01; 05

О ДИНАМИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

А. С. Зильберглейт

Рассматривается временна́я эволюция степенных моментов прогиба поверхности слоя, внезапно освобожденного от нагрузок. Установлено, в частности, что изменение объема чаши прогиба поверхности является пилообразной функцией времени. Указаны некоторые приложения результатов.

1. В [1] даны формулы, устанавливающие связь степенных моментов $M_k(t)$

$$M_k(t) = 2\pi \int_0^\infty w(r,t) r^k dr\,,\ k = 0,1,2,\ldots \tag{1.1}$$

некоторой функции $w(r,t)$ с ее двойным преобразованием Лапласа—Ханкеля

$$\bar{\bar{w}}(\lambda,p) = \int_0^\infty \bar{w}(r,p)\, J_0(\lambda r) r dr = \int_0^\infty J_0(\lambda r) r dr \int_0^\infty e^{-pt} w(r,t) dt\,, \tag{1.2}$$

а именно

$$\overline{M}_{2m+1}(p) = 2\pi (-1)^m 2^{2m} m!\, \frac{d^m \bar{\bar{w}}(\lambda,p)}{d(\lambda^2)^m}\Big|_{\lambda=0}\,, \tag{1.3}$$

$$\overline{M}_{2m}(p) = 2\pi (-1)^m 2^{2m} \left(\tfrac{1}{2}\right)_m \int_0^\infty \frac{d^m \bar{\bar{w}}(\lambda,p)}{d(\lambda^2)^m}\, d\lambda\,,\ m = 0,1,2,\ldots \tag{1.4}$$

($\overline{M}_k(p)$ — преобразование Лапласа функции $M_k(t)$).

Эти формулы применялись к задаче о внезапном снятии осесимметричной статической нагрузки с поверхности однородного изотропного упругого полупространства, где в качестве $w(r,t)$ выступал относительный прогиб поверхности. Наряду с другими результатами были найдены явные выражения $M_{2m+1}(t)$ в виде нечетных полиномов от t степени $2m$+1; в частности, был установлен линейный закон изменения объема чаши прогиба $\delta V(t)$, совпадающего с $M_1(t)$,

$$\delta V(t) = M_1(t) = \frac{F}{G}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 c_1 t\,, \tag{1.5}$$

где F — результирующая сила, приложенная к полупространству; G — модуль сдвига, $c_{1,2}$ — скорости продольных и поперечных упругих волн.

Формула (1.5) легла в основу одного способа измерения механических параметров материала [2].

Цель настоящей работы — выяснить, как влияет на поведение упомянутых характеристик: а) изменение геометрии задачи (слой вместо полупространства), б) тип краевых условий на дополнительных границах, в) более общий характер нагружения.

2. Рассмотрим слой $0 < z < h$ (r,θ,z — цилиндрические координаты), занятый линейно упругой средой, лежащей на жестком основании. К свободной поверхности $z = 0$ приложены нормальная и касательная статические нагрузки

$$\sigma_z^0(r,0) = -\sigma_0(r) = -Gf(r)\,,\ f(r) = 0\,,\ r > a > 0\,,$$

$$\sigma_{rz}^0(r,0) = \tau_0(r) = Gg(r)\,, \qquad g(r) = 0\,,\ r > b > 0\,, \tag{2.1}$$

создающие в слое смещение $\mathrm{u}^0(r,z)$, прогиб поверхности $u_z^0(r,0) \equiv w_0(r)$.

Пусть в момент $t = 0$ нагрузки внезапно снимаются и начинается нестационарный процесс изменения деформированного состояния, в частности, формы поверхности. Представив искомый вектор перемещений $\mathrm{v}(r,z,t)$ в виде статической части и нестационарной добавки,

$$\mathrm{v}(r,z,t) = \mathrm{u}^0(r,z) - \mathrm{u}(r,z,t)\,, \tag{2.2}$$

получаем, что $\mathrm{u}(r,z,t)$ удовлетворяет в слое однородным уравнениям движения и нулевым начальным условиям, а при $z = 0$

$$\sigma_z(r,0,t) = -\sigma_0(r)\,;\ \sigma_{rz}(r,0,t) = \tau_0(r)\,,\ r \ge 0\,, t > 0\,. \tag{2.3}$$

