1992 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 62, в. 4

1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 62, N 4

01; 05

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н.В.Дерендяев, В.А.Сеняткин

Решена задача о движении сверхпроводящего цилиндра во внешнем однородном магнитном поле. Движение цилиндра осуществляется в плоскости, ортогональной внешнему магнитному полю, из состояния покоя. Вычислена сила, действующая на сверхпроводник, а также электрический ток, текущий через его поперечное сечение. Предложен способ решения задачи об излучении волн с условием на фронте волны.

Введение

В рамках уравнений Лондонов рассмотрена задача о движении бесконечно длинного цилиндрического сверхпроводника во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Задача о нахождении электромагнитного поля вне сверхпроводника сводится к решению гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями на поверхности сверхпроводника и на одной из его характеристик. Условие разрешимости данной краевой задачи записывается в виде интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Решив это интегральное уравнение, можно вычислить электромагнитное поле во всем пространстве, электрический ток в сверхпроводнике и силу, действующую на сверхпроводник, движущийся в магнитном поле.

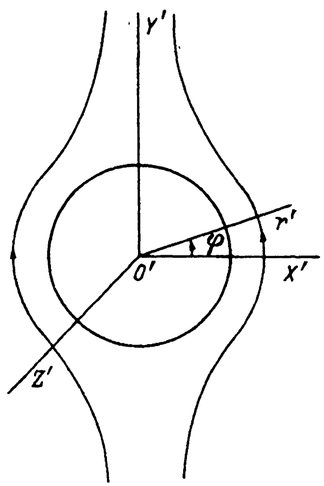

Рис. 1.

Стационарный случай

Пусть бесконечно длинный сверхпроводящий цилиндр радиуса a покоится в лабораторной системе отсчета $O'x'y'z'$ во внешнем постоянном однородном магнитном поле, перпендикулярном оси цилиндра (рис. 1). Введем правую цилиндрическую систему координат r', φ', z', выбрав $O'z'$ вдоль оси цилиндра. Магнитное поле при $r' > a$ описывается уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0, \qquad (1.1)$$

а при $r' \leq a$ уравнениями Лондонов [1]

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial J_{z'}}{\partial \varphi'} = -\frac{c\lambda^2}{4\pi} B_{r'},$$
$$\frac{\partial J_{z'}}{\partial r'} = \frac{c\lambda^2}{4\pi} B_{\varphi'}$$
$$\frac{1}{r'}\left(\frac{\partial r' B_{\varphi'}}{\partial r'} - \frac{\partial B_{r'}}{\partial \varphi'}\right) = \frac{4\pi}{c} J_{z'}; \quad \lambda = 1/\lambda_L, \qquad (1.2)$$

где λ_L — постоянная Лондона; $B_{r'}$, $B_{\varphi'}$ — компоненты индукции магнитного поля; B_0 — значение индукции внешнего поля; $J_{z'}$ — компонента плотности тока.

Граничные условия к уравнениям (1.1), (1.2) имеют вид

$r' \to \infty$	$B_{\varphi'} = B_0 \cos\varphi'$, $B_{r'} = B_0 \sin\varphi'$,	
$r' = a$	поля $B_{r'}$, $B_{\varphi'}$ непрерывны,	
$r' = 0$	поля $B_{r'}$, $B_{\varphi'}$ ограничены.	(1.3)

Будем искать решение задачи (1.1)–(1.3) в виде

$$B_{r'} = \hat{B}_{r'}(r')\sin\varphi', \quad B_{\varphi'} = \dot{B}_{\varphi'}(r')\cos\varphi', \quad J_{z'} = \dot{J}_{z'}(r')\cos\varphi'. \qquad (1.4)$$

(OF)

Подставив (1.4) в уравнения (1.1), (1.2), придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решив которую с граничными условиями (1.3), получим

$$r' < a \quad B_{r'} = \frac{2B_0}{\lambda r'}\frac{I_1(\lambda r')}{I_0(\lambda a)}\sin\varphi', \quad B_{r'} = \frac{2B_0}{I_0(\lambda a)}\left(I_0(\lambda r') - \frac{1}{\lambda r'} I_1(\lambda r')\right)\cos\varphi',$$
$$J_{z'} = \frac{\lambda c}{2\pi} B_0 \frac{I_1(\lambda r')}{I_0(\lambda a)}\cos\varphi', \qquad (1.5)$$

$$r' > a \quad B_{r'} = B_0\left(1 - \frac{a^2}{r'^2} + \frac{2a}{\lambda r'^2}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right)\sin\varphi',$$
$$B_{\varphi'} = B_0\left(1 + \frac{a^2}{r'^2} - \frac{2a}{\lambda r'^2}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right)\cos\varphi', \qquad (1.6)$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя.

