1992 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 62, в. 3
1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 62, N 3

01; 03


# УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*А. Э. Лазарянц, А. И. Григорьев*

Определяется критерий неустойчивости заряженной капли вязкой капиллярной несжимаемой жидкости во внешнем электрическом поле, стохастическом как во времени, так и в пространстве. Показана возможность непосредственного возбуждения высоких мод капиллярных волн на фоне устойчивой основной моды, реализующаяся при наличии неоднородности внешнего поля. Этим решенная задача отличается от задачи о рэлеевской неустойчивости заряженной капли, в которой сначала возбуждается основная мода, соответствующая вытягиванию капли в сфероид, и по мере увеличения ее амплитуды генерируется неустойчивость высоких мод.

## Введение

Задача об исследовании на устойчивость заряженной капли по отношению к стохастически изменяющемуся в пространстве и во времени внешнему электрическому полю представляет интерес в связи с приложениями в физике, геофизике, технике и технологии — везде, где приходится иметь дело с заряженными жидкокапельными аэродисперсными и многофазными жидкостными системами: в жидкометаллических источниках ионов, в масс-спектрометрии термически нестабильных жидкостей, в теории грозового электричества и т. п. [1—4].

Обычно для определения возможности существования равновесного состояния идеализированной замкнутой системы ее исследуют на устойчивость по отношению к малым виртуальным возмущениям ее внутренних параметров. Так как при таком исследовании можно исходить из принципа минимальности энергии в устойчивом равновесном состоянии, то ясно, что критерий неустойчивости полностью определяется статическими внутренними параметрами системы и не зависит от динамических.

При изучении устойчивости реальных физических систем такого исследования не всегда достаточно, так как на незамкнутые системы оказывает влияние окружающая среда. Поэтому для выяснения существования равновесных состояний становится необходимым исследование на устойчивость системы относительно малых флуктуаций внешних параметров. Наиболее общей ситуацией является такая, когда флуктуации внешних параметров можно считать случайными, поэтому возникает необходимость исследования системы на стохастическую устойчивость. Критерий неустойчивости данного типа кроме зависимости от характеристик внешнего воздействия и статических внутренних параметров обязан содержать и динамические внутренние параметры, так как эта неустойчивость является чисто динамическим явлением.

В данной работе исследуется на устойчивость сферическая капля вязкой, несжимаемой, капиллярной, идеально проводящей жидкости, имеющая заряд $Q$. Исследование на статическую устойчивость было проведено еще Рэлеем [1], а последующие работы являются либо повторением [2], либо обобщениями на случай диэлектрической жидкости [3] или наличия в капле твердых включений [4]. Критерий такой неустойчивости получил название критерия Рэлея и имеет вид

$$\frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} > 1\,,$$

где $R$ — радиус капли, $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения.

Естественно, что критерий Рэлея не зависит от вязкости жидкости, которая является динамической величиной.

В отличие от этого стохастическая устойчивость заряженной капли до недавнего времени не попадала в поле зрения исследователей, хотя возможные методы ее анализа применялись в других областях [5]. Лишь недавно появились работы [6,7], посвященные стохастической устойчивости капли во внешнем однородном электрическом поле и в случае, когда заряд имеет флуктуирующую компоненту, т.е. в ситуациях, когда случайный характер носила лишь зависимость физических параметров от времени, а зависимость от координат была заданной. Эти работы близки к работам [8,9], имеющим соответственно такую же пространственную симметрию, однако с детерминистической периодической зависимостью от времени. В настоящей работе внешнее электрическое поле является случайным как во времени, так и в пространстве.

1. Рассмотрим сферическую каплю радиуса $R$ вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости плотности $\rho$ с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$, коэффициентом кинематической вязкости $\nu$, имеющую заряд $Q$ и находящуюся во внешнем электрическом поле, стохастически изменяющемся в пространстве и во времени. Примем, что поверхность капли возмущена вследствие капиллярного волнового движения, так что уравнение ее поверхности в сферической системе координат с началом в центре капли будет иметь вид

$$r = R + \xi(Q,\varphi,t)\,,\ |\xi| << R\,. \tag{1}$$

Найдем уравнение, описывающее эволюцию этого возмущения во времени.