Остается оговорить граничные условия при $z = h$. Рассмотрим два варианта:
а) слой покоится на жестком основании без трения,

$$u_z(r,h,t) = 0\,,\ \sigma_z(r,h,t) = 0\,; \tag{2.4}$$

б) слой жестко сцеплен с основанием,

$$u_z(r,h,t) = u_r(r,h,t) = 0\,. \tag{2.5}$$

3. Сформулированные начально-краевые задачи допускают решение известным методом [3, 4] с помощью преобразования Лапласа по времени и Ханкеля по радиусу. В результате находятся явные выражения для двойных трансформант всех искомых величин, в частности $\bar{w}(\lambda,p)$, являющейся трансформантой прогиба поверхности,

$$w(r,t) = u_z(r,0,t)\,. \tag{3.1}$$

В задаче а) с краевыми условиями (2.4) получаем

$$\bar{\bar{w}}(\lambda,p) = \frac{1}{p\Delta}\Big\{\frac{p^2}{c_2^2}\mathcal{F}(\lambda)\gamma_1\,\mathrm{sh}\gamma_1 h\,\mathrm{sh}\gamma_2 h +$$

$$+\lambda\tilde{g}(\lambda)\ [2\gamma_1\gamma_2\,\mathrm{sh}\gamma_1 h\,\mathrm{ch}\gamma_2 h - \left(2\lambda^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)\mathrm{sh}\gamma_2 h\,\mathrm{ch}\gamma_1 h]\Big\}\,, \tag{3.2}$$

$$\Delta = \Delta(\lambda,p) = (2\lambda^2 + \frac{p^2}{c_2^2})\,\mathrm{ch}\gamma_1 h\,\mathrm{sh}\gamma_2 h - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2\,\mathrm{ch}\gamma_2 h\,\mathrm{sh}\gamma_1 h\,. \tag{3.3}$$

Здесь

$$\gamma_i(\lambda,p) = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{c_i^2}}\,,\ i = 1,2\,, \tag{3.4}$$

а $\mathcal{F}$, $\tilde{g}(\lambda)$ — соответствующие преобразования Ханкеля функций $f(r)$ и $g(r)$, задающих, согласно (2.1), распределения нагрузок,

$$\mathcal{F}(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(r) J_0(\lambda r) r dr = \int\limits_0^a f(r)\, J_0(\lambda r) r dr\,, \tag{3.5}$$

$$\tilde{g}(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(r)\, J_1(\lambda r) r dr = \int\limits_0^a g(r)\, J_1(\lambda r) r dr\,.$$

Заметим, что при $\tilde{g}(\lambda) = 0$ и $h \to \infty$ (3.2) переходит в соответствующее выражение для полупространства (см. (1.9), (1.10) в [1]).

Теперь можно применить к $\overline{\overline{w}}(\lambda, p)$ формулы (1.3), (1.4). Так, из (3.1)—(3.4) и (1.3) с $m = 0$ следует

$$\overline{M}_1(p) = 2\pi\overline{\overline{w}}(0,p) = 2\pi\mathcal{F}(0)\frac{c_2^2}{c_1 p}\,\mathrm{th}\,\frac{ph}{c_1} =$$

$$= \frac{F}{G}\frac{c_2^2}{c_1 p}\left[\,1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{2h}{c_1}pn\right)\right], \tag{3.6}$$

поскольку из (2.1), (3.5) ясно, что $2\pi\mathcal{F}(0)G = F$. Восстанавливая оригинал лапласовского образа (3.6) с помощью теоремы запаздывания, находим

$$\delta V(t) = M_1(t) = \frac{F}{G}\frac{c_2^2}{c_1}\begin{cases} t - 2n\tau_1\,, & 2n\tau_1 \le t \le (2n+1)\tau_1\,, \\ -\,t + 2(n+1)\tau_1\,, & (2n+1)\tau_1 \le t \le 2(n+1)\tau_1\,, \end{cases}$$

$$n = 0,1,2,\ldots;\quad \tau_i = \frac{2h}{c_i}\,,\; i = 1,2\,. \tag{3.7}$$

Таким образом, в отличие от случая полупространства, для слоя изменение объема чаши прогиба поверхности оказывается кусочно-линейной функцией, удовлетворяющей условию $\delta V(t + 2\tau_1) = \delta V(t)$ для любого $t > 0$, причем "период" $2\tau_1$ определяется лишь толщиной слоя и скоростью объемных волн растяжения. С другой стороны, при $0 \le t \le \tau_1$, т. е. до прихода к поверхности $z = 0$ первой волны, отраженной от границы $z = h$, формулы (3.7) и (1.5) совпадают, как и было указано в [1]. Весьма естественно также, что, как видно из (3.7), касательная нагрузка (функция $g(r)$) на изменение объема чаши прогиба не влияет.

