

04
© 1992 г.

О МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ С ЭФФЕКТОМ ХОЛЛА

Л. М. Алексеева

Исследуются нестационарные потоки плазмы в каналах плавного профиля. В случае, когда течение близко к какому-либо стационарному изомагнитному потоку проводящей бесхолловской плазмы, специальный выбор параметров позволяет сильно упростить систему магнитогидродинамических уравнений с учетом эффекта Холла. Ее аналитическое решение выявляет неравноправие прианодной и прикатодной частей потока. В ускоряющих каналах имеет место прианодной скачок потенциала.

Введение и исходные уравнения

Потоки плазмы с эффектом Холла характерны для многих лабораторных установок. Возможно, они проявляют себя и в природных условиях — в магнитосфере Земли [1—4]. Замечательной особенностью таких течений является неравноправие прианодной и прикатодной частей потока. В частности, линии электрического тока вблизи анода изменяют свое направление как бы “проскальзывая” вдоль него. Вблизи анода поперечные к потоку градиенты величин оказываются настолько большими, что образуются “прианодные скачки”.

Эти скачки были выявлены путем численного моделирования потоков на основе магнитогидродинамических (МГД) уравнений с учетом эффекта Холла. Численные расчеты показали также, что при усилении эффекта Холла на аноде образуется характерная петля электрического тока. Течение может внезапно стать резко нестационарным — произойдет “анодный взрыв”. Физика этого комплекса явлений остается неясной, и потому затруднен прогноз поведения реальных потоков плазмы.

В настоящей работе мы исследуем случай, когда нестационарная система МГД уравнений с учетом эффекта Холла может быть сведена к единственному уравнению очень простого вида. При этом выявляется физическая природа влияния эффекта Холла на поток.

Для простоты и удобства сопоставления с результатами численного моделирования [2] будем считать плазму изотермической. В качестве единицы измерения плотности ρ и магнитного поля H примем заданные в некоторый момент времени в какой-либо точке вблизи входа канала их значения ρ_* и H_* , в качестве единицы длины — длину канала l , скорости v — альвеновскую скорость $v_* = H_*(4\pi\rho_*)^{-1/2}$ на входе; времени t — пролетное время l/v_* ; электрического поля E — величину H_*v_*/c ; электрического тока j — комбинацию с $H_*/(4\pi l)$; давления P — магнитное давление на входе $H_*^2/(4\pi)$. Отметим, что в выбранной точке параметр β (характерное отношение газового давления к магнитному) в принятых обозначениях выражается соотношением $D = \beta/2$. Проводимость плазмы λ_* , как и ее магнитная вязкость

$$\nu = c^2 / (4\pi\lambda_*\mu_*), \quad (1)$$

постоянны в силу изотермичности. Параметр обмена

$$\xi = cm_i / (el\sqrt{4\pi\rho_*}) \quad (2)$$

(m_i — масса иона, e — абсолютная величина заряда электрона) характеризует эффект Холла и связан с разностью средних скоростей ионов и электронов соотношением

$$\xi \mathbf{j} = \rho (\mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e). \quad (3)$$

Введем декартову систему координат x, y, z , направив ось x вдоль канала, и будем рассматривать течения, не зависящие от z , вида

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0); \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0). \quad (4)$$

При выбранной геометрии потока уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически, а уравнение $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$ имеет решение

$$\mathbf{j} = - [e_z \nabla H] = (\partial H / \partial y) e_x - (\partial H / \partial x) e_y \quad (5)$$

(e_x, e_y, e_z — единичные векторы вдоль соответствующих осей).

Отсюда

$$[\mathbf{j} \mathbf{H}] = - \nabla (H^2 / 2). \quad (6)$$

Система МГД уравнений с учетом эффекта Холла имеет вид

$$\mathbf{E} = \nu \mathbf{j} - [\mathbf{v} \mathbf{H}] - \xi \mathbf{S}; \quad \mathbf{S} = (2\rho)^{-1} \nabla (H^2 + \mathcal{P}), \quad (7)$$

$$\partial \rho / \partial t = - \text{div } \rho \mathbf{v}; \quad \mathcal{P} = D\rho; \quad (8)$$

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \rho^{-1} \nabla (\mathcal{P} + H^2 / 2); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{H} + \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \xi \left[\nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \frac{H^2}{2} \right]. \quad (10)$$