Нестационарный случай

Перейдем в систему отсчета Oxyz, движущуюся с постоянной скоростью v вдоль оси O'x', ортогональной оси цилиндра и внешнему магнитному полю (рис. 2). В этой системе возникает электрическое поле $E = 1/c\,[v, B] + O(v^2/c^2)$, при-

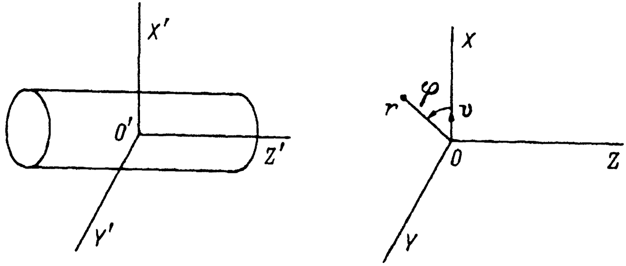

Рис. 2.

чем поля **B**, **E** меняются во времени, так как поле **B** вблизи цилиндра неоднородно, а цилиндр в системе Oxyz движется со скоростью $-ve_x$.

Пусть в момент времени $t = 0$ система Oxyz совпадает с O'x'y'z', а цилиндр при $t = 0$ мгновенно останавливается в системе Oxyz (или, что то же самое, мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью ve_x в лабораторной системе O'x'y'z'). Возмущение электромагнитного поля, вызванное остановкой цилиндра в Oxyz, будет локализовано в области, ограниченной фронтом волны возмущения $x^2 + y^2 = (a + ct)^2$; $t \geq 0$, c — скорость света в вакууме. Вне этой области электромагнитное поле в системе Oxyz в силу преобразования Лоренца записывается в виде

$$
\begin{aligned}
B_r &= B_0 \sin\varphi + AB_0 \frac{(v^2t^2 - r^2)\sin\varphi}{(r^2 + 2vtr\cos\varphi + v^2t^2)^2} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \\
B_\varphi &= B_0 \cos\varphi + AB_0 \frac{2vtr + (v^2t^2 + r^2)\cos\varphi}{(r^2 + 2vtr\cos\varphi + v^2t^2)^2} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \\
E_z &= \frac{vB_0}{c}\left[1 + A\frac{r^2\cos 2\varphi + 2vtr\cos\varphi + v^2t^2}{(r^2 + 2vtr\cos\varphi + v^2t^2)^2}\right] + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \\
B_z &= 0; \quad E_r = E + \varphi = 0; \quad A = a^2\left(1 - \frac{2}{\lambda a}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты (правые) в системе отсчета Oxyz.

В области возмущения $(a < r \leq a + ct)$ электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла, которая в случае, когда поле не зависит от z, распадается на две подсистемы

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_r}{\partial t}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \\
&\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}, \\
&\frac{\partial}{\partial r} rB_r + \frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} rE_r + \frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} = 0, \\
&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} rB_\varphi - \frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rE_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Внутри сверхпроводника $(r \leq a)$ электромагнитное поле описывается системой уравнений Лондонов, которая в рассматриваемом случае также распадается на две подсистемы

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rB_\varphi - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right) = \frac{4\pi}{c}J_z, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = \frac{4\pi}{c}J_r,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} = -\frac{c\lambda^2}{4\pi}B_r, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c}J_\varphi,$$
$$\frac{\partial J_z}{\partial r} = \frac{c\lambda^2}{4\pi}B_\varphi, \quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rJ_\varphi - \frac{\partial J_r}{\partial \varphi}\right) = \frac{c\lambda^2}{4\pi}B_z,$$
$$\frac{\partial J_z}{\partial t} = \frac{c^2\lambda^2}{4\pi}E_z, \quad \frac{\partial J_r}{\partial t} = \frac{c^2\lambda^2}{4\pi}E_r; \quad \frac{\partial J_\varphi}{\partial t} = \frac{c^2\lambda^2}{4\pi}E_\varphi. \tag{2.3}$$

Краевые условия к системам (2.2), (2.3) содержат условие непрерывности полей **B**, **E** на поверхности сверхпроводящего цилиндра $r = a$ и условие совпадения решения системы (2.2) с полем (2.1) на фронте волны возмущения $r=a + ct$.