Выражения нечетных моментов $M_{2m+1}(t)$ высших порядков для (3.2) чрезвычайно громоздки и не могут быть представлены в обозримой форме при любом натуральном m, как в [1]. Как и $M_1(t)$, они являются непрерывными кусочно-полиномиальными функциями, причем значения моментов излома соответствующих кривых формируются характерными временами τ_1 и τ_2 ((3.7) дает простейший пример такой зависимости, в котором τ_2 не участвует). Каждая гладкая часть функции $M_{2m+1}(t)$ есть полином степени не выше $2m + 1$. В отличие от $M_1(t)$, функция $M_{2m+1}(t)$, $m > 0$ в общем случае не является ограниченной; при $t \to \infty$ $M_{2m+1}(t) \to \infty$, $m = 1,2,\ldots$ Понятно, что все высшие моменты зависят и от касательной нагрузки.

Что касается моментов четного порядка, то вычислить в замкнутой форме их изображения $\overline{M}_{2m}(p)$ по формуле (1.4) не удается из-за ее нелокального характера. Можно, однако, найти их асимптотику при $p \to \infty$ и установить тем самым поведение $M_{2m}(t)$ на малых временах ($t \to +0$); как и следовало ожидать, оно оказывается линейным по времени: результат в точности совпадает с тем, который имеет место для полупространства, в итоге асимптотика всех $M_k(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$ при $t \to +0$ дается выражением (3.6) из [1]. Касательная нагрузка, таким образом, на главный член асимптотики $M_k(t)$ при $t \to +0$ влияния не оказывает.

4. Обсудим вкратце задачу б) с граничным условием (2.5), выражение $\overline{\overline{w}}(\lambda,p)$ для которой еще сложнее, чем (3.2). Оказывается, однако, что $\overline{w}(\beta p)$ и $\overline{M}_1(p)$ по-прежнему даются формулой (3.6) и для $M_1(t)$ остается справедливым результат (3.7). Значит, характер контакта упругого слоя с жестким основанием не влияет на закон изменения объема чаши прогиба свободной поверхности. Поведение же остальных моментов отличается от такового в случае задачи а), а структура формул еше усложняется.

Заметим, что все установленные факты остаются в силе при соответствующих условиях и для конечного тела вращения высоты h на временах $t < l/c_1$, где l — расстояние от области приложения нагрузок до боковой поверхности, $l = R - \max\,(a, \beta)$, (см. (2.1)), R — радиус граничного круга $z = 0$.

Разумеется, можно говорить не о снятии, а о мгновенном приложении статических нагрузок, имея в виду моменты полного, а не относительного (отсчитанного от начального) прогиба поверхности.

5. Представляет также интерес обобщение, связанное с учетом диссипации (вязкоупругая среда). В простейшем случае внутреннего трения, пропорционального скорости (слагаемое $\mu\partial\mathrm{u}/\partial t$ в уравнениях движения, μ = const — коэффициент внутреннего трения), этот учет производится путем замены p^2/c_i^2 на $p^2/c_i^2 + \mu p$ в выражениях (3.4) для $\gamma_i(\lambda,p)$, $i = 1,2$. Таким путем для $\overline{M}_1(p)$ вместо (3.6) получаем

$$\overline{M}_1(p) = \frac{F}{G}\frac{c_2^2}{c_1 p}\frac{\operatorname{th}\left(\frac{h}{c_1}\sqrt{p^2+\mu c_1^2 p}\right)}{\sqrt{p^2+\mu c_1^2 p}} = \frac{F}{G}\frac{c_2^2}{c_1 p}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+\mu c_1^2 p}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\exp\left(-n\tau_1\sqrt{p^2+\mu c_1^2 p}\right)}{\sqrt{p^2+\mu c_1^2 p}}\right], \tag{5.1}$$

