

01; 07

© 1992 г.

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА ВЫСОКОЧАСТОТНОМ УЛЬТРАЗВУКЕ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ И ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

Г. Е. Зильберман

Развита теория дифракции света на высокочастотном ультразвуке в одноосных кристаллах, опирающаяся на точное решение задачи дифракции. Показано, что центральным пунктом теории является дисперсионное уравнение, определяющее законы дисперсии и амплитуды возможных в звуковом поле световых волн. Предложен способ определения брэгговских углов и брэгговской расстройки по одной лишь форме этого уравнения без его решения. Найдены выражения для дифракционных составляющих при произвольном направлении светового луча в кристалле.

Введение

Обзор работ, посвященных дифракции света на ультразвуке, приведен в [1] и в более поздней монографии [2], а также в обзорных работах в Физической энциклопедии и энциклопедии «Ультразвук» [3]. Ниже будет рассмотрено точное решение задачи о дифракции света на ультразвуке. Амплитуды дифракционных компонент в этом решении для случая высокочастотного звука могут быть получены методом, названным авторами методом непрерывных дробей. [5–8]. Метод позволяет для высокочастотного звука эффективно решать задачи дифракции. Высокочастотным мы называем звук, для которого мал параметр q ,

$$q = \frac{\alpha \varkappa^2}{k_0^2}. \quad (1)$$

Здесь \varkappa — волновой вектор света в пустоте (частота света Ω); k_0 — волновой вектор звука (частота звука ω_0); α — коэффициент акустооптической связи, смысл которого состоит в следующем. В присутствии звука тензор диэлектрической проницаемости равен [9, 10]

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + a_{iklm} u_{lm}, \quad (2)$$

a_{iklm} — упругооптический тензор, зависящий от класса кристалла; u_{lm} — тензор деформации, вызванный звуком;

$$u_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_l}{dx_m} + \frac{du_m}{dx_l} \right).$$

Если направление звуковой волны принять за ось OY , то смещение в гармонической волне можно будет записать $u_l = u_{l0} \sin(\omega_0 t - k_0 y)$. Тогда u_{lm} будет содержать u_{l0} , волновой вектор k_0 и $\cos(\omega_0 t - k_0 y)$. Произведение этих величин

на a_{iklm} может быть всегда записано в виде $2\alpha_{ik}\cos(\omega_0 t - k_0 y)$, где α_{ik} (или просто α) называются коэффициентами акустооптической связи. Неравенство $q \ll 1$ обычно имеет место для звуковых частот порядка $10^6 - 10^7$ Гц и больше.

Точное решение, упомянутое выше, основано на следующих соображениях. Напряженность электрического поля световой волны E , распространяющейся в звуковом поле, определяется из волнового уравнения

$$\text{graddiv}E - \Delta E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где D в отсутствие оптической активности равно

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (4)$$

Конкретный вид u_i для записи точного решения несуществен, предполагается лишь периодичность по аргументу $\Phi = \omega_0 t - k_0 y$.

Таким образом, коэффициенты дифференциального уравнения (3) будут периодическими функциями аргумента Φ . Следовательно, решение уравнения (3) будет определяться теоремой Флоке: оно должно представлять собой плоскую волну $\exp[i(k_1 x + k_2 y + k_3 z) - i\Omega t]$ (k_1, k_2, k_3 — проекции волнового вектора k световой волны в кристалле), умноженную на периодическую функцию аргумента Φ ,

$$E_i = \sum_n A_n^{(i)} \exp i [k_1 x + (k_2 + nk_\nu) y + k_3 z - (\Omega + n\omega_\nu) t]. \quad (5)$$

Это решение является точным. В нем еще подлежат определению амплитуды A_n . Номер n перечисляет дифракционные компоненты, основная компонента имеет $n = 0$. Из (5) следует для низкочастотного звука решение Рамана—Ната, выражающее A_n через беселевы функции. Решение для высокочастотного звука может быть найдено с помощью упомянутого выше метода непрерывных дробей. При подстановке (5) и (2) в волновое уравнение (3) для амплитуд A_n получаются однородные линейные разностные уравнения. Эти уравнения будут иметь нетривиальные решения лишь при равенстве нулю детерминанта системы $D = 0$. Детерминант будет конечным, если оборвать систему на некотором A_N (ниже этот вопрос обсуждается). Дисперсионное уравнение $D = 0$ будет иметь $2N + 1$ решений для $D_n^{(i)}$ (выражающихся через $A_0^{(i)}$, а эти последние определяются из граничных условий) и, как выясняется, для k_3 (или k_1), так что эти величины надо записать как $A_{nj}^{(i)}$ и k_{3j} и в (5) добавить суммирование по j

$$E_i = \sum_{nj} A_{nj}^{(i)} e^{i(k_1 x + (k_2 + nk_0) y + k_{3j} z) - i(\Omega + n\omega_0) t} \quad (6)$$

Это выражение по-прежнему удовлетворяет теореме Флоке.