Вторые слагаемые в (2.1) убывают за время $\sim a/c$. Таким образом, при $t >> a/c$ условия на фронте волны возмущения в нерелятивистском приближении записываются в виде

$$B_r = B_0 \sin\varphi + O\left(\frac{a^2}{c^2t^2}\right),$$
$$B_\varphi = B_0 \cos\varphi + O\left(\frac{a^2}{c^2t^2}\right),$$
$$E_z = \frac{vB_0}{c} + O\left(\frac{a^2}{c^2t^2}\right); \quad B_z = 0; \quad E_r = E_\varphi = 0; \quad r = ct + a. \tag{2.4}$$

Правые подсистемы уравнений (2.2), (2.3) относительно компонент B_z, E_r, E_φ, J_r, J_φ имеют нулевое решение, непрерывное при $r = a$ и удовлетворяющее нулевым условиям (2.4) при $r = a + ct$.

В силу линейности левых подсистем уравнений (2.2), (2.3) и краевых условий к ним удобно строить решение в виде разложения в ряд Фурье по координате φ. Для гармоник выше первой в силу однородности уравнений и нулевых условий при $r = a + ct$ получим тривиальное решение. Уравнениям для первой гармоники и соответствующим краевым условиям при $t >> a/c$ удовлетворяет решение стационарной задачи (1.5), (1.6). Следовательно, задача (2.3)–(2.4) при $t >> a/c$ сводится к нахождению нулевой гармоники по φ компонент электромагнитного поля B_r, B_φ, E_z и J_z. Полагая $\partial/\partial\varphi \equiv 0$, из левой подсистемы (2.3) получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r} = \frac{4\pi}{c}J_z, \quad B_z = 0,$$
$$\frac{\partial J_z}{\partial r} = \frac{c^2\lambda^2}{4\pi}B_\varphi, \quad \frac{\partial J_z}{\partial t} = \frac{c^2\lambda^2}{4\pi}E_z; \quad r < a. \tag{2.5}$$

Решение этой системы, убывающее в глубь сверхпроводника, легко находится и имеет вид

$$J_z = f(t)I_0(\lambda r); \quad B_r = 0; \quad B_\varphi = \frac{4\pi}{c\lambda^2}f(t)\frac{dI_0(\lambda r)}{dr},$$
$$E_z = \frac{4\pi}{c^2\lambda^2}\frac{df(t)}{dt}I_0(\lambda r). \tag{2.6}$$

Из левой подсистемы (2.2) при $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ получим

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial r B_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad a < r \le a + ct. \tag{2.7}$$

Из системы (2.7), решения (2.6) и условия непрерывности поля B_z при $r = a$ получим $B_z = 0$; $a < r \le a + ct$. Таким образом, приходим к краевой задаче для гиперболической системы уравнений относительно E_z, B_φ

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{2.8}$$

с краевыми условиями на характеристике

$$B_\varphi = 0, \quad E_z = \frac{vB_0}{c}; \quad r = a + ct \tag{2.9}$$

и на поверхности сверхпроводника

$$E_z = \frac{I_0(\lambda a)}{\lambda I_1(\lambda a)} \cdot \frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}; \quad r = a. \tag{2.10}$$

Введем функцию $\psi(r, t)$, такую что

$$E_z = \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad B_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.8), получим уравнение относительно $\psi(r, t)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{2.12}$$

Введем характеристические переменные $\xi = r - ct$; $\eta = r + ct$. Получим из (2.9), (2.10), (2.12) уравнение Дарбу

$$L(\psi) \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{2}\frac{1}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{2.13}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{vB_0}{c}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = a, \tag{2.14}$$

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\frac{I_0(\lambda a)}{I_1(\lambda a)}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right); \quad \xi + \eta = 2a. \tag{2.15}$$

Из условий (2.14), исключая $\partial\psi/\partial\xi$ и интегрируя по η, получим

$$\psi\Big|_{\xi = a} = \frac{vB_0}{2c}\eta - A_0,$$

где A_0 — постоянная.