причем τ_1 берется из (3.7). Воспользовавшись теоремой о сдвиге и известным оригиналом изображения $(p^2 - \varkappa^2)^{-1/2} \exp\,[-\beta(p^2 - \varkappa^2)^{1/2}]$, $\varkappa$, β = const, $\beta \ge 0$ [5, с.228], находим

$$\delta V(t) = M_1(t) = \frac{F}{G}\frac{c_2^2}{c_1}\left[\int_0^t e^{-\alpha_1 s} I_0(\alpha_1 s)\,ds + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H(t - n\tau_1)\int_{n\tau_1}^{t} e^{-\alpha_1 s} I_0(\alpha_1(s - n\tau_1))\,ds\right], \tag{5.2}$$

где $\alpha_1 = \mu c_1^2$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда, $I_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя.

Как и (3.7), (5.2) представляет непрерывную ограниченную колеблющуюся кусочно-гладкую функцию с теми же точками излома $t = n\tau$, $n = 1,2,\ldots$ и той же линейной асимптотикой при $t \to +0$. Однако, в отличие от (3.7), гладкие части зависимости (5.1) линейными не являются. В противоположность (3.7), из (5.1) трудно установить также характер поведения $M_1(t)$ на больших временах ($t \to +\infty$). Обращая изображение $\overline{M}_1(p)$, представляющее собой мероморфную функцию комплексного непеременного p, полюсы которой, кроме $p = 0$, лежат в левой полуплоскости, по теореме Коши о вычетах нетрудно убедиться, что предел $M_1(t)$ при $t \to +\infty$ существует, а тогда, как известно,

$$\lim_{t\to+\infty} M_1(t) = \lim_{p\to 0} p\overline{M}_1(p) = \frac{Fh}{G}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{Fh}{G}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \tag{5.3}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Итак, благодаря диссипации колебания $\delta V(t)$ со временем спадают и изменение объема выходит при $t \to +\infty$ на константу. По физическому смыслу задачи эта постоянная не может быть ничем иным, как объемом статической чаши прогиба,

$$V_{\text{стат}} = \frac{Fh}{G} \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \tag{5.4}$$

поскольку вязкоупругий слой должен полностью восстановить свою недеформированную форму. Вычисления, использующие аналог формул (1.3) для функции одной переменной $w(r)$ в статической задаче, подтверждают сделанный вывод. Любопытно, что в обширной литературе по электростатике формулу (5.4) обнаружить не удалось.

6. Приведенные результаты дают теоретическую основу решению некоторых "обратных" задач, т.е. задач определения параметров упругих и вязкоупругих тел по наблюдениям так или иначе создаваемого прогиба их поверхности. Одна из возможных схем изложена и экспериментально реализована в [2]; она позволяет с помощью соответствующих формул для полупространства находить упругие модули (G, ν и др.) по измерению статической просадки жесткого штампа под действием осевой силы F и формы поверхности $w(r,t)$ в некоторый момент $t > 0$ (при $t = 0$ нагрузка снимается). При известной плотности материала это позволяет найти и скорости объемных волн c_1, c_2. Коль скоро эти же параметры известны, а толщина h материала конечна, то ее можно определить, например, по наблюдению момента времени $t = \tau_1$ первого излома зависимости $\delta V(t)$ (см. (3.7))

$$h = \frac{1}{2} c_1 \tau_1 . \tag{6.1}$$

Толщину слоя можно определить, измерив статический профиль прогиба $w_0(r)$, найдя

$$V_{\text{стат}} = 2\pi \int_0^\infty w_0(r) r dr$$

и применив формулу (5.5), из которой следует

$$h = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \frac{GV_{\text{стат}}}{F}, \quad 0 \le \nu < 1/2 . \tag{6.2}$$

Автор признателен И. Б. Сусловой за обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Зильберглейт А. С.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 4. С. 1—6.
[2] *Вдовиченко С. А., Зильберглейт А. С., Златина И. Н., Кожевникова М. И.* // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей. Горький, 1989. С. 55—74.
[3] *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 337 с.
[4] *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова Думка, 1990. 224 с.
[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
1 апреля 1991 г.