1. Дисперсионное уравнение

Дисперсионное уравнение составляет основу теории дифракции света на ультразвуке. Уравнение определяет амплитуды возможных световых волн, распространяющихся в звуковом поле, и их законы дисперсии. Ошибочно думать, что законы дисперсии в звуковом поле остаются теми же, что и в отсутствие звука, т. е. могут соответствовать либо обыкновенной, либо необыкновенной световым волнам. Каждая из дифракционных компонент состоит из множества плоских волн с близкими законами дисперсии. Отличие этих законов дисперсии друг от друга невелико и при $q \rightarrow 0$ исчезает. Однако существование целого набора волн, входящих в одну дифракционную компоненту, является фактом принципиальным. В частности, без этого расщепления было бы невозможно удовлетворить граничным условиям.

Предлагаемая теория не могла бы привести к эффективному решению задачи,

если бы было необходимо решить уравнение бесконечного порядка. Как сказано выше, систему линейных уравнений для A_n нужно оборвать на каком-то $n = N$. В раман-натовском случае низкочастотного звука, когда q гораздо больше единицы, это было бы невозможно. Для высокочастотного звука, напротив, $q \ll 1$ и обрыв законен. Дело в том, что амплитуды A_n в общем случае имеют порядок q^n , кроме тех случаев, когда для какого-то $n = M$ имеет место брэгговский резонанс (резонанс M -го порядка). При резонансе A_M может быть порядка A_0 (основной компоненты). Если мы рассматриваем такие условия (угол падения, величины k и k_0 , n_0 и n_e), при которых заведомо не может быть резонанса N -го или большего порядка, то можно оборвать цепочку уравнения на амплитуде A_N .

Структура дисперсионного уравнения следующая. Если обозначить

$$A_n = n_e^2 \left(\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - (k_2 + nk_0)^2 - k_3^2 \right), \quad (7)$$

$$M_n = \varkappa^2 n_0^2 n_e^2 - n_0^2 k_1^2 - n_0^2 (k_2 + nk_0)^2 - n_e^2 k_3^2, \quad (8)$$

то уравнение имеет вид

$$\Lambda_0 M_0 \Lambda_1 M_1 \Lambda_{-1} M_{-1} \Lambda_2 M_2 \dots = q^2 F_1 + q^4 F_2 + \dots, \quad (9)$$

где F_1 , F_2 — функции тех же величин, от которых зависят Λ_n и M_n .

В левую часть (9) не обязательно входят все Λ_n и M_n . Какие именно сомножители входят в (9), зависит в конечном счете от тензора a_{iklm} (4) (т.е. от вида кристалла), а также от характера звука (продольный или поперечный, от направления его распространения и поляризации).

Так, в задаче о дифракции на продольном или поперечном звуке в изотропной среде левая часть представляет собой произведение $\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_{-1} \Lambda_2 \Lambda_{-2} \dots$. В задаче о дифракции на поперечном звуке в одноосном кристалле в случае, когда k , k_0 и ось кристалла лежат в одной плоскости [8], в левую часть входят $M_0 \Lambda_1 M_2 M_4 \Lambda_3 \dots$, если падающая волна необыкновенная, (9a)
 $\Lambda_0 M_1 \Lambda_2 M_3 \Lambda_4 \dots$, если она обыкновенная. (9б)

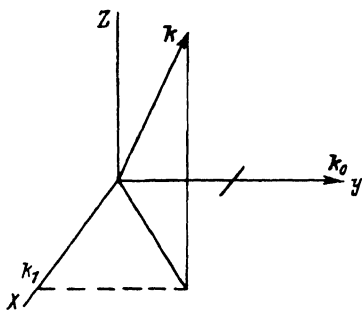


Рис. 1. Волновой вектор света направлен произвольно, звук распространяется в базисной плоскости, его поляризация параллельна оси OX.

