

03  
© 1992 г.ЗАКОНОМЕРНОСТИ РЭЛЕЕВСКОГО РАСПАДА КАПЛИ В РЕЗКО  
НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев

Рассчитываются размеры, заряды, удельные заряды и количество дочерних капелек, эмиттируемых при электрогидродинамической неустойчивости крупной сферической капли. Принимается, что основная мода капиллярных волн в капле не возбуждена, а неустойчивые высокие моды капиллярных волн образуют при суперпозиции на вершине капли, сохраняющей сферическую форму, эмиттирующий выступ, с вершины которого и идет эмиссия дочерних капелек.

1. В соответствии с данными работы [1] рэлеевская неустойчивость сферической капли электропроводной несжимаемой жидкости реализуется следующим образом. При превышении зарядом капли некоторого критического значения первой возбуждается основная мода капиллярных волн, что проявляется в вытягивании капли в сфероид с инкрементом, увеличивающимся по мере увеличения деформации. Вытягивание капли сопровождается перераспределением заряда по ее поверхности и в окрестностях вершин капли, где поверхностная плотность заряда увеличивается по мере удлинения капли, возбуждаются и более высокие моды капиллярных волн. В результате суперпозиции высоких мод на вершинах капли образуются эмиттирующие выступы, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда, проявляющийся в эмиссии высокодисперсных, сильно заряженных капелек. С началом сброса заряда дальнейшее вытягивание капли прекращается и, потеряв около четверти своего исходного заряда и меньше половины процента исходной массы, капля возвращается к сферической форме. Параметры дочерних капелек — спектр их размеров, зарядов и удельных зарядов, а также общая потеря заряда и массы при рэлеевской неустойчивости рассчитаны в работе [2]. Аналогично реализуется и неустойчивость заряженной и незаряженной капель в однородном внешнем электростатическом поле [3—5].

Но существует целый ряд явлений, когда неустойчивость капли по отношению к поверхностному заряду осуществляется иначе. Это, например, неустойчивость капли в резко неоднородном внешнем электростатическом поле, когда поверхностный заряд весьма большой величины создается на малой части поверхности капли, где и выполняются критические условия возбуждения целого спектра высоких мод капиллярных волн. Формирование эмиттирующего выступа и сброс индуцированного заряда в этом случае происходят на фоне устойчивой основной моды капиллярных волн, т.е. в окрестности сферической капли. Другой подобной ситуацией является неустойчивость тонкой заряженной пленки жидкости на поверхности твердого сферического ядра, т.е. ситуацией, характерной для грозовых облаков, для водяных пленок на поверхности тающих градин. В этом случае неустойчивость основной моды капиллярных волн не может реализоваться из-за наличия твердого ядра и образования эмиттирующего выступа происходит при увеличении собственного заряда или внешнего поля при возбуждении высоких мод капиллярных волн.

В обоих последних случаях эмиттирующие выступы образуются на сферической поверхности, и в ее же окрестности идет эмиссия дочерних капелек с вершин эмиттирующих выступов. Представляется целесообразным рассчитать размеры, заряды, удельные заряды и количество дочерних капелек, образующихся в такой ситуации. В связи со сказанным будем рассчитывать параметры дочерних

капелек, отрывающихся от вершины эмиттирующего выступа на сферической капле, не останавливаясь в деталях на механизме формирования самих выступов.

2. Пусть сферическая капля идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости радиуса  $R$ , несущая электрический заряд  $Q$ , немного превышающий критическое по Рэлею значение, выбросила маленькую капельку радиуса  $r$  ( $r \ll R$ ) с зарядом  $q$  ( $q \ll Q$ ). Учтем, что эмиттируемая капелька отрывается от большой в поле ее заряда и, следовательно, имеет форму, отличную от сферической, но близкую к сфероидальной с эксцентриситетом  $e$ . Считая, что температура системы остается неизменной, а также сохраняются полный объем и электрический заряд жидкой фазы, запишем изменение свободной энергии системы

$$\Delta F = 4\pi r^2 \sigma A(e) + \frac{q^2}{2r} B(e) - \frac{(2Q - q)q}{2R} + \frac{(Q - q)q}{\nu R}, \quad (1)$$