Система уравнений гидродинамики, лианезированная в окрестности равновесной сферической поверхности капли, состоит из уравнения Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{2}$$

и условия несжимаемости жидкости

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\,, \tag{3}$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$ — поля скоростей и давления соответственно.

Примем также, что на равновесной сферической поверхности капли выполняются граничные условия: кинематическое

$$r = R:\ \ u_r = \frac{\partial\xi}{\partial t}\,, \tag{4}$$

динамические

$$r = R:\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\Theta} + \frac{\partial u_\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\Theta = 0\,,$$

$$\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi = 0\,;$$

$$p - 2\rho\nu\frac{\partial u_r}{\partial r} = p_\sigma - p_E\,, \tag{5}$$

$p_\sigma$ — лапласовское давление, имеющее вид

$$p_\sigma = -\frac{\sigma}{R^2}(2 + \Lambda)\,\xi\,, \tag{6}$$

$\Lambda$ — угловая часть оператора Лапласа, $p_E$ — давление электрических сил.

Чтобы упростить нижеследующие расчеты, целесообразно ввести безразмерные переменные. Так как в задаче присутствуют только три основные размерные единицы — длина, время, масса, то можно перейти к безразмерному виду, приравняв единице три произвольных независимых параметра. Удобно выбрать $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. Тогда все величины будут выражены через следующие характерные масштабы:

$$r_* = R\,,\ t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}\,;\ u_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}\,;$$

$$p_* = R^{-1}\sigma\,;\ \nu_* = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}\,;\ Q_* = R^{3/2}\sigma^{1/2}\,;$$

$$\Phi_* = R^{1/2}\sigma\,.$$

Проведем скаляризацию задачи по методике, являющейся развитием ране использованной в [6,7]. Разложим поле скоростей $\mathbf{u}$ в капле на сумму тре составляющих

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1 + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3\,, \tag{7}$$

где операторы $\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{i}$ имеют вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla\,;\ \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla\times\mathbf{r}\,;\ \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{r})\,.$$

Если $\Psi_1$ является гармонической функцией, то эти три составляющие пол образуют полный ортогональный набор

$$\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{i}\times\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{j}\Psi_j = \delta_{ij}\hat{\mathbf{N}}_\mathbf{j}^2\Psi_j \quad (i,j = 1,2,3)\,,$$

что доказывает справедливость разложения (7).

Подставляя разложение (7) в уравнения (2), (3), получаем уравнения дл скалярных функций $\Psi_i$

$$\Delta\Psi_i = (1 - \delta_{ij})\,\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} \tag{8}$$

и выражение для давления

$$p = -\,\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\,,$$

при подстановке которого в граничные условия (4), (5) давление исключается из системы

$$r = 1:\quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\Lambda\Psi_3 = \frac{\partial\xi}{\partial t}\,, \tag{9}$$

$$2r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\Psi_1}{r} + r^2\,\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2} - \frac{(2 + \Lambda)}{r}\,\Psi_3 = 0\,; \tag{10}$$

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\Psi_2}{r} = 0\,; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + 2\,\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2} - 2\nu\Lambda\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\Psi_3}{r} + p_\sigma - p_E = 0\,. \tag{12}$$

Несложно заметить, что функция $\Psi_2$ не оказывает влияния на остальную часть анализируемой системы, так как задача на ее отыскание не зависит от

$\Psi_1$, $\Psi_3$, $\xi$ и функция $\Psi_2$ не входит в уравнения, из которых находятся $\Psi_1$, $\Psi_3$, $\xi$.

Применим к системе (8) — (12) интегральное преобразование по времени, переводящее операцию взятия производной по времени в операцию умножения изображения на новую переменную $s$. Вид этого интегрального преобразования зависит от начальных условий и в дальнейшем несущественен, так как будет произведено обратное преобразование. Сохраняя за изображениями прежние обозначения, получаем из (8)

$$\Delta\Psi_1 = 0\,; \quad \Delta\Psi_3 - \frac{s}{\nu}\Psi_3 = 0\,.$$

Решения этих уравнений внутри капли имеют вид

$$\Psi_1 = \sum_{l,m} C^1_{lm}(s)\, r^l\, Y_l^m(\Theta,\varphi)\,,$$

$$\Psi_3 = \sum_{l,m} C^3_{lm}(s)\, \frac{i_l(s^{1/2}\nu^{-1/2}r)}{i_l(s^{1/2}\nu^{-1/2})}\, Y_l^m(\Theta,\varphi)\,, \tag{13}$$

где $Y_l^m(\Theta,\varphi)$ — сферическая функция, а $i_l(x)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя.

Коэффициенты $C^1_{lm}(s)$ и $C^3_{lm}(s)$ выражаются через коэффициенты $z_{lm}(s)$ разложения возмущения $\xi$ по сферическим функциям

$$\xi = \sum_{l,m} z_{lm}(s) Y_l^m \tag{14}$$

при помощи граничных условий (9), (10). Результат имеет вид

$$C^1_{lm}(s) = \frac{s - s f_l(s^{1/2}\nu^{-1/2}) + 2(l-1)(l+1)\nu}{l[1 - f_l(s^{1/2}\nu^{-1/2})]}\, z_{lm}\,;$$

$$C^3_{lm}(s) = -\frac{2(l-1)\nu}{l\left[1 - f_l(s^{1/2}\nu^{-1/2})\right]}\, z_{lm}\,;$$

$$f_l(x) = \frac{2}{x}\frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}\,. \tag{15}$$

Подставляя (13) — (15) в (12) и учитывая, что

$$p_\sigma = \sum_{l,m} (l-1)(l+2)\, z_{lm} Y_l^m\,,$$

получаем уравнение

$$\sum_{l,m} \frac{1}{l}\left[s^2 + 2(l-1)\frac{2l + 1 - l(l+2) f_l(s^{1/2}\nu^{-1/2})}{1 - f_l(s^{1/2}\nu^{-1/2})}\nu s + l(l-1)(l+2)\right] z_{lm}\, Y_l^m = p_E\,. \tag{16}$$

Заметим, что для большинства жидкостей и капель, линейные размеры которых превышают единицы микрометров, параметр безразмерной вязкости

$\nu \ll 1$. Поэтому, возвращаясь к оригиналам, чтобы не усложнять дальнейшие вычисления исследованием интегродифференциального уравнения, можно использовать асимптотическое выражение для модифицированных сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента

$$x \to \infty: \quad i_l(x) \to \frac{e^x}{2x}\left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

В результате получаем уравнение

$$\sum_{l,m} \frac{1}{l}\left[\frac{d^2 z_{lm}}{dt^2} + 2(l-1)(2l+1)\nu \frac{dz_{lm}}{dt} + l(l-1)(l+2) z_{lm}\right] Y_l^m = p_E, \qquad (17)$$

описывающее эволюцию во времени возмущения $\xi$ в произвольном электрическом поле, влияние которого реализуется через $p_E$.

2. Давление электрического поля на возмущенную поверхность жидкости имеет вид

$$p_E = \frac{1}{8\pi}\left[\nabla(\Phi_0 + \varphi)\right]^2_{r=1+\xi} - \frac{1}{8\pi}\left[\nabla\Phi_0\right]^2_{r=1}, \qquad (18)$$

где $\Phi_0$ — потенциал электрического поля в окрестности невозмущенной поверхности капли, а $\varphi$ — малая добавка к нему, вызванная возмущением и удовлетворяющая задаче

$$\Delta\varphi = 0;$$
$$r = 1: \quad \varphi = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\xi;$$
$$r \to \infty: \ \varphi \to 0. \qquad (19)$$

Учитывая перпендикулярность вектора напряженности электрического поля поверхности проводника и оставляя в (18) лишь член, линейный по возмущению, получаем

$$r = 1: \quad p_E = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]. \qquad (20)$$

Потенциал электрического поля $\Phi_0$ в окрестности заряженной проводящей сферы во внешнем поле, заданном в виде разложения по сферическим функциям с коэффициентами $A_{lm}$, может быть записан в виде

$$\Phi_0 = \frac{Q}{r} + \sum_{l,m} A_{lm}\left[r^l - r^{-(l+1)}\right] Y_l^m, \qquad (21)$$

где суммирование начинается с $l = 1$, так как полный заряд, индуцированный внешним полем на изолированном проводящем теле, равен нулю. Его первая и вторая производные, взятые на невозмущенной поверхности и использующиеся в выражениях (19), (20), имеют вид $r = 1$:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = -\left[Q - \sum_{l,m}(2l+1) A_{lm} Y_l^m\right];$$
$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} = 2\left[Q - \sum_{l,m}(2l+1) A_{lm} Y_l^m\right]. \qquad (22)$$

Ищем добавку к потенциалу $\varphi$, являющемуся решением уравнения Лапласа (19) и зануляющуюся на бесконечности в виде

$$\varphi = \sum_{lm} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_l^m . \tag{23}$$

Ее первая производная на невозмущенной поверхности, требующаяся в (20), имеет вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\sum_{l,m} (l+1) B_{lm} Y_l^m . \tag{24}$$

Коэффициенты $B_{lm}$ несложно найти, подставляя (14), (22), (23) в (19),

$$\sum_{l,m} B_{lm} Y_l^m = Q \sum_{l,m} z_{lm} Y_l^m - \sum_{l_1,m_1} \sum_{l_2,m_2} z_{l_1m_1} (2l_2 + 1) A_{l_2m_2} Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2} .$$

Разлагая произведение сферических функций одного аргумента в ряд по $Y_l^m$

$$Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2} = \sum_{l,m} K_{l_1 l_2 l}^{m_1 m_2 m} Y_l^m , \tag{25}$$

получаем

$$B_{lm} = Qz_{lm} - \sum_{l_1m_1} \sum_{l_2m_2} z_{l_1m_1} (2l_2 + 1) A_{l_2m_2} K_{l_1l_2l}^{m_1m_2m} . \tag{26}$$

Коэффициенты $k_{l_1 l_2 l}^{m_1 m_2 m}$ в разложении (25), называемом разложением Клебша—Гордана, выражаются через коэффициенты векторного сложения $<l_1m_1l_2m_2|lm>$ известной формулой [10]

$$K_{l_1 l_2 l}^{m_1 m_2 m} = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)}} \times <l_1 0 l_2 0 | l 0> <l_1 m_1 l_2 m_2 | l m> . \tag{27}$$

Коэффициенты векторного сложения отличны от нуля лишь в том случае, когда индексы $l_1$, $l_2$, $l$ удовлетворяют неравенству треугольника

$$|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2 ,$$

а индексы $m_1$, $m_2$, $m$ связаны равенством

$$m = m_1 + m_2 .$$

Явные выражения в виде различных алгебраических сумм приведены в [10]. Заметим еще, что коэффициенты $<l_1 o l_2 o | l o>$, а следовательно, и $K_{l_1 l_2 l}^{m_1 m_2 m}$ равны нулю, когда сумма $l_1 + l_2 + l$ является нечетным числом.

Вычислим теперь произведение

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} \xi = 2Q \sum_{l,m} z_{lm} Y_l^m - 2\sum_{l_1,m_1} \sum_{l_2,m_2} z_{l_1m_1} (2l_2 + 1) A_{l_2m_2} Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2} .$$

Используя разложение (25), получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2}\xi = 2\sum_{l,m} Qz_{lm} - \sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2,m_2} z_{l_1m_1}(2l_2+1)A_{l_2m_2}K_{l_1\,l_2\,l}^{m_1m_2m}. \tag{28}$$

Суммируя (24) с учетом (26) и (28), получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\sum_{l,m}(l-1)\left[Qz_{lm} - \sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2,m_2} z_{l_1m_1}(2l_2+1)A_{l_2m_2}K_{l_1l_2l}^{m_1m_2m}\right]Y_l^m.$$

Тогда давление $p_E$ преобразуется к виду

$$p_E = \frac{1}{4\pi}\left[Q - \sum_{l,m}(2l+1)A_{lm}Y_l^m\right]\sum_{l,m}(l-1)\left[Qz_{lm} - \right.$$
$$\left. -\sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2m_2} z_{l_1m_1}(2l_2+1)A_{l_2m_2}K_{l_1l_2l}^{m_1m_2m}\right]Y_l^m.$$