В силу второго условия (2.14) и условия (2.15) получим $\psi\Big|_{\substack{\xi=a\\ \eta=a}} = 0$. Следовательно,

$$A_0 = \frac{vB_0}{2c}a$$

и

$$\psi = \frac{vB_0}{2c}(\eta - a); \quad \xi = a. \tag{2.16}$$

Покажем, что из условия (2.16) вытекают условия (2.14). Дифференцируя (2.16) по η, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big|_{\xi=a} = \frac{vB_0}{2c}. \tag{2.17}$$

Запишем уравнение (2.13) при $\xi = a$ с учетом (2.17)

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{a+\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{vB_0}{2c}\right) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение по η, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=a} = c_1(a+\eta)^{-1/2} - \frac{vB_0}{2c}. \tag{2.18}$$

Отсюда при $\xi = a$, $\eta = a$ с учетом (2.15), (2.16) следует

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=a}} = 0. \tag{2.19}$$

Подставляя в (2.19) условия (2.17) и (2.18), получим $C_1 = 0$ и

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=a} = -\frac{vB_0}{2c},$$

откуда в совокупности с (2.17) следует выполнение обоих условий (2.14). Таким образом, два условия (2.14) эквивалентны одному условию (2.16).

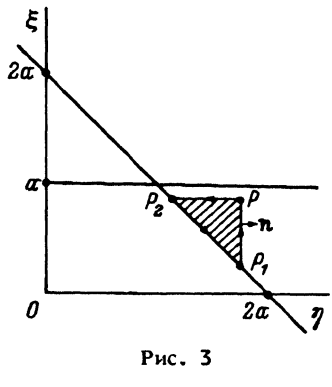

Рис. 3

Будем искать решение гиперболического уравнения (2.13) с краевыми условиями (2.15), (2.16). В плоскости переменных ξ, η область определения решения $\xi \le a$, $\xi + \eta \ge 2a$ (рис. 3). Если бы оба краевые условия были заданы на прямой $\xi + \eta = 2a$, то сформулированная задача была бы задачей Коши, решение которой строится методом Римана [2]. Тем не менее оказывается возможным редуцировать задачу (2.13), (2.15), (2.16) к задаче Коши, воспользовавшись методологией Римана. Дифференциальное уравнение, сопряженное с (2.13), имеет вид

$$M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{u}{2(\xi+\eta)} - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{u}{2(\xi+\eta)} = 0. \tag{2.20}$$

Выберем треугольник P_1PP_2, ограниченный характеристиками $\xi = x \leq a$, $\eta = y \geq a$ и прямой $\xi + \eta = 2a$. Воспользуемся формулой Грина

$$\int_s [uL(\psi) - \psi M(u)]\, ds = \int_l [X\cos(\mathbf{n},\xi) + Y\cos(\mathbf{n},\psi)]\, dl, \tag{2.21}$$

где s — площадь, ограниченная треугольником P_1PP_2; l — контур треугольника P_1PP_2; n — внешняя нормаль к контуру (рис. 3),

$$X = \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \psi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + \frac{u\psi}{2(\xi+\eta)},$$
$$Y = \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - \psi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) + \frac{u\psi}{2(\xi+\eta)}. \tag{2.22}$$

Так как $L(\psi) = 0$, $M(u) = 0$, то из (2.21) получим

$$\int_{P_1}^{P} Yd\xi - \int_{P}^{P_2} Xd\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{P_2}^{P_1}(X+Y)dl = 0. \tag{2.23}$$

Интегрируя по частям первые два члена в (2.23), приведем их к виду

$$\int_{P_1}^{P} Yd\xi = \frac{1}{2}(u\psi)_P - \frac{1}{2}(u\psi)_{P_1} - \int_{P_1}^{P}\psi\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{u}{2(\xi+\eta)}\right)d\xi, \tag{2.24}$$

$$\int_{P}^{P_2} Xd\eta = \frac{1}{2}(u\psi)_{P_2} - \frac{1}{2}(u\psi)_P - \int_{P}^{P_2}\psi\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{u}{2(\xi+\eta)}\right)d\eta. \tag{2.25}$$

Определим функцию u с помощью условий

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{u}{2(\xi+\eta)} = 0 \quad \xi = x;$$
$$\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{u}{2(\xi+\eta)} = 0 \quad \eta = y;$$
$$u = 1 \quad P\begin{cases}\xi = x\\ \eta = y\end{cases} \tag{2.26}$$

Функция u, удовлетворяющая задаче Гурса (2.20), (2.26), носит название функции Римана. В рассматриваемом случае она имеет вид [2]

$$u(\xi,\eta,x,y,) = \left(\frac{\xi+\eta}{x+y}\right)^{1/2}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\zeta\right), \tag{2.27}$$

где

$$\zeta = -\frac{(\xi - x)(\zeta - y)}{(\xi + \eta)(x + y)},$$

F — гипергеометрический ряд.

