стационарных фаз. В отличие от этого в первом случае и устойчивая, и неустойчивая фазы являются ускоряющими.

Далее рассмотрим влияние, которое в описанных выше случаях оказывают флуктуации амплитуды и фазы электрического поля. Для этого представим его в виде $E = (E_0 + \tilde{E})\sin\,(k\xi + \tilde{\Phi})$, где $\tilde{E}$ и $\tilde{\Phi}$ — случайные малые гауссовские добавки с нулевыми средними значениями ($\langle\tilde{E}\rangle = 0$, $\langle\tilde{\Phi}\rangle = 0$). Преобразуя уравнения (5) и (7) с учетом вышеизложенных предположений о малости $\tilde\xi$ и $\dot{\tilde\xi}$, а также учитывая, что $\tilde\xi \ll E_0$ и $\tilde\Phi \ll k\xi$, сохраняя, однако, при этом слагаемые с квадратичными перекрестными произведениями $\tilde\xi$ и $\dot{\tilde\xi}$ с $\tilde E$ и $\tilde\Phi$, получим для первого случая

$$\ddot{\tilde\xi} + \frac{\dot{\tilde\xi}}{t} - \frac{c^2 k}{\gamma_{ph}^2 v_{ph}}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\,\frac{\tilde\xi}{t} - \frac{c^2 k}{E_0\gamma_{ph}^2 v_{ph}}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\,\frac{\tilde E\tilde\xi}{t} -$$

$$- \frac{c^2}{\gamma_{ph}^2 E_0 v_{ph}\sin\,(k\xi_0)}\,\frac{\tilde\alpha}{t} + \frac{3}{E_0\sin\,(k\xi_0)}\,\frac{\tilde\alpha\dot{\tilde\xi}}{t} = 0 \qquad (13)$$

и для второго случая

$$\ddot{\tilde\xi} - \frac{v_{ph}}{c}\,\frac{\omega_H A/c}{1 + A^2/c^2}\,\tilde\xi + \frac{\omega_H A k}{\gamma_{ph}^2\,(1 + A^2/c^2)}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\,\tilde\xi +$$

$$+ \frac{3\,\frac{e}{m}\,v_{ph}/c^2}{\gamma_{ph}(1 + A^2/c^2)^{1/2}}\,\tilde\alpha\dot{\tilde\xi} - \frac{\frac{e}{m}\,k\cos\,(k\xi_0)}{\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)^{1/2}}\,\tilde E\tilde\xi = - \frac{\omega_H^2 v_{ph} t}{\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)^2} +$$

$$+ \frac{\frac{e}{m}\,\tilde\alpha}{\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)^2} + \frac{\frac{e}{m}\,v_{ph}\,\omega_H A/c^2}{\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)^{3/2}}\,t\tilde\alpha, \qquad (14)$$

где $\tilde\alpha = \tilde\varphi E_0\cos\,(k\xi_0) + \tilde E\sin\,(k\xi_0)$.

Усредняя (13) и (14), получим уравнения для первых моментов в первом случае

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\tilde\xi\rangle + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\langle\tilde\xi\rangle - \frac{c^2k}{\gamma_{ph}^2 v_{ph}}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\,\frac{1}{t}\langle\tilde\xi\rangle -$$

$$- \frac{c^2k}{E_0\gamma_{ph}^2 v_{ph}}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\,\frac{1}{t}\langle\tilde E\tilde\xi\rangle + \frac{3}{E_0\sin(k\xi_0)}\frac{1}{t}\langle\tilde\alpha\dot{\tilde\xi}\rangle = 0 \qquad (15)$$

и во втором случае

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\tilde\xi\rangle - \frac{v_{ph}\omega_H}{c}\,\frac{A/c}{1 + A^2/c^2}\,\frac{d}{dt}\langle\tilde\xi\rangle +$$

$$+ \frac{\omega_H Ak}{\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)}\,\mathrm{ctg}\,(k\xi_0)\langle\tilde\xi\rangle + \frac{3\frac{e}{m}v_{ph}/c^2}{\gamma_{ph}(1 + A^2/c^2)^{1/2}}\langle\tilde\alpha\tilde\xi\rangle -$$

$$- \frac{\frac{e}{m}k\cos(k\xi_0)}{\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)^{1/2}}\langle\tilde E\tilde\xi\rangle = - \frac{\omega_H^2 v_{ph} t}{\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)^2}. \qquad (16)$$

Полагая случайные функции δ-коррелированными, т.е. выполнено условие $\langle\tilde\alpha(t_1)\tilde\alpha(t_2)\rangle = B_\alpha\delta(t_1 - t_2)$ (при этом $\langle\tilde\alpha\rangle = 0$), расщепляем корреляции в уравнениях (15) и (16)

$$\langle\tilde\alpha\tilde\xi\rangle - \frac{1}{2}B_\alpha\left\langle\frac{\delta\tilde\xi}{\delta\tilde\alpha(t)}\right\rangle, \qquad (17)$$

где $\delta\tilde\xi/\delta\tilde\alpha(t)$ — вариационная производная по случайной функции $\tilde\alpha$ в момент времени $t' = t$.