Используя снова разложение (25), получаем окончательное выражение для давления электрического поля $p_E$

$$p_E = \frac{1}{4\pi}\sum_{l,m}\left[Q^2(l-1)z_{lm} - Q\sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2m_2}(l+l_1-2)z_{l_1m_1}\times\right.$$
$$\times(2l_2+1)A_{l_2m_2}K_{l_1l_2l}^{m_1m_2m} + \sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2,m_2}\sum_{l_3,m_3}\sum_{l_4,m_4} z_{l_1m_1}(2l_2+1)\times$$
$$\left.\times A_{l_2m_2}(2l_4+1)A_{l_4m_4}\times(l_3-1)K_{l_1l_2l_3}^{m_1m_2m_3}K_{l_3l_4l}^{m_3m_4m}\right]Y_l^m. \tag{29}$$

3. Подставим теперь выражение (29) в (17), приравняем коэффициенты при сферических функциях равных степеней и порядков и получим систему связанных уравнений относительно возмущений различных мод $z_{lm}$. Если внешнее поле мало́, как это принято в данной задаче, то члены, описывающие взаимодействие мод, всегда имеют больший порядок малости, чем аналогичный член собственной моды. Чтобы не усложнять исследование учетом взаимодействия различных мод и в то же время сохранить корректность разложения по малому параметру внешнего поля, необходимо рассмотреть два случая.

1) Собственный заряд капли $Q \neq 0$, но меньше критического по Рэлею, коэффициенты $A_{lm}(t)$ не все равны нулю при четных индексах $l$. В этом случае получим

$$\frac{d^2 z_{lm}}{dt^2} + 2(l-1)(2l+1)\nu\frac{dz_{lm}}{dt} + \left[l(l-1)\left(l+2-\frac{Q^2}{4\pi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{Q}{2\pi}l(l-1)\sum_{l_1,m_1}(2l_1+1)A_{l_1m_1}(t)K_{ll_1l}^{mm_1m}\right]z_{lm} = 0. \tag{30}$$

Коэффициенты $A_{lm}(t)$ являются случайной функцией времени и индексов $l,m$.

Если затухание мало́, как это и имеет место в рассматриваемом случае малой вязкости, то капля будет реагировать лишь на те части спектра внешнего воздействия, частоты которых близки к собственным частотам колебаний поверхности капли. Поэтому для приближенного рассмотрения внешнее воздействие может быть заменено белым шумом, спектральная плотность которого равна спектральной плотности этого внешнего воздействия на частотах, равных собственным частотам системы [5]. В соответствии с этим положим

$$A_{lm}(t) = a_{lm}\zeta(\omega_l t)\,, \tag{31}$$

где

$$\omega_l^2 = l(l-1)\left(l+2-\frac{Q^2}{4\pi}\right) \tag{32}$$

— собственные частоты колебаний капли.

Сделаем для удобства замену переменной

$$\tau_l = \omega_l t\,. \tag{33}$$

Уравнение (30) приобретает вид

$$\frac{d^2 Z_{lm}}{d\tau_l^2} + 2\gamma_l \frac{dz_{lm}}{d\tau_l} + \left[\,1 + \mu_{lm}\zeta(\tau_l)\,\right] z_{lm} = 0\,, \tag{34}$$

где

$$\gamma_l = \sqrt{\frac{(l-1)\,(2l+1)^2}{l(l+2-Q^2/4\pi)}}\;\nu\,; \tag{35}$$

$$\mu_{lm} = \frac{Q^2}{2\pi}\,\frac{1}{l+2-Q^2/4\pi}\sum_{l_1,m_1}(2l_1+1)\,a_{l_1m_1}K_{ll_1l}^{mm_1m}\,. \tag{36}$$

Если учитывать только моменты первого порядка, то решение уравнения (34) $z_{lm} = 0$; $dz_{lm}/d\tau_l = 0$ асимптотически устойчиво (устойчивость в среднем). При учете моментов второго порядка условие устойчивости имеет вид [5] (устойчивость в среднем квадратичном)

$$\mu_{lm}^2 < 4\gamma_l\,. \tag{37}$$

Неустойчивость основной моды колебаний ($l = 2$, $m = 0$) имеет наименьший порог возбуждения и реализуется с наибольшей вероятностью. Однако с ростом $l$ в сумме по $l_1 m_1$ формулы (36) выживает все большее число членов и, если спектральная плотность внешнего воздействия на частоте $\omega_l$ убывает с ростом $l$ не так быстро, например, в резко неоднородном поле, может создаться ситуация, когда первыми возбуждаются высокие моды с $l > 2$.