На характеристиках $\xi = x$ и $\eta = y$ функция $F = 1$, а функция u имеет вид

$$u(\xi, \eta, x, y,) = \left(\frac{\xi + \eta}{x + y}\right)^{1/2} \qquad (2.28)$$

Из уравнения (2.23) с учетом (2.24)–(2.26) получим

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2}\left[(u\psi)_{P_1} + (u\psi)_{P_2}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{P_2}^{P_1}(X + Y)dl = 0. \qquad (2.29)$$

Вычислим X + Y на прямой P_2P_1 $(\xi + \eta = 2a)$, используя краевое условие (2.15). Получим

$$(X + Y)_{+\eta=2a} = \frac{1}{2}\left(\lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}u + \frac{u}{a} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{+\eta=2a} \psi(2a - \eta, \eta). \qquad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.29) и принимая во внимание, что на прямой P_2P_1 $dl = \sqrt{2}d\eta$, получим

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{x + y}}(\psi(2a - y, y) + \psi(x, 2a - x))$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2a-x}^{y}\left(\lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}u + \frac{u}{a} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{+\eta=2a} \psi(2a - \eta, \eta)d\eta. \qquad (2.31)$$

Потребовав, чтобы ψ удовлетворяла условию (2.16), придем к уравнению

$$\psi(2a - y, y) = \frac{vB_0}{c}(y - a)\sqrt{\frac{a + y}{2a}} -$$
$$\int\limits_{a}^{y}\sqrt{\frac{a + y}{2a}}\left(\lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}u + \frac{u}{a} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\substack{x=a \\ \xi=2a-\eta}} \psi(2a - \eta, \eta)d\eta. \qquad (2.32)$$

Это уравнение Вольтерра 2-го рода относительно функции $\psi(2a - y, y)$. Решив уравнение (2.32), найдем функцию $\psi(2a - y, y)$ и получим второе условие на прямой $\xi + \eta = 2a$. Таким образом, задача с уравнением (2.13), краевым условием (2.15) и условием на характеристике (2.16) редуцируется к задаче Коши в двумя условиями на поверхности сверхпроводящего цилиндра. Если известно решение уравнения (2.32), то, подставляя $\psi(2a - y, y)$ в уравнение (2.31), можно взятием квадратуры вычислить функцию $\psi(x, y)$ в любой точке, решив тем самым задачу о распределении электромагнитного поля при движении сверхпроводящего цилиндра во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Вычисление электрического тока и электромагнитной силы, действующей на движущийся сверхпроводник

Сделаем обратную замену независимых переменных ξ, $\eta \to$ r, t; тогда $\psi(2a - y, y) \to \psi(a, t)$ и уравнение (2.32) примет вид

$$\psi(a,t) = vB_0 t\sqrt{\frac{2a+ct}{2a}} - c\sqrt{\frac{2a+ct}{2a}}\int\limits_0^t \left(\lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}u + \frac{u}{a} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}\psi(a,\tau)d\tau, \quad (3.1)$$

где

$$u(r,t,\tau) = \left(\frac{2r}{2a+ct}\right)^{1/2}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\zeta\right), \quad \zeta = -\frac{(r-c\tau+a)(r+c\tau-a-ct)}{2r(2a+ct)}.$$

Из уравнений Лондонов (2.5) с использованием (2.11) получим

$$\frac{\partial J_z}{\partial t} = \frac{c\lambda}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

откуда при условии $t = 0$; $J_z = 0$ следует

$$J_z(r,t) = \frac{c\lambda^2}{4\pi}\psi(r,t). \quad (3.2)$$

Для вычисления силы, действующей на цилиндр со стороны электромагнитного поля **B**, **E**, используем тензор напряжений Максвелла [3]

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2+B^2)\right]. \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.3) вычисленные при $t >> a/c$ компоненты полей **B**, **E** и интегрируя по поверхности $r = a$, получим асимптотическую формулу для вычисления силы

$$\mathcal{F} = -\frac{\lambda a B_0\psi(a,t)}{2}e_x. \quad (3.4)$$

Таким образом, и электрический ток в сверхпроводнике, и сила, действующая на сверхпроводник при его движении во внешнем постоянном однородном магнитном поле, пропорциональны функции $\psi(a, t)$.

Будем искать решение интегрального уравнения (3.1) при условии $\lambda a >> 1$. Выясним сначала, как ведет себя функция $\psi(a, t)$ при $t << a/c$. В этом случае уравнение (3.1) имеет асимптотическое решение, которое записывается в виде

$$\psi(a,t) = \frac{vB_0}{\lambda c}(1 - e^{-\lambda ct}) + O\left(\frac{ct}{a}\right). \quad (3.5)$$

При $t << a/c$ функция $\psi(a, t)$ экспоненциально растет во времени от нуля при $t = 0$ до значения, равного приблизительно $vB_0/\lambda c$ при $t \sim 1/\lambda c$. При $t >> 1/\lambda c$ функция $\psi(a, t)$ найдена численно. На рис. 4 в логарифмическом масштабе приведена зависимость безразмерной функции

$$\overline{\psi} = \psi(a,t)\frac{c}{vB_0 a}$$

от безразмерного времени $\overline{t} = t(v/a)$ при параметрах $c/v = 10^8$, $\lambda a = 10$. Как видно из рисунка, при $t >> a/c$ зависимость становится степенной $\psi(t) \sim t^{\alpha}$, где $\alpha \approx 2.5$.

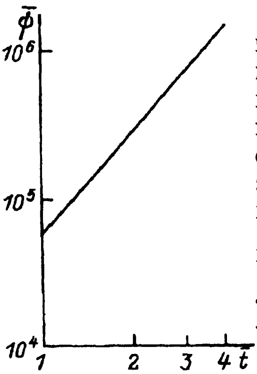

Рис. 4

С ростом времени растет амплитуда нулевой гармоники магнитной индукции. На рис. 5 качественно показано изменение во времени картины силовых линий магнитного поля. Буквами A и B обозначены точки, где индукция магнитного поля B обращается в нуль. При $t = t^*$ эти точки сливаются в одну, обозначенную буквой C, и возникает замкнутая силовая линия, охватывающая сверхпроводящий цилиндр. Положение точек A, B определяется из условия равенства нулю суммы нулевой и первой гармоник по φ индукции магнитного поля. С использованием решения для первой гармоники (1.6) и формулы (2.11) получим

$$2B_0\left(1 - \frac{1}{\lambda a}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right)\cos\varphi + \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \qquad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) краевой условие (2.15) в переменных r, t, получим

$$2B_0\left(1 - \frac{1}{\lambda a}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right)\cos\varphi + \lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\psi(a,t) = 0. \qquad (3.7)$$

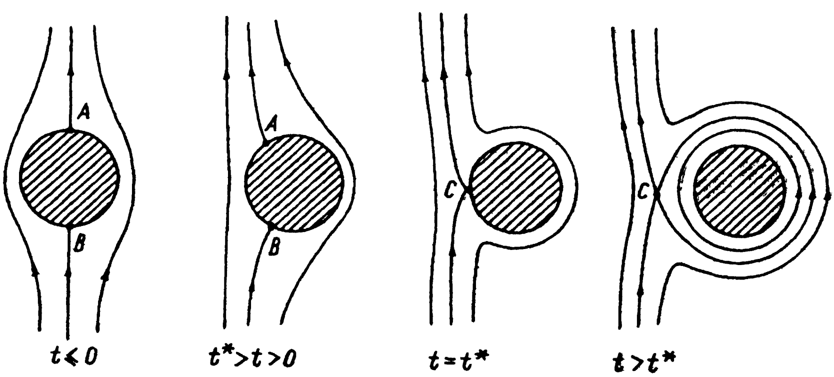

Рис. 5

При $t = t^*$ точки A и B сливаются ($\varphi = \pi$) и формула (3.7) принимает вид

$$2B_0\left(1 - \frac{1}{\lambda a}\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right) - \lambda\frac{I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\psi(a, t^*) = 0.$$

Отсюда, зная решение $\psi(a, t)$, можно найти время t^*. В приведенном выше примере (рис. 4) время $t^* \simeq 1.8\ a/v$.

Список литературы

[1] *Шриффер Дж.* Теория сверхпроводимости. М.: Наука, 1970. 312 с.

[2] *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 456 с.

[3] *Бредов М.М.*, *Румянцев В.В.*, *Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском университете им. Н.И.Лобачевского

Поступило в Редакцию
1 апреля 1991 г.