В более общей задаче, которая будет рассмотрена в разделе 4, когда k , k_0 и ось кристалла не лежат в одной плоскости (поперечный звук указанной на рис. 1 поляризации распространяется в базисной плоскости, перпендикулярной оси кристалла), в левую часть входят все Λ_n и M_n так же, как в формуле (9). При $k_1 \rightarrow 0$, когда k , k_0 и ось OZ оказываются в одной плоскости (рис. 1), левая часть уравнения (9) должна преобразовываться в (9a) (или (9б)). Это происходит из-за сокращения не входящих в (9) множителей с такими же в правой части уравнения. «Малым» является k_1 , удовлетворяющее неравенству $k_1 \ll k_0$.

2. Брэгговская дифракция

Решение задачи о брэгговской дифракции света на ультразвуке означает

1) установление условий такой дифракции (и 2) нахождение выражений для основной и более высоких дифракционных компонент.

Первая задача может быть выполнена без решения уравнения (9). Достаточно, чтобы была известна структура его левой части. Вторая задача требует решения уравнения.

Рассмотрим, как решается первая задача. В отсутствие звука (т.е. при $q = 0$) в нуль обращается либо в Λ_0 , что означает обыкновенную световую волну, или M_0 — необыкновенную волну. При $q \neq 0$ помимо Λ_0 или M_0 в левой части будет еще один малый множитель, который означает резонанс между основной и брэгговской дифракционными составляющими. Если малы Λ_1 или M_1 это отвечает брэгговскому резонансу первого порядка (или обычной диаграмме Диксона). В изотропной среде переход $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$ означает дифракцию с поворотом плоскости поляризации, если звук поперечный (геометрия соответствует работе [8]), или без поворота, если продольный. В кристалле переходы $\Lambda_0 \rightarrow M_1$ или $M_0 \rightarrow \Lambda_1$ сопровождаются поворотом поляризации. Если малы Λ_2 или M_2 и т.д., то это отвечает брэгговским резонансам второго или высших порядков [6] (диаграммам Диксона высших порядков).

В качестве примера решения первой части задачи рассмотрим переход $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$. Из уравнений

$$\Lambda_0 = n_e^2 (\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) = 0, \quad (10)$$

$$\Lambda_1 = n_e^2 (\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - (k_2 + k_0)^2 - k_3^2) = 0, \quad (11)$$

получаем известное условие брэгговского резонанса первого порядка в изотропной среде

$$k_2 = -\frac{k_0}{2}. \quad (12)$$

При этом, если звук поперечный, и в изотропной среде происходит поворот плоскости поляризации [7], что диаграммами Диксона никак не изображается. Название для такого вида дифракции «анизотропная дифракция» явно неудачно, так как поворот в данном случае не связан с какой-либо анизотропией.

Из уравнений $\Lambda_0 = 0$ (10a) и

$$M_1 = \varkappa^2 n_0^2 n_e^2 - n_0^2 k_1^2 - n_0^2 (k_2 + k_0)^2 - n_e^2 k_3^2 = 0 \quad (13)$$

получаем два значения k_2 , соответствующие двум возможным углам брэгговской дифракции в кристалле в случае, когда падающая волна обыкновенная ($\Lambda_0 \rightarrow M_1$),

$$k_2 = -k_0 \frac{1 + \eta}{\eta} \left(1 \pm \frac{n_e}{n_0} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{1 + \eta} \frac{k_1^2}{k_0^2}} \right), \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\eta = \frac{n_0^2 - n_e^2}{n_e^2}. \quad (15)$$

Если падающая волна необыкновенная и происходит переход ($M_0 \rightarrow \Lambda_1$, то

$$k_2 = k_0 \frac{1}{\eta} \left(1 \pm \frac{n_0}{n_e} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{1 + \eta} \frac{k_1^2}{k_0^2}} \right). \quad (16)$$

Если $k_1 = 0$ (случай, рассмотренный в [8]), то эти формулы упрощаются

$$k_2 = -k_0 \frac{n_0^2}{n_0^2 - n_e^2} \left(1 \pm \frac{n_e}{n_0} \right), \quad (17)$$

если падает обыкновенная волна, и

$$k_2 = k_0 \frac{n_e^2}{n_0^2 - n_e^2} \left(1 \pm \frac{n_0}{n_e} \right), \quad (18)$$

если падает необыкновенная. Проекция волнового вектора k_2 равна $k \sin \Theta$, где Θ — угол между волновым вектором k и фронтом звука (плоскость XOZ) (рис. 1), так что все приведенные выражения определяют $\sin \Theta$. Эти выражения получены в работе [8].