Для вычисления вариационных производных воспользуемся уравнениями (13) и (14) с применением методики, описанной в [7]. После этого получим $\delta\tilde\xi/\delta\tilde E = 0$ в обоих случаях, а

$$\frac{\delta\dot{\tilde\xi}}{\delta\tilde\alpha(t)} = - \frac{3}{2E_0\sin(k\xi_0)}\frac{\tilde\xi}{t} + \frac{c^2}{2v_{ph}\gamma_{ph}^2 E_0\sin(k\xi_0)}\frac{1}{t} \qquad (18)$$

для первого случая и

$$\frac{\delta\dot{\tilde\xi}}{\delta\tilde\alpha(t)} = - \frac{3\frac{e}{m}v_{ph}/c^2}{2\gamma_{ph}(1 + A^2/c^2)^{1/2}}\tilde\xi + \frac{e/m}{2\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)} +$$

$$+ \frac{\frac{e}{m}v_{ph}\omega_H A/c^2}{2\gamma_{ph}^3(1 + A^2/c^2)^{3/2}}\,t \qquad (19)$$

для второго.

Учитывая (18) и (19), а также условие (17), получим следующие уравнения для первых моментов:

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\tilde{\xi}\rangle + \left[\frac{1}{t} - \frac{9}{4}\,\frac{B_\alpha}{E_0\ \sin^2\ (k\xi_0)}\,\frac{1}{t^2}\right]\frac{d}{dt}\langle\tilde{\xi}\rangle -$$

$$-\frac{c^2 k}{\gamma_{ph}^2 v_{ph}}\ \mathrm{ctg}\ (k\xi_0)\ \frac{\langle\tilde{\xi}\rangle}{t} = -\frac{3c^2 B_\alpha}{4v_{ph}\gamma_{ph}^2 E_0\ \sin^2(k\xi_0)}\,\frac{1}{t^2} \qquad (20)$$

для первого случая и

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\tilde{\xi}\rangle - \left[\frac{v_{ph}}{c}\,\frac{\omega_H A/c}{1 + A^2/c^2} + \frac{9(e/m)^2 v_{ph}/c^4}{4\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)}\,B_\alpha\right]\frac{d}{dt}\langle\tilde{\xi}\rangle +$$

$$+\frac{\omega_H A k}{\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)}\ \mathrm{ctg}\ (k\xi_0)\ \langle\tilde{\xi}\rangle = -\frac{\omega_H^2 v_{ph} t}{\gamma_{ph}^2(1 + A^2/c^2)^2} -$$

$$-\frac{3(e/m)^2 v_{ph}/c^2}{4\gamma_{ph}^4(1 + A^2/c^2)}\,B_\alpha - \frac{3(e/m)^2 v_{ph}^2/c^4}{4\gamma_{ph}^4(1 + A^2/c^2)^2}\,AB_\alpha\,\omega_H t \qquad (21)$$

для второго.

Из сопоставления уравнений (9) и (20) следует, что при $t\to\infty$ вклад слагаемых, обусловленных флуктуациями, становится пренебрежимо мал и характер устойчивости стационарных фаз не изменяется.

Из сопоставления уравнений (10) и (21) следует, что в этом случае устойчивость ухудшается, так как за счет флуктуаций модуль действительной части показателей λ из (12) для устойчивых фаз уменьшается и при некотором значении $B_\alpha > 4\gamma_{ph}^2 c^2|\omega_H A|/9(e^2/m^2)v_{ph}$ реальная часть λ может стать положительной. Для неустойчивых фаз нестабильность возрастает, так как положительная реальная часть при этом увеличивается.

Отметим, что факт неустойчивости стационарных фаз тормозящихся частиц при серфотронном механизме их взаимодействия с полем наблюдается также в результатах численного счета, приведенного в работе [8].

Список литературы

[1] *Veksler V.I.* // Proc. Symp. CERN. Geneva: CERN, 1956. Vol. 1. P. 80—83.

[2] *Векслер В.И., Саранцев В.П., Бонч-Осмоловский А.Г. и др.* // Атомная энергия. 1968. Т. 24. № 4. С. 317—323.

[3] *Budker G.I.* // Proc. Symp. CERN. Geneva: CERN, 1956. Vol. 1. P. 68—75.
[4] *Fainberg Ya.B.* // Ibid. P. 84—92.
[5] *Katsouleas T., Dawson T.M.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 392—394.
[6] *Buts V.A., Mukhin V.V., Moiseev S.S.* // Nonlinear Word Proc. of the 4th Intern. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Kiev, 1989. Vol. 1. P. 255—257.
[7] *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем. М.: Наука, 1975. 240 с.
[8] *Ерохин Н.С., Лазарев А.А., Моисеев С.С., Онищенко О.Г.* Препринт ИКИ. № 1354. М., 1968. 68 с.

Харьковский физико-технический институт

Поступило в Редакцию 26 апреля 1991 г.
В окончательной редакции 19 ноября 1991 г.