Уравнение диффузии будем также использовать в форме

$$\partial H / \partial t = \nu \Delta H + a \partial \rho / \partial t - \rho \nu \nabla a + \xi [\nabla a \cdot \nabla H]_z, \quad (11)$$

$$a \equiv H / \rho. \quad (12)$$

Стационарные течения плазмы с эффектом Холла при $\nu = 0$

В систему (11) входят три постоянных параметра: D, ξ и ν . Рассмотрим сначала случай $\nu = 0$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \mathcal{P} = D\rho,$$

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \rho^{-1} \nabla (\mathcal{P} + H^2 / 2),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \xi \left[\nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \frac{H^2}{2} \right]. \quad (13)$$

Введем начальное условие

$$w(x, y, t) \Big|_{t=0} = w_{(0)}(x, y),$$

где w — любая компонента вектора $\mathbf{V} = (\rho, \mathcal{P}, \mathbf{v}, H)$; $w_{(0)}$ — соответствующая компонента вектора $\mathbf{V}_{(0)}$, удовлетворяющего системе

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \mathcal{P} = D\rho,$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla(\mathcal{P} + H^2/\rho),$$

$$\text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0. \quad (14)$$

Иначе говоря, $V_{(0)}$ соответствует некоторому стационарному потоку бесконечно проводящей бесколлоидной плазмы. Известно [5], что в таких потоках (при выбранной геометрии) $H_{(0)}$ и $\rho_{(0)}$ связаны соотношением

$$H_{(0)}/\rho_{(0)} = K(G_{(0)}),$$

где K — произвольная функция, $G_{(0)}$ — функция потока вещества, определяемая равенством

$$\rho_{(0)}\mathbf{v}_{(0)} = [e_z\nabla G_{(0)}]. \quad (15)$$

Потребуем для начального поля $K(G_{(0)}) \equiv 1$. В таком (изомагнитном) потоке

$$H_{(0)} = \rho_{(0)} \quad (16)$$

и все производные по времени в системе (13) и момент $t = 0$ равны нулю. Будет ли в дальнейшем

$$w(x, y, t) = w_{(0)}(x, y),$$

зависит от граничных условий: если начальное распределение им не удовлетворяет, то течение, вообще говоря, не будет стационарным. Свой вклад (через граничное условие для электрического поля) во временные изменения может вносить эффект Холла, поскольку ξ входит в выражение (7) для E , которое в начальный момент при $\nu = 0$ дает

$$E|_{t=0} = -\nabla(G_{(0)} + \xi\Psi_{(0)}),$$

$$\Psi_{(0)} \equiv \rho_{(0)} + W_{(0)}/2. \quad (17)$$

Здесь использовано соотношение

$$[\mathbf{v}_{(0)}\mathbf{H}_{(0)}] = \nabla G_{(0)}, \quad (18)$$

справедливое для изомагнитного поля и функции $G_{(0)}$, определяемой равенством (15);

$$W_{(0)} = D \ln \rho_{(0)}. \quad (19)$$

Как мы сейчас увидим, можно поставить такие условия на границе, что при заданном $w_{(0)}$ течение не будет изменяться с t . Пусть стенками канала, ограничивающими поток $w(x, y, t)$, будут поверхности $y = R_1(x)$ (анод) и $y = R_2(x)$ (катод), соответствующие

$$G_{(0)}|_1 = 0, \quad G_{(0)}|_2 = -G_* = \text{const}$$

($|_j$ везде будет означать $y = R_j(x)$; $j = 1, 2$).

Эти поверхности будем считать непроницаемыми для вещества и в качестве граничного условия для системы (13) положим на них

$$v_n|_j = 0, \quad (20)$$

где индекс n означает компоненту в направлении ∇G_0 .

Поскольку этому условию удовлетворяет и поток $w_{(0)}$, то никакой нестационарности условие (20) не вносит.

На стенках также должно быть выполнено условие непрерывности для

составляющей E_{ξ} электрического поля (ξ — переменная, отсчитываемая вдоль линии потока вещества $G_{(0)}$). Как видно из (17), $\left[E_{\xi}^{(i)} \Big|_j \right]_{t=0} \neq 0$ (верхним индексом i будем отмечать величины относящиеся к потоку плазмы, т. е. к внутренности канала, в отличие от значений, относящихся к электроду; последние отмечаются индексом e).