Из (14) и (15) видно, что при $k_1 \neq 0$ для рассматриваемых случаев дифракции ($\Lambda_0 \rightarrow M_1$ и $M_0 \rightarrow \Lambda_1$) существует ограничение по частоте снизу. Для того чтобы дифракция была возможна, необходимо, чтобы

$$k_0 > k_1 \frac{|n_0^2 - n_e^2|}{n_0 n_e}, \quad (19)$$

т.е. частота звука $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$ должна удовлетворять неравенству

$$f_0 > uk_1 \frac{|n_0^2 - n_e^2|}{2\pi n_0 n_e}, \quad (20)$$

где u — скорость звука.

Таким образом, при повороте волнового вектора света k в сторону от плоскости, в которой лежит волновой вектор звука k_0 и ось кристалла (рис. 1), дифракция $\Lambda_0 \rightarrow M_1$ или $M_0 \rightarrow \Lambda_1$ при соответствующих значениях u , k_1 , n_0 , n_e должна исчезнуть. Если, например, $k_1 \sim 10^5$, $n_0 = 2.26$, $n_e = 2.41$, $|n_0^2 - n_e^2| \sim 0.7$, $u = 0.6 \cdot 10^5$ (последние данные для парателлуриата), то частота f_0 должна быть больше 10^8 Гц.

В то же время дифракция вида $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$ или $M_0 \rightarrow M_1$ без поворота плоскости поляризации возможна.

Несколько слов о соотношениях, выведенных Диксоном [4] для брэгговских углов в случае произвольного направления k и k_0 . Например, для угла падения Диксон приводит выражение, вошедшее во все позднейшие обзоры,

$$\sin \theta_i = \frac{\lambda_0}{2n_i \Lambda} \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\lambda_0^2} (n_i^2 - n_d^2) \right]. \quad (21)$$

Здесь λ_0 — длина волны света в пустоте, Λ — длина волны звука, n_i и n_d — показатели преломления для падающей и дифрагированной волн. Аналогичное выражение существует для $\sin \theta_\alpha$. В тех случаях, когда n_i и n_d совпадают с n_0 и n_e (в том или ином порядке), против этих выражений возразить нечего.

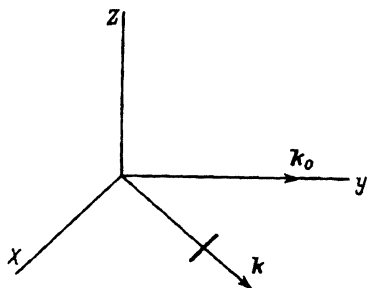


Рис. 2. Свет и звук распространяются в базисной плоскости одноосного кристалла.

Например, если свет и звук распространяются в базисной плоскости (рис. 2) и происходит переход $\Lambda_0 \rightarrow M_1$, то

$$k_2 = -\frac{k_0}{2} \left[1 + \frac{\kappa^2}{k_0^2} (n_e^2 - n_0^2) \right], \quad (22)$$

что совпадает с формулой (21), если учесть, что

$$k_2 = k \sin \theta = \varkappa n_0 \sin \theta.$$

Однако показатель преломления необыкновенной волны зависит от угла, под которым она распространяется. Если хотя бы один из показателей n_i или n_α зависит от углов Θ_i или Θ_α , то выражения вида (21) представляют собой неявные функции этих углов и из них нельзя найти $\sin \Theta_i$ и $\sin \Theta_\alpha$. Явные выражения для этих величин для конкретных случаев дифракции приведены выше (формулы (14), (16)–(18)).

Из левой части уравнения (9) можно получить и условия брэгговских резонансов высших порядков [6]. Они соответствуют переходам $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_2$, $\Lambda_0 \rightarrow M_2$, $M_0 \rightarrow \Lambda_2$, $M_0 \rightarrow M_2$, $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_3$ и т.д.

Рассмотрим условия возникновения этих резонансов. Вычислениям надо предварить следующие соображения. Выше уже говорилось, что в левую часть (9) не обязательно входят все Λ_n и M_n , так что каждую из нижеприведенных формул надо сопроводить словами: «если такой переход возможен, т.е. если обе величины входят в левую часть (9)».