где

$$A(e) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \operatorname{Arccsin} e \right] (1 - e^2)^{-1/6},$$

$$B(e) = \frac{1}{e} (1 - e^2)^{1/3} \operatorname{Arth} e, \quad \nu = \frac{a}{R}.$$

В (1) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии капиллярных сил, два последующих — изменение собственной электростатической энергии заряженных капель, последнее — энергию взаимодействия выброшенной капельки с остатком большой капли,  $a$  — расстояние между центрами большой и малой капель в момент разрыва контакта между ними,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Учтем, что эмиссия маленькой капли суть отрыв вершины выступа, формирующегося на большой капле при развитии неустойчивости, как только сила кулоновского отталкивания между зарядами большой капли и вершины выступа превысит силу  $2\pi r_n \sigma$ , удерживающую вершину выступа ( $r_n$  — минимальный радиус перетяжки, связывающей капли в момент отрыва).

Пусть заряд вершины выступа в момент начала отрыва —  $\beta q$  (где  $\beta < 1$ ), а часть заряда  $(1 - \beta)q$  отрывающаяся капелька получает за время отрыва, которое хоть и мало, но конечно. Примем, что форма вершины выступа сфероидальна с меньшей полуосью  $b$ , и учтем, что напряженность поля большой капли в месте отрыва маленькой капли равна  $\gamma(Q - \beta q)/\nu^2 R^2$  ( $\gamma$  — параметр, учитывающий тот факт, что часть поверхности сферы, образующая эмиттирующий выступ, от которого отрывается капля, в создании поля не участвует). Тогда из условия баланса сил в момент начала разрыва перетяжки получим уравнение для определения величины  $\nu$

$$\frac{\alpha}{8W} \leq \frac{(1 - \beta Y)Y}{(1 - e^2)^{1/6} \nu^2 X}, \quad (2)$$

где

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}, \quad \alpha \equiv \frac{r_n}{\gamma\beta B},$$

$$X \equiv \frac{r}{R}, \quad Y \equiv \frac{q}{Q}.$$

Здесь в параметре  $\alpha$  собраны все неопределяемые величины задачи.

Изменение свободной энергии системы связано с появлением новой поверхности, которое можно выразить через  $r$ , и с изменением энергии электрического поля, выражающимся через  $q$ . Потребуем, чтобы это изменение было экстремальным

$$\frac{\partial(\Delta F)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta F)}{\partial q} = 0. \quad (3)$$

В результате получим уравнения для определения характеристик эмиттированной капли ( $r$  и  $q$ )

$$A(e)X - \frac{Y^2}{X^2} WB(e) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{Y}{X} B(e) + (1 - \frac{2}{\nu}) Y - (1 - \frac{1}{\nu}) = 0. \quad (5)$$

Равновесный эксцентриситет эмиттированной маленькой капельки определится выражением

$$e^2 = 9w_*(1 + W_*), \quad (6)$$

где

$$w_* \equiv \frac{E^2 r}{16\pi\sigma} = \frac{(1 - Y)^2 X}{\nu^4} W,$$

$$W_* \equiv \frac{q^2}{16\pi\sigma r^3} \equiv \frac{Y^2}{X^3} W.$$

Здесь  $w_*$  и  $W_*$  — параметры Тейлора и Рэлея соответственно для маленькой капельки, которые характеризуют ее устойчивость по отношению к внешнему электрическому полю и к собственному заряду.

Задавая значение  $W$  из системы уравнений (2), (4) — (6), можно найти  $q = q(\alpha, \beta)$  и  $r = r(\alpha, \beta)$ . Из общезначимых соображений ясно, что эмиссия капелек будет иметь место до тех пор, пока сила кулоновского отталкивания заряда очередной отрывающейся капельки от заряда, остающегося на исходной капле, будет превышать удерживающую лапласовскую силу в перетяжке.

3. На рис. 1—5 представлены результаты численных расчетов количества и характеристик эмиттированных капелек для различных значений параметра Рэлея исходной капли и неопределенных параметров задачи  $\alpha$  и  $\beta$ . Поскольку, как показали расчеты, получаемые результаты пренебрежимо слабо зависят от величины  $\beta$  при ее изменении в пределах [0.5; 1.0], то во всех проведенных расчетах принималось  $\beta = 0.9$ . На рис. 1 приведены зависимости безразмерных

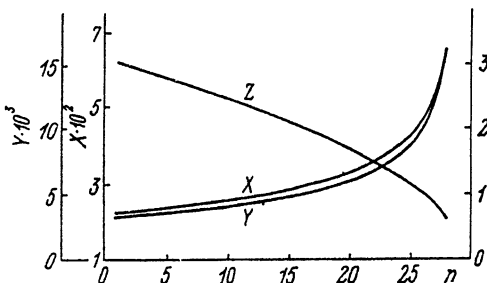


Рис. 1. Зависимости относительного радиуса  $X$ , заряда  $Y$  и удельного заряда  $Z$  эмиттированных капелек от их порядкового номера  $n$  для принятых начальных значений параметра Рэлея исходной капли  $W = 1.0$  и неопределенных параметров  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.9$ .

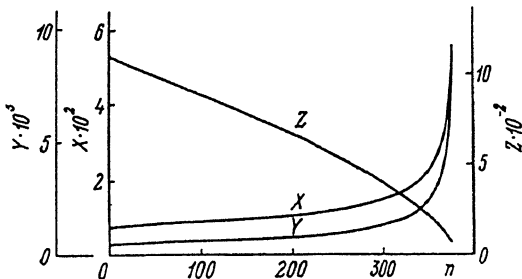


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для принятых начальных значений параметра Рэлея исходной капли  $W = 2.0$  и неопределенных параметров  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.9$ .

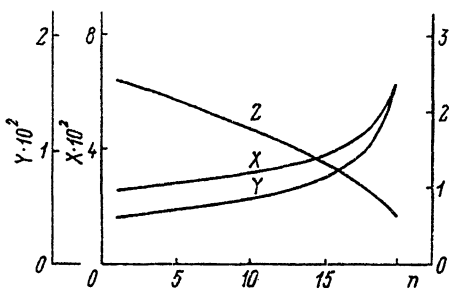


Рис. 3. То же, что и на рис.1, для принятых начальных значений параметра Рэлея исходной капли  $W = 1.0$  и неопределенных параметров  $\alpha = 0.95$ ,  $\beta = 0.9$ .

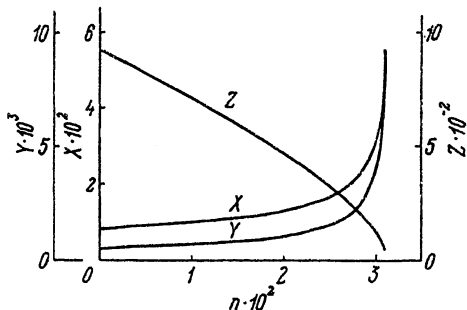


Рис. 4. То же, что и на рис.1, для принятых начальных значений параметра Рэлея исходной капли  $W = 2.0$  и неопределенных параметров  $\alpha = 0.95$ ,  $\beta = 0.9$ .

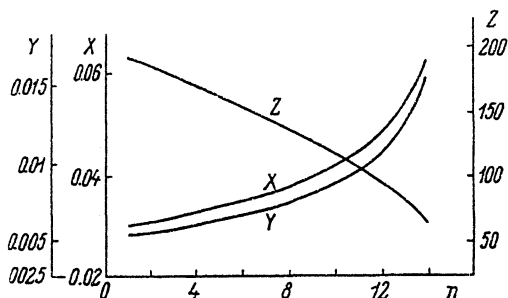


Рис. 5. То же, что и на рис.1, для принятых начальных значений параметра Рэлея исходной капли  $W = 1$  и неопределенных параметров  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 0.9$ .