Обычно в магнитной гидродинамике рассматриваются стенки-электроды из сплошного, хорошо проводящего материала, что соответствует $E_{\xi}^{(e)} \Big|_j = 0$. В этом случае при начальных условиях $w_{(0)}$, поскольку $\xi \neq 0$, получился бы разрыв E_{ξ} на границе, что привело бы к $(\partial H / \partial t)_{t=0} = \infty$ и быстрым изменениям величин $w(x, y)$ вблизи границы. Допустим [6], что приняты специальные меры против образования этого специфического холловского пограничного слоя, а именно будем рассматривать движение плазмы между электродами, рассеченными (секционированными) таким образом, что на поверхности каждого из них может быть задано распределение потенциала $\psi(\xi) \neq \text{const}$. Конкретно, положим

$$\psi \Big|_j = [G_{(0)} + \xi \Psi_{(0)}]_j.$$

Тогда

$$\left[E_{\varphi}^{(i)} \Big|_j \right]_{t=0} = E_{\xi}^{(e)} \Big|_j \quad (21)$$

и можно утверждать, что $V_{(0)}$ является стационарным решением системы (13), удовлетворяющим граничным условиям. Пограничные слои при этом не возникают.

Нестационарный поток плазмы с $\xi \neq 0$, $\nu \neq 0$

Как из численных экспериментов, так и из качественных физических соображений [1, 7] видно, что за специфику течений отвечает эффект Холла. Факт существования при $\xi \neq 0$ стационарных потоков, удовлетворяющих уравнениям (13), (20), (21), наводит на мысль о поиске нестационарных решений системы (7)—(10) (для случая $\xi \neq 0$, $\nu \neq 0$), близких к такому стационарному потоку.¹ Соответственно введем начальное условие

$$w(x, y, t) \Big|_{t=0} = w_{(0)}(x, y) + N_w(x, y),$$

где N_w — малое отклонение от $w_{(0)}$, и будем искать нестационарное решение системы (7)—(10) в виде

$$w(x, y, t) = w_{(0)}(x, y) + \tilde{w}(x, y, t), \quad (22)$$

считая \tilde{w} малым.

Согласно результатам численного эксперимента [2], при наличии эффекта Холла решение (7)—(10) эволюционирует от тех или иных начальных условий в сторону усиления продольной составляющей электрического тока j_{ξ} . Из качественных соображений [7] также видно, что первоначальная величина j_{ξ} может нарастать в результате развития неустойчивости, связанной с наличием холловской проводимости.

Будем считать, что именно \tilde{w} является основным носителем j_{ξ} , другими словами, для $j_{(0)} = \text{rot } H_{(0)}$ и $\tilde{j} = \text{rot } \tilde{H}$, начиная с момента $t = 0$, имеет место соотношение

¹ Стационарное решение системы (7)—(10), близкое к $V_{(0)}$, для случая квазиодномерного канала получено в работе [8].

$$|\tilde{j}_\xi| \gg |j_{(0)\xi}|, \quad (23)$$

тогда как

$$|\tilde{H}| \ll H_{(0)} \equiv \rho_{(0)}. \quad (24)$$

Очевидно, эти неравенства не являются противоречивыми, они требуют лишь, чтобы $H_{(0)}$ слабо менялась по сечению канала, другими словами, ток $j_{(0)}$ почти не имел продольной составляющей $j_{(0)\xi}$.

Считаем, что поток плазмы ограничен непроницаемыми поверхностями $y = R_1(x)$ и $y = R_2(x)$ (на которых $G_{(0)}(x, y) = 0$ и $G_{(0)}(x, y) = -G_*$). Соответственно

$$v_n|_j = 0. \quad (25)$$

Пусть каждая из этих стенок представляет собой секционированный электрод, на котором поддерживается заданное распределение потенциала

$$\psi|_j = \left[G_{(0)} + \xi \Psi_{(0)} + v(y - R_1) \partial H_{(0)} / \partial x \right]_j,$$

что соответствует заданному

$$E_\xi^{(e)}|_j = - \left\{ \xi \nabla_\xi \Psi_{(0)}(x, y) + v \nabla_\xi [(y - R_1) \partial H_{(0)} / \partial x] \right\}_j. \quad (26)$$

Отметим также, что разность потенциалов на электродах не меняется со временем

$$\begin{aligned} & - \int_{R_1}^{R_2} (E_y + \partial A_y / \partial t) dy = \\ & = -G_* + \xi \left[\Psi_{(0)}(x, R_2) - \Psi_{(0)}(x, R_1) \right] + vs(\partial H_{(0)} / \partial x)|_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где $s \equiv R_2(x) - R_1(x)$ — сечение канала; A — вектор-потенциал, поскольку при нестационарном процессе $\nabla_y \Psi = - (E_y + \partial A_y / \partial t)$.