Из условия совместного равенства нулю Λ_0 и Λ_2

$$\Lambda_0 = n_e^2 (\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2), \quad (23a)$$

$$\Lambda_2 = n_e^2 (\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - (k_2 + 2k_0)^2 - k_3^2) \quad (23b)$$

получаем

$$k_2 = -k_0. \quad (24)$$

Для перехода $\Lambda_0 \rightarrow M_2$, где

$$M_2 = \varkappa^2 n_0^2 n_e^2 - n_0^2 k_1^2 - n_0^2 (k_2 + 2k_0)^2 - n_e^2 k_3^2,$$

имеем два возможных условия второго брэгговского резонанса

$$k_2 = -\frac{2k_0}{\eta} (1 + \eta) \left[1 \pm \frac{n_e}{n_0} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{1 + \eta} \frac{k_1^2}{4k_0^2}} \right]. \quad (25)$$

Такой переход и, следовательно, такая дифракция невозможны при геометрии рис. 1 и $k_1 = 0$, так как в этом случае в левую часть уравнения (9) входят $\Lambda_0 M_1 \Lambda_2 M_3 \Lambda_4 \dots$ или $M_0 \Lambda_1 M_2 \Lambda_3 M_4 \dots$, так что пары $\Lambda_0 \rightarrow M_2$ нет. Для перехода $M_0 \rightarrow M_2$ получаем снова

$$k_2 = -k_0. \quad (26)$$

Для перехода $M_0 \rightarrow \Lambda_2$, если оба множителя (M_0 и Λ_2) есть в уравнении (9),

$$k_2 = \frac{2k_0}{\eta} \left(1 \pm \frac{n_0}{n_e} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{1 + \eta} \frac{k_1^2}{4k_0^2}} \right). \quad (27)$$

3. Приближение к брэгговскому резонансу

Решая дисперсионное уравнение, находим амплитуды и фазы дифрагированных волн. Волна, находящаяся в брэгговском резонансе с основной компонентой, имеет амплитуду, знаменатель которой становится минимальным в точке резонанса (это и есть второй малый множитель в левой части уравнения (9)). Степень приближения к резонансу определяет величина, называемая расстройкой. Обозначим ее ε для изотропной среды и ε_c для кристалла. Расстройку можно

найты и без решения уравнения (9), непосредственно из вида его левой части. В простейшем случае перехода $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$ для отыскания точного резонанса решаем совместно уравнения $\Lambda_0 = \Lambda_1 = 0$. При приближении к резонансу запишем

$$\Lambda_1 - \Lambda_0 = k_0^2 n_0^2 \epsilon. \quad (28)$$

В точке резонанса $\epsilon = 0$. При такой нормировке ϵ оказывается безразмерным малым параметром, который можно сравнивать с другими малыми параметрами задачи, например с q .

Из (28) получаем

$$\epsilon = 1 + 2 \frac{k_2}{k_0}. \quad (29)$$

При $\epsilon = 0$ в точке резонанса $k_2 = -(k_0/2)$.

В случае перехода $M_0 \rightarrow \Lambda_1$ с поворотом плоскости поляризации запишем

$$M_0 - \Lambda_1 = k_0^2 n_e^2 \epsilon_c,$$

откуда

$$\epsilon_c = 1 + 2 \frac{k_2}{k_0} - \frac{\eta}{k_0^2} (k_1^2 + k_2^2). \quad (30)$$

Из (30) следует

$$k_2 = \frac{k_0}{\eta} \left(1 \pm \sqrt{1 + \eta(1 - \epsilon_c) - \eta^2 \frac{k_1^2}{k_0^2}} \right). \quad (31)$$

При $\epsilon_c = 0$, т. е. в точке резонанса, имеем снова (16). Для перехода $\Lambda_0 \rightarrow M_1$ обозначим

$$\Lambda_0 - M_1 = k_0^2 n_0^2 \epsilon_c, \quad (32)$$

тогда

$$\epsilon_c = 1 + 2 \frac{k_2}{k_0} + \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_0^2}, \quad (33)$$

откуда при приближении к брэгговскому резонансу

$$k_2 = -k_0 \frac{1 + \eta}{\eta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\eta}{1 + \eta} (1 - \epsilon_c) - \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{k_1^2}{k_0^2}} \right). \quad (34)$$

При $\epsilon_c = 0$ имеем снова (14).

Рассмотрим расстройку ϵ_2 по отношению к брэгговскому резонансу второго порядка $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_2$. Удобно положить

$$\Lambda_0 - \Lambda_2 = 2k_0^2 n_e^2 \epsilon_2, \quad (35)$$

откуда

$$\epsilon_2 = 2 + 2 \frac{k_2}{k_0}. \quad (36)$$

При $\epsilon_2 = 0$ имеем $k_2 = -k_0$.

Для перехода $M_0 \rightarrow M_2$ удобно положить

$$M_0 - M_2 = 2k_0^2 n_0^2 \epsilon_2, \quad (37)$$

ϵ_2 совпадает с (36).

Для перехода $\Lambda_0 \rightarrow M_2$, если таковой возможен,

$$\Lambda_0 - M_2 = 2k_0^2 n_0^2 \epsilon_{c_2}, \quad (38)$$

откуда

$$\epsilon_{c_2} = 2 + 2 \frac{k_2}{k_0} + \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_0^2}. \quad (39)$$

4. Дифракция света на ультразвуке в одноосных кристаллах при произвольном направлении света

Рассмотрим геометрию взаимодействия света и звука, представленную на рис. 1. Волновой вектор света k направлен произвольным образом. Волновой вектор звука k_0 лежит в базисной плоскости; его направление принято за ось OY . Колебания звука происходят в направлении OX , так что отличны от нуля только компоненты $u_{12} = u_{21}$ тензора деформации. Допустим, что кристалл тетрагональный (4mm и др.) или гексагональный (3m и др.). В указанных условиях в формуле (4) отличен от нуля только a_{1212} (или a_{2112}), так что тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} n_0^2 & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}.$$

Три проекции волнового уравнения (2) после подстановки решения (5) дают три уравнения для амплитуд $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и $A_n^{(3)}$. Из третьего уравнения можно выразить $A_n^{(3)}$ через $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, в результате чего получаем два разностных уравнения, которые надо решать уже совместно.

Каждое из уравнений представляет собой линейную однородную функцию величин $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_{n\pm 1}^{(1)}$, $A_{n\pm 1}^{(2)}$. Коэффициентами служат величины типа (7) и (8). Ввиду громоздкости уравнений мы не выписываем их явно. Обозначим первое из них $K_n = 0$, второе $L_n = 0$. Полагая $n = 0, \pm 1, \pm 2$ и т.д., запишем два столбика

$$\begin{aligned} K_{-2} &= 0 & L_{-2} &= 0, \\ K_{-1} &= 0 & L_{-1} &= 0, \\ K_0 &= 0 & L_0 &= 0, \\ K_1 &= 0 & L_1 &= 0, \\ K_2 &= 0 & L_2 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

В случае, когда $k_1 = 0$ (т.е. k , k_0 и ось кристалла лежат в одной плоскости), уравнения (40) разбиваются на две подсистемы, каждая из которых состоит из своих A_n . Одна из них показана ломаной линией (лесенкой), вторую «лесенку» можно провести между незатронутыми уравнениями. Одна из «лесенок» отвечает нулевой компоненте, представляющей собой обыкновенную волну, вторая — необыкновенную.

Случай $k_1 = 0$ рассмотрен в работе [8]. Если же $k_1 \neq 0$, то связанными между собой оказываются все уравнения, что усложняет дело. Тем не менее принцип, согласно которому $A_n \sim q^n$, если q не соответствует брэгговскому отражению какого-либо порядка, позволяет оборвать систему на достаточно больших n . В данном случае можно положить $A_{\frac{1}{3}}^{(1)} = A_{\frac{2}{3}}^{(2)} = A_{\frac{1}{3}}^{(1)} = A_{\frac{2}{3}}^{(2)} = 0$. Из крайних

верхнего и нижнего уравнений можно будет выразить $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$ через $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$. Затем эти последние выражаются через $A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$. Эти выражения имеют вид непрерывных дробей с двумя «этажами». При обрыве на A_4 «этажей» было бы три. В работе [5] показано, что получающиеся при точном решении непрерывные дроби являются всегда сходящимися.

В центральной строчке столбиков (40) каждое из уравнений $K_0 = 0$ и $L_0 = 0$ содержит после указанной процедуры только $A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$. Совместность этих двух уравнений возможна только, если детерминант системы равен нулю. Это и есть дисперсионное уравнение для данного случая (раздел 1). Оно имеет вид (9).

Левая часть уравнения представляет много возможностей для брэгговской дифракции. При $q = 0$ (отсутствие звука) должны равняться нулю Λ_0 (если падающая световая волна обыкновенная) или M_0 (необыкновенная). При $q \neq 0$ должны быть малы Λ_0 или M_0 и один из последующих сомножителей. Переход $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_n$ или $M_0 \rightarrow M_n$ происходит без поворота плоскости поляризации, переходы $\Lambda_0 \rightarrow M_n$ или $M_0 \rightarrow \Lambda_n$ — с поворотом.

Рассмотрим дифракцию $M_0 \rightarrow \Lambda_1$, т.е. брэгговский переход первого порядка необыкновенной волны в обыкновенную (геометрия рис. 1). Фронт звуковой волны перпендикулярен к оси OY , т.е. лежит в плоскости XOZ . Угол падения света определяется отношением k_2/k . Проекция k_2 в брэгговском случае определены формулой (16). Существуют два угла дифракции, если частота звука превышает значение, определяемое формулой (20). Дифракция этого типа ($M_0 \rightarrow \Lambda_1$) не происходит, если частота звука меньше этого значения.

Малость M_0 и Λ_1 вблизи брэгговского резонанса выражается в том, что малы величины λ и $\lambda - \varepsilon_c$, вводимые в соответствии с формулами $M_0 = n_e^2 k_0^2 \lambda$ и $\Lambda_1 = n_e^2 k_0^2 (\lambda - \varepsilon_c)$. Здесь ε_c определяется формулой (30) и является критерием расстройки по отношению к брэгговскому резонансу. Дисперсионное уравнение (9) определяет возможные значения λ . Они оказываются равными

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_c \pm \sqrt{\varepsilon_c^2 + 4q^2 \left(\frac{k_3^2}{n_0^2 \omega^2} + f(k_1 k_2) \right)} \right). \quad (41)$$

Обычная ситуация такова, что для достижения брэгговского резонанса угол светового пучка с фронтом звука (плоскостью XOZ) должен быть невелик и в то же время k_1 ограничен соотношением (19). В этом случае $k_3 \cong \omega n_0$, тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\varepsilon_c \pm R], \quad (42)$$

где

$$R = \sqrt{\varepsilon_c^2 + 4q^2 (1 + f(k_1 k_2))}, \quad (43)$$

$$f(k_1 k_2) = \frac{k_1^2}{n_0^2} \frac{2k_2 k_0 - k_1^2 (2 + n_0^2 - n_e^2) + k_2^2 (2 - n_0^2 + n_e^2)}{(k_1^2 + k_2^2)} \quad (44)$$

При $k_1 = 0$, $f(k_1 k_2) = 0$ и соотношение (42) сводится к полученному в работе [8].

Можно показать, что коэффициент при $4q^2$ в (43) отрицательным не становится.

Из соотношения $M_0 = n_e^2 k_0^2 \lambda_{1,2}$ можно получить допустимые законы дисперсии для световых волн

$$k_3 = k_{30} - \frac{k_0^2}{4\omega n_0} (\varepsilon_c \pm R). \quad (45)$$

Здесь

$$k_{30} = n_0 \kappa \left(1 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2n_e^2 \kappa^2} \right) \quad (46)$$

Зная $\lambda_{1,2}$, можно вычислить M_0 и Λ_1 для этих двух корней и выразить $A_{1j}^{(1)}$ и $A_{1j}^{(2)}$ через $A_{0j}^{(1)}$ и $A_{0j}^{(2)}$ ($j = 1, 2$). Последние определяются из граничных условий. В результате оказывается

$$E_1^{(1)} = F_1 \frac{2q}{R} e^{i(k_1 x + (k_2 + k_0)y + k_{30}z - \frac{k_0^2}{4\kappa n_0} \epsilon_c z)} \sin \frac{k_0^2 R z}{4\kappa n_0}, \quad (47)$$

$$E_2^{(1)} = F_2 \frac{2q}{R} e^{i(k_1 x + (k_2 + k_0)y + k_{30}z - \frac{k_0^2}{4\kappa n_0} \epsilon_c z)} \sin \frac{k_0^2 R z}{4\kappa n_0}. \quad (48)$$

Здесь F_1 и F_2 — функции величин $k_1, k_2, k_0, \kappa, n_e, n_0$, не имеющие никаких особенностей в точке брэгговского резонанса $\epsilon_c = 0$.

Компонента $E_3^{(1)}$ представляет собой линейную комбинацию $E_1^{(1)}$ и $E_2^{(1)}$. Напомним, что нижний индекс — номер проекции на оси координат, а верхний — номер дифракционной компоненты, т.е. $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}$ и $E_3^{(1)}$ — проекции на оси первой дифракционной компоненты.

Нулевая компонента $E_1^{(0)}$ равна

$$E_1^{(0)} = A \frac{1}{2R} e^{i(k_1 x + k_2 y + k_{30}z - \frac{k_0^2}{4\kappa n_0} \epsilon_c z)} \left[(R - \epsilon_c) e^{-i \frac{k_0^2}{4\kappa n_0} R z} + (R + \epsilon_c) e^{i \frac{k_0^2}{4\kappa n_0} R z} \right], \quad (49)$$

аналогичный вид имеет $E_2^{(0)}$. Компоненты $E_1^{(1)}$ при $z = 0$, т.е. на границе образца, обращаются в нуль, а $E_1^{(0)}$ равны компонентам падающей волны $A e^{i(k_1 x + k_2 y)}$ при $z = 0$ (на границе образца).

Существенное отличие (47)–(49) от выражений, полученных в [8], заключается в ином брэгговском значении k_2 (16), приводящем при $k_1 \neq 0$ к ограничению (20) по частоте брэгговской дифракции, а также к новым выражениям для брэгговском расстройке ϵ_c (30) и для R (36).

Дифракция типа $\Lambda_0 \rightarrow M_1$, т.е. случай, когда падающая волна обыкновенная, и дифрагированная — необыкновенная, происходит при угле падения, определяемом формулой (14) (в простейшем случае при $k_1 = 0$ формулой (17)). Расстройка определяется формулой (33). Интенсивность дифракции типа $\Lambda_0 \rightarrow M_1$ велика в отличие от нижерассматриваемого случая.

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \kappa_{-2} = 0 \\ \kappa_{-1} = 0 \\ \kappa_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} L_{-2} = 0, \\ L_{-1} = 0, \\ L_0 = 0, \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} L_1 = 0, \\ L_2 = 0. \end{array} \end{array} \quad (40)$$

Рис. 3. В отличие от рис. 1 звук направлен вдоль оси кристалла.

На рис. 3 поляризация звука имеет другое направление по сравнению с рис. 1. Это весьма сильно меняет результат. От нуля отлична только компонента тензора деформации $u_{23} = u_{32}$. Соответственно для рассматриваемых одноосных кристаллов (4шт и т.д., 3шт и т.д.) отличны от нуля кроме диагональных только ϵ_{23} и ϵ_{32} . Это меняет связь между компонентами поля E_1, E_2 и E_3 . Решение задачи показывает, что при поляризации рис. 3 дифракция

оказывается гораздо слабее, чем для представленной на рис. 1. Заметим, кстати, что диаграммы Диксона не отличают один случай от другого.

Список литературы

- [1] Гуляев Ю.В., Проклов В.В., Шкредин Г.Н. // УФН. 1978. Т. 124. № 1. С. 61–111.
- [2] Балакиши В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. М.: Радио и связь, 1985.
- [3] Физическая энциклопедия. М., 1988. Т. 1. 677 с. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. М., 1979. 126 с.
- [4] Dixon R.W. // IEEE. I. 1967. Vol. QE-3. N 2. P. 85–93.
- [5] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф. // РиЭ. 1977. Т. 22. № 8. С. 1551–1556.
- [6] Зильберман Г.Е., Сидоров И.Н., Купченко Л.Ф. // РиЭ. 1982. Т. 27. № 2. С. 241–247.
- [7] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф., Голтвянская Г.Ф. // РиЭ. 1983. Т. 28. № 8. С. 1518–1524.
- [8] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф., Голтвянская Г.Ф. // РиЭ. 1984. Т. 29. № 11. С. 2095–2101.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1957. 99 с.
- [10] Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., 1960. 295 с.

Поступило в Редакцию 5 марта 1991 г.

В окончательной редакции 10 июня 1991 г.