радиуса  $X \equiv r/R$ , заряда  $Y \equiv q/Q$  и удельного заряда  $Z = Y \cdot X^{-3}$  от порядкового номера эмиттированной капли для  $W = 1.0$  и  $\alpha = 0.9$ . Общее количество эмиттированных капель при этом составляет 28 штук, относительная потеря заряда исходной капли  $\zeta \equiv \Delta Q/Q \approx 0.16$  и массы  $\eta \equiv \Delta M/M \approx 0.115 \cdot 10^{-2}$ . На рис.2 приведены аналогичные зависимости для случая, когда исходная капля имеет существенно закритическое значение  $W = 2.0$  (величина  $\alpha = 0.9$ ). При этом количество эмиттируемых капель увеличивается до 377 штук, а потери заряда  $\zeta$  и массы  $\eta$  составляют  $\approx 0.40$  и  $\approx 1.6 \cdot 10^{-3}$  соответственно.

Следует отметить, что все рассчитываемые характеристики существенно зависят от величины параметра  $\alpha$ . С увеличением  $\alpha$  количество эмиттируемых капель, относительная потеря заряда и массы исходной капельки уменьшаются. Для примера на рис.3 и 4 приведены результаты расчетов при прочих равных с данными рис.1 и 2 условиях, но при  $\alpha = 0.95$ , а на рис.5 зависимости радиуса  $X$ , заряда  $Y$  и удельного заряда  $Z$  от порядкового номера капелек  $n$  представлены для критического значения  $W = 1.0$ ,  $\alpha = 1.0$ . При значении  $\alpha = 1.15$  ( $W = 1.0$ ) количество эмиттированных капель уменьшается до четырех и предельное значение параметра  $\alpha$ , при котором эмиттируется всего лишь одна капелька, равно 1.23. При больших значениях  $\alpha$  система уравнений (2), (4)–(6) не имеет решений. Из всех приведенных графиков видно, что эмиттируемые капли имеют относительные размеры  $\sim 10^{-1} - 10^{-3}$  от размеров исходной капли, заряды  $\sim 10^{-2} - 10^{-4}$  от заряда исходной капли, а их удельный заряд приблизительно

на 3 порядка превышает удельный заряд исходной капли. Параметр Рэлея для эмиттированных капель во всех случаях чуть больше единицы, следовательно, они изначально неустойчивы по отношению к собственному заряду, как и в расчетах [2, 5].

4. Приведенный анализ может быть использован при истолковании результатов экспериментов по рассеянию (в однородном электростатическом поле) потока мелких капелек крупной каплей-мишенью [6]. В этих экспериментах капля-мишень при определенных соотношениях характеристик каплей и внешнего поля испытывала электрогидродинамическую неустойчивость, проявляющуюся в эмиссии сферической каплей-мишенью серии дочерних капелек.

Результаты проведенного рассмотрения могут найти применение и при физическом анализе свойств такого экзотического объекта, как шаровая молния. Из анализа данных наблюдений шаровой молнии в естественных условиях известно, что в некоторых случаях, приближаясь к заземленному проводнику, например к электро- или радио-розетке, она выбрасывает в их направлении струю вещества [7, 8]. Эта особенность поведения шаровой молнии может быть интерпретирована в соответствии с вышеприведенным анализом как результат электрогидродинамической неустойчивости ее поверхности в неоднородном электрическом поле в окрестности заземленного проводника, появляющимся как результат суперпозиции поля собственного электрического заряда шаровой молнии с поляризационным зарядом, наведенным на заземленном проводнике. Если это так, то из количественного статистического анализа результатов наблюдения описываемой особенности поведения шаровой молнии можно получить данные о физических характеристиках вещества шаровой молнии, о реальных свойствах которого известно пока очень мало.

#### Список литературы

- [1] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272—1278.
- [2] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19—28.
- [3] Григорьев А. И., Синкевич О. А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 10—15.
- [4] Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27—34.
- [5] Grigor'ev A. I., Shiryeva S. O. // J.Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361—1370.
- [6] Красницкий В. И., Анасов А. М., Контуш С. М. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 18. С. 77—81.
- [7] Стаханов И. П. Физическая природа шаровой молнии. М.: Атомиздат, 1979. 240 с.
- [8] Grigor'ev A. I., Shiryeva S. O., Grigor'eva I. D. // Science of Ball Lightning. Singapore; New York; London; Hong-Kong: World Scientific, 1989. P.88—134.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию  
25 января 1991 г.