При учете моментов более высокого порядка условие устойчивости получается жестче [5]. Поэтому условие $\mu_{lm}^2 > 4\gamma_l$ является достаточным (но не необходимым) критерием развития неустойчивости капли во внешнем стохастическом поле.

2) В случае $Q = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z_{lm}}{dt^2} &+ 2(l-1)\,(\eta l+1)\,\nu\frac{dz_{lm}}{dt} + \Big[\,l(l-1)\,(l+2) - \\ &- \frac{1}{4\pi}l\sum_{l_1,m_1}\sum_{l_2m_2}\sum_{l_3m_3}(2l_1+1)\,A_{l_1m_1}(t)\,(l_2-1)\,(2l_3+1)\,\times \\ &\times A_{l_3m_3}\,K_{ll_1l_2}^{mm_1m_2}\,K_{l_2l_3l}^{m_2m_3m}\,\Big]\,z_{lm} = 0\,.\end{aligned} \tag{38}$$

Условие неустойчивости будет также иметь вид (37), за исключением коэффициента $\mu_{lm}$, который в данном случае дается формулой

$$\mu_{lm} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(l-1)(l+2)} \sum_{l_1,m_1} \sum_{l_2,m_2} \sum_{l_3,m_3} (2l_1+1)(l_2-1)(2l_3+1) \times$$
$$\times a_{l_1 m_1 l_3 m_3} K_{l l_1 l_2}^{m m_1 m_2} K_{l_2 l_3 l}^{m_2 m_3 m};$$
$$A_{l_1 m_1}(t) A_{l_3 m_3}(t) = a_{l_1 m_1 l_3 m_3} \zeta(\omega_l t). \tag{39}$$

Так же как и в предыдущем случае, неустойчивость основной моды имеет минимальный порог, однако возможны и ситуации, когда первыми возбуждаются высокие моды (например, в резко неоднородных полях). Тогда при $Q = 0$ вероятность возбуждения высоких мод выше, чем при $Q \neq 0$, так как с ростом $l$ число членов в ряде (39) растет быстрее, чем в ряде (36).

**4.** Помимо получения аналитических критереев неустойчивости наиболее интересным результатом проведенного рассмотрения представляется тот выяснившийся факт, что в неоднородном внешнем поле возможно возбуждение в капле сразу нескольких высоких мод капиллярных волн при устойчивой основной моде. Сам факт возбуждения внешним неоднородным электрическим полем сразу целого спектра капиллярных волн обнаружен экспериментально в работе [11]. Теперь этот факт получил и теоретическое истолкование. Подобные ситуации могут реализовываться при коагуляции заряженных капель во внешних электрических полях [12], в ионно-кластерно-капельных пучках в жидкометаллических источниках ионов и масс-спектрометрах при высокой концентрации кластеров и капель [13].

## Список литературы


[1] *Rayleigh* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184—186.
[2] *Hendrics C. D., Schneider J. M.*// Amer. J. Phys. 1963. Vol. 1. N 6. P. 450—453.
[3] *Панасов С. Н.* // Сб. научн. тр. МЭИ. № 185. Физико-технические проблемы монодисперсных систем. М., 1988. С. 70—73.
[4] *Лазарянц А. Э., Григорьев А. И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 6. С. 29—36.
[5] *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
[6] *Лазарянц А. Э., Григорьев А. И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 33—38.
[7] *Григорьев А. И., Лазарянц А. Э.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 52—56.
[8] *Григорьев А. И., Лазарянц А. Э.* // ЭОМ. 1990. № 3. С. 45—48.
[9] *Нестеров С. В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 170—172.
[10] *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
[11] *Распопов С. Ф., Суходольский А. Т.* // Кр. сообщ. по физике. 1985. № 6. С. 10—13.
[12] *Sartor J. D.; Abbot C. E.* // J. Geophys. Res. 1960. Vol. 73. N 20. P. 6415—6423.
[13] *Ширяева С. О., Григорьев А. И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 192—194.


Ярославский университет

Поступило в Редакцию
17 января 1991 г.