Таким образом, все внешние условия задачи (включая форму границы канала) заложены в структуре потока $V_{(0)}$, который предполагается известным. Его конкретизация требует решения нелинейной системы (14), к которому мы сейчас и перейдем.

4. Поток $V_{(0)}$ в узком канале с плавно меняющимся сечением

Ограничимся случаем узкого канала с плавно изменяющимся сечением (см. пример на рисунке). Изамагнитное решение системы (14) при $\text{rot } V_{(0)} = 0$ для такого канала имеет вид (см. Приложение)

$$\rho_{(0)} \equiv H_{(0)} = \rho_0(x) [1 + O(\delta^2)], \quad (28)$$

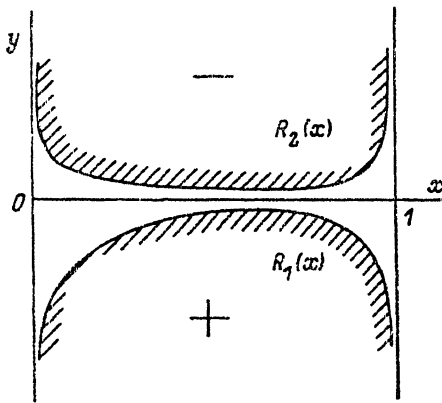
$$v_{(0)x} = v_0(x) [1 + O(\delta^2)], \quad (29)$$

$$G_{(0)x} = G_0(x, y) [1 + O(\delta^2)], \quad (30)$$

где

$$G_0(x, y) = -\rho_0(x) v_0(x) (y - R_1(x)). \quad (31)$$

Функции ρ_0 и v_0 одной переменной x связаны соотношениями



$$v_0(x) = \sqrt{2(1 - \rho_0 - W_0)}, \quad (32)$$

$$\rho_0(x) v_0(x) s(x) = -G_* = \text{const}, \quad (33)$$

с помощью которых каждая из них может быть выражена через заданное сечение $s(x) \sim \delta$.

Выпишем теперь порядки главных членов в разложениях величин. Согласно выбору единиц, характерное значение ρ_0 порядка 1. При не слишком больших D можно считать

$$W_0 \leq 1. \quad (34)$$

Тогда, согласно (32), (33),

$$v_0(x) \sim 1, \quad G_0(x, y) \sim \delta. \quad (35)$$

Таким образом, имеем из (28)—(30), (15) и (П6)

$$v_{(0)y} \sim \delta [1 + O(\delta^2)], \quad (36)$$

$$\frac{\partial \rho_{(0)}}{\partial x} \equiv \frac{\partial H_{(0)}}{\partial x} \sim \frac{\partial v_{(0)x}}{\partial x} \sim \frac{\partial v_{(0)y}}{\partial y} \sim \frac{\partial^2 H_{(0)}}{\partial y^2} \sim 1,$$

$$\frac{\partial \rho_{(0)}}{\partial y} \equiv \frac{\partial H_{(0)}}{\partial y} \sim \frac{\partial v_{(0)x}}{\partial y} \sim \delta. \quad (37)$$

Отметим еще, что в силу плавности течения для нормальной и тангенциальной компонент любого вектора \mathbf{b} имеем

$$b_n = [b_y - R'(x)b_x] [1 + O(\delta^2)], \quad (38)$$

$$b_\xi = [b_x + R'(x)b_y] [1 + O(\delta^2)] \quad (39)$$

(ось x выбрана так, что $R(x) \sim s(x) \sim \delta$).

В частности, как следует из (8), (37)

$$j_{(0)\xi} = O(\delta). \quad (40)$$

Области значений параметров. Предположения о свойствах течения

Прежде чем строить решение системы (7)—(10) на основе $V_{(0)}$, выберем область значений параметров ξ, ν, D , входящих в (7)—(10). Положим $D \ll 1$.

Пусть а сечение $\delta \sim D^\lambda$, где²

$$\xi \sim \nu - D^\alpha, \quad (41)$$

$$(1 - \lambda) < \alpha < 0.5 < \lambda \leq 1. \quad (42)$$

Ищем \tilde{H} в виде $\tilde{H} = Y(x, y, t) + X(x, t)$, где в соответствии с (5)

$$Y = \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} \tilde{f}_x dy. \quad (43)$$

Сделаем несколько допущений, которые будут проверены позже,

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial y} \sim D^{-1} \tilde{w}_1; \quad \int_{R_1}^y \tilde{w}_1 dy \sim D \tilde{w}_1; \quad (44)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial x} \sim \frac{\delta}{D} \tilde{w}_1; \quad \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} \sim \frac{1}{\sqrt{D}} \tilde{w}_1, \quad (45)$$

под \tilde{w}_1 здесь понимается любая из функций $\tilde{\rho}$, Y , \tilde{v}_x , \tilde{v}_y , а в (45) еще и $X(x, t)$,

$$\tilde{\rho} \sim \tilde{f}_x, \quad \tilde{v}_x \sim \tilde{v}_y \sim \tilde{f}_x \sqrt{D}, \quad (46)$$

$$X(x) \sim D^{\alpha + (1 - \lambda)} \tilde{f}_x. \quad (47)$$

Из выражений (43), (44), (47) следует $\tilde{H} \sim X$, а из (5), (39) — $\tilde{f}_x \sim \tilde{f}_x$.

Положив

$$\tilde{f}_x \sim D^\mu, \quad 0 < \mu < \lambda \quad (48)$$

и учитывая (40), можно убедиться, что условия (23), (24) выполняются.

Отметим еще, что $\tilde{\rho} \neq 0$ определяет неизомагнитность течения: из (12) и принятых соотношений следует

$$\tilde{a} = -\tilde{\rho}/\rho_0 + X/\rho_0 \neq \text{const}, \quad (49)$$

$X \ll \tilde{\rho}$, однако мы сохраняем соответствующий член в (49), поскольку при интегрировании в связи с условием (27) этот член, не зависящий от y , может дать вклад, не меньший, чем член с $\tilde{\rho}(x, y, t)$, который интегрируется согласно (44).

Упрощение краевой задачи

Подставляя (22) в (12), учитывая (49) и выписывая лишь члены низшего порядка, получаем

$$\nu(\partial \tilde{f}_x / \partial y) = -\xi \rho_0' \rho_0^{-1} (\partial \tilde{\rho} / \partial y). \quad (50)$$

Соответственно уравнение непрерывности, входящее в систему (7)–(10), приобретает вид

$$-(\partial \tilde{\rho} / \partial t) = \rho_0 (\partial \tilde{v}_y / \partial y), \quad (51)$$

² Данный выбор параметров соответствует магнитному числу Рейнольдса $Re_m \ll \delta^{-2}$; стационарное течение при $Re_m \geq \delta^{-2}$ рассмотрено в [8].

а компоненты уравнения Эйлера

$$\partial \tilde{v}_x / \partial t = \rho_0' \tilde{\rho} / \rho_0, \quad (52)$$

$$- (\partial v_y / \partial t) = D \rho_0^{-1} \tilde{\rho}_y' + \tilde{f}_x. \quad (53)$$

Теперь, исключив \tilde{v}_y и \tilde{f}_x из соотношений (50), (51) и (53), получим

$$\frac{1}{D} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial y^2} + \gamma(x) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y}, \quad (54)$$

$$\gamma(x) = - \xi (\nu D)^{-1} \rho_0'(x). \quad (55)$$

Таким образом, система (8) — (10) свелась к одному уравнению (54). Эффект Холла определяет в нем член, соответствующий пондеромоторной силе, которая отодвигает вещество от электрода или притягивает к нему.

Граничные условия для функции $\tilde{\rho}$ получим подстановкой (22) в (25). Поскольку $v_{(0)n}|_j = 0$, то имеем $\tilde{v}_n|_j = 0$. Соответственно из (52), (53), (38) находим

$$[D \rho_0^{-1} (\partial \tilde{\rho} / \partial y) + \tilde{f}_x]_j = 0. \quad (56)$$

Согласно (50),

$$\tilde{f}_x = - \xi \rho_0' \tilde{\rho}' / (\nu \rho_0) + \pi(x), \quad (57)$$

где $\pi(x)$ — произвольная функция x .

Приравниваем $E_\zeta^{(j)}|_j = E_\zeta^{(e)}|_j$, где $E_\zeta^{(e)}|_j$ определено равенством (26), $E_\zeta^{(j)}$ получаем при подстановке (22) в (7) и находим

$$[\tilde{f}_x + \xi \rho_0' \tilde{\rho}' / (\nu \rho_0)]_j = 0; j = 1, 2. \quad (58)$$

Оба соотношения (58) удовлетворяются выбором $\pi(x) \equiv 0$. Таким образом, и в объеме канала

$$\tilde{f}_x = - \xi \rho_0' \tilde{\rho}' / (\nu \rho_0), \quad (59)$$

а (56) оказывается эквивалентным условиям

$$[\partial \tilde{\rho} / \partial y + \gamma(x) \tilde{\rho}]_j = 0; j = 1, 2. \quad (60)$$

Исходя из структуры краевой задачи (54), (60) для $\tilde{\rho}$ непосредственно, можно сделать некоторые выводы о свойствах течений с эффектом Холла (i). В выбранной области (41), (42) значений параметров все течения с одинаковыми γ и D "тождественны", т. е. одинаковым образом эволюционируют от начальных условий. Отметим, что у всех этих течений одно и то же отношение $\xi / \nu \sim \lambda_* N_* / \rho_*$ (ii). Задача (54), (60) имеет наиболее простой вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial u^2} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial u}; \quad \left[\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial u} + \tilde{\rho} \right]_j = 0 \quad (61)$$

в переменных $\tau = \gamma \sqrt{D} t$, $u = \gamma y$ (iii). Существует стационарное решение для функции $\tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho} = N(x) \rho(x, y); \quad \rho(x, y) = \exp \{ - \gamma(x) y \}, \quad (62)$$

где N — произвольная функция x , такая, что $N' \sim \gamma \delta N$; $\rho(x, y)$ — будем называть "функцией стационарного скачка".

В частности, в ускоряющих каналах, где $\rho_0'(x) < 0$, решение (62) представляет собой прианодный скачок; его свойства близки соответствующим установившимся

течениям [2] (более подробное сопоставление с результатами численных расчетов проведено в [9]).

По известному $\tilde{\rho}$ легко найти все остальные величины. Приняв $\tilde{v}|_{t=0} = 0$, имеем, согласно (52), (53),

$$\tilde{v}_x(x, y, t) = \frac{\rho_0'}{\rho_0} \int_0^t \tilde{\rho} dt; \quad \tilde{v}_y(x, y, t) = \frac{\xi \rho_0'}{\nu \rho_0} \int_0^t \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial u} + \tilde{\rho} \right) dt. \quad (63)$$

Функция X определяется подстановкой (22) в условие (27)³

$$X(x, t) = -\xi G_*^{-1} \left[D(\tilde{\rho}|_2 - \tilde{\rho}|_1) / 2 + \rho_0 (Y|_2 - Y|_1) \right]. \quad (64)$$

Вид соотношений (43), (59), (64), (63), а также структура переменных τ и u в выражениях (61) для $\tilde{\rho}$ подтверждают правильность сделанных ранее предположений о свойствах величин при условии, что аналогичными свойствами обладают их начальные значения; будем считать это условие выполненным. Присутствие ρ_0 в формулах не нарушает принятых соотношений, поскольку $\rho_0'(x) \sim 1$, а $1 < \gamma \delta$.

Выпишем теперь выражение (7) для электрического поля, включая члены $\sim \xi \tilde{\rho}$, $E_x = g_x$; $g = -\nabla \{ G_{(0)} + \xi \Psi_{(0)} \}$,

$$E_y = g_y - \nu (\partial H_{(0)} / \partial x) + \nu_0 X + \xi^2 \rho_0' (\nu \rho_0)^{-1} \{ (\partial \tilde{\rho} / \partial u) / 2 + \tilde{\rho} \}. \quad (65)$$

Отсюда видно, что со временем изменяется только E_y . При этом E_y сильнее других величин зависит от значения ξ . Эти заключения совпадают с выводами [2] о скачке потенциала.

Формула (63) для v_y и вид (62) функции ρ показывают, что поперечная скорость в режиме стационарного скачка отсутствует. Однако продольная скорость \tilde{v}_x существует, модуль ее линейно нарастает со временем. Поэтому внутри стационарного скачка (при неизменных во времени электромагнитных величинах и плотности $\tilde{\rho}$) должна присутствовать усиливающаяся струя, направленная вдоль канала.

Отметим в заключение, что фактор $\gamma(x)$, определенный здесь равенством (55), является, согласно [10, 11], общей характеристикой течений, описываемых системой (7)–(10), и разложение в условиях (41) фактически велось по его большой величине. Соответственно точкой “привязки” всего комплекса явлений будет точка перегиба функции $\rho_{(0)}(x)$, в которой ρ_0' достигает наибольшего значения.

Автор благодарен Б. А. Тверскому, А. В. Гетлингу и Л. С. Соловьеву за обсуждение результатов работы.

П р и л о ж е н и е

При плоской геометрии канала (4) система (14) может быть записана в эквивалентном виде с помощью уравнения Бернулли и уравнений “вмороженности” векторных линий векторов $H = H e_z$ и $\text{rot } v = f e_z$ [5]

$$v^2 / 2 + W + K^2(G) \rho = U(G), \quad (\text{П1})$$

$$H / \rho = K(G), \quad (\text{П2})$$

³ Вид уравнения диффузии (50) говорит о квазистационарности магнитного поля. Соответственно его вектор-потенциал A не проявляет себя.

$$f/\rho + K'(G) \cdot K(G)\rho = U'(G), \quad (П3)$$

$$f = \Delta G/\rho + \nabla(\rho^{-1}) \cdot \nabla G. \quad (П4)$$

Здесь G — функция потока вещества, определенная соотношением

$$\rho v = [e_z \nabla G], \quad (П5)$$

$K(G)$ и $U(G)$ — произвольные функции G (которые можно конкретизировать, например, задавая распределение величин на входе канала), W — энтальпия ($\nabla W = \nabla \mathcal{P}/\rho$), $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

В каналах с сечением $s(x) = R_2 - R_1$ при выбранной нормировке

$$(\partial/\partial x) \sim 1, \quad (\partial/\partial y) \sim \delta^{-1}, \quad (П6)$$

где δ — характерное значение $s(x)$.

Принимая δ малым, получим

$$(\partial/\partial y) \gg (\partial/\partial x), \quad (П7)$$

что позволяет применить теорию течений, плавно меняющихся вдоль канала [12, 5], и получить решение системы (П1)—(П4) следующим образом. С учетом (П7) выражение (П4) дает в нулевом приближении по δ , которое будем обозначать индексом нуль,

$$f = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial G_0}{\partial y} \right) = - \frac{\partial v_{0x}}{\partial y},$$

для потока $K(G) \equiv U(G) \equiv 1$ (безвихревого, $f = 0$) находим, что $v_{x0} = v_0(x)$. В силу (П5) и (П6) $v_{0y} \sim \delta$, а (П1) дает соотношение (32), из которого видно, что ρ_0 является также функцией только x . Согласно (П5), $v_{x0} \cdot \rho_0 = -(\partial G_0/\partial y)$, откуда и следуют равенства (31) и (33). Учитывая члены следующего порядка по δ в исходном выражении (П4), можно убедиться в справедливости выражений (28)—(30).

Список литературы

- [1] Морозов А. И., Соловьев Л. С. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974. Вып. 8. С. 3—87.
- [2] Брушлинский К. В., Морозов А. И. // Там же. С. 88—163.
- [3] Алексеева Л. М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 4. С. 826—828.
- [4] Алексеева Л. М. // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы / Под ред. В. Д. Шафранова. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 4. С. 113—193.
- [5] Соловьев Л. С. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245—289.
- [6] Морозов А. И., Соловьев Л. С. // ЖТФ. 1964. Т. 34. Вып. 7. С. 1141—1153.
- [7] Алексеева Л. М. // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 21. С. 1310—1312.
- [8] Морозов А. И., Шубин А. П. // ТВТ. 1965. Т. 3. № 6. С. 826—837.
- [9] Алексеева Л. М. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 3. С. 567—571.
- [10] Алексеева Л. М. Препринт НИИЯФ МГУ. № 88-38/59. М., 1988. 42 с.
- [11] Алексеева Л. М. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 10. С. 1—4.
- [12] Морозов А. И., Соловьев Л. С. // ДАН СССР. 1963. Т. 149. № 3. С. 550—553.

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского университета им. М. В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
26 июля 1990 г.
В окончательной редакции
13 мая 1991 г.