

03

© 1992 г.

РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ И КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПАРЫ КАПЕЛЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Мухина Е. И., Григорьев А. И.

Методом помодового анализа рассчитывается равновесный рельеф пары близко расположенных электропроводных капель разных размеров в однородном электростатическом поле, коллинеарном оси симметрии системы. Аналитическим путем определяются критические условия реализации в каплях электродинамической неустойчивости, способной привести как к перераспределению заряда между каплями, так и к их слиянию. Качественно оценивается влияние внешнего электрического поля на величину коэффициента диффузионной коагуляции капель.

Введение

Задача расчета равновесных форм и критических условий электрогидродинамической неустойчивости двух близко расположенных электропроводных капель в однородном электростатическом поле представляет интерес в связи с разнообразными техническими, технологическими и геофизическими приложениями, обусловленными широким использованием жидкокапельных аэрозолей, многофазных жидкостных систем и упорядоченных потоков монодисперсных капель во внешних электрических полях [1–3], а также весьма частой реализацией подобной комбинации в природных условиях [4–6].

Несложно видеть уже из общефизических соображений, что наличие внешних электрических полей и электрических зарядов на отдельных каплях приведет к изменению временной эволюции жидкокапельной системы в связи с влиянием зарядов и полей на константы коагуляции [1, 5]. Но, несмотря на очевидную важность исследования обсуждаемой проблемы, работы в этом направлении носят случайный характер, и цельной физической картины до сих пор не существует. Следует указать, что в отсутствие внешних электрических полей влияние собственных зарядов двух близко расположенных капель на их равновесные формы, критические условия реализации электрогидродинамической неустойчивости и константы коагуляции достаточно детально проанализировано как экспериментально, так и теоретически (см., например, [7] и указанную там литературу). Хуже обстоит дело с учетом влияния внешних электрических полей, хотя определенные экспериментальные, а также качественные теоретические результаты по исследованию критических условий электрогидродинамической неустойчивости пары капель в однородном электростатическом поле имеются [8–11]. Что же касается аналитического исследования равновесных форм пары капель и аналитического же исследования критических условий реализации их электрогидродинамической неустойчивости, то такое рассмотрение до сих пор не было проделано и частично заполнить этот пробел может данная работа.

1. Пусть две проводящие капли радиусами R_1 и R_2 , расстояние между центрами которых R , зафиксированы во внешнем однородном электрическом поле E_0 , коллинеарном оси симметрии системы (рис. 1). Будем искать равновесные формы капель в виде разложения возмущений их поверхностей по нормированным полиномам Лежандра

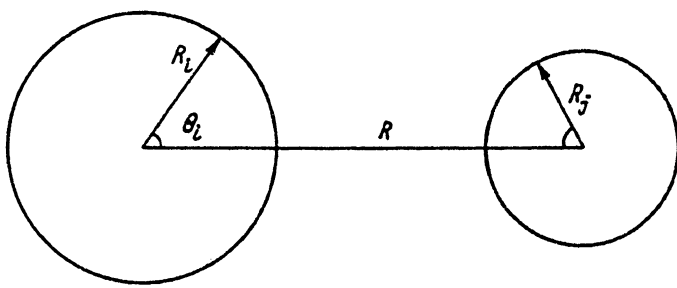


Рис. 1. Схема анализируемой системы из двух капель.

$$r_i(\theta_i) = R_i + \sum_0^{\infty} a_n \mathcal{P}_n(\cos\theta_i) \equiv R_i + f(\theta_i), \quad i=1; 2, \quad (1)$$

где θ_i — угол между радиус-вектором точки на поверхности капли и направлением на центр другой капли.

Равновесный рельеф поверхности капель установится в результате взаимодействия лапласовских и электрических сил

$$P_{\alpha}^i = P_0 - P_*^i + P_E^i. \quad (2)$$

Здесь P_{α}^i — лапласовское давление на поверхность i -й капли, $P_E^i = E_i^2/8\pi$ — давление электрического поля; P_0 и P_*^i — постоянные давления в среде и капле соответственно.

Лапласовское давление под искаженной сферической поверхностью в приближении $|f_i(\theta_i)| \ll R_i$ описывается известным соотношением [12]

$$P_{\alpha} = \frac{2\alpha}{R_i} - \frac{\alpha}{R_i^2} (2 + \hat{L}) f_i(\theta_i) \equiv \frac{2\alpha}{R_i} - \frac{\alpha}{R_i^2} \sum_0^{\infty} [2 - n(n+1)] a_n^i \mathcal{P}_n(\cos\theta_i), \quad (3)$$

где \hat{L} — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Полиномы Лежандра $\mathcal{P}_n(\cos\theta_i)$ для \hat{L} являются собственными функциями. Для нахождения P_E необходимо найти решение уравнения Лапласа для потенциала

$$\Delta\Phi^i = 0, \quad \Phi^i = \Phi_0^i + \Phi_{ij},$$

где Φ_0^i — потенциал изолированной i -й капли в поле; Φ_{ij} — дополнительный потенциал, возникающий из-за индукционного взаимодействия с j -й каплей ($j = 2; 1$).

Тогда плотность заряда на поверхности капли

$$\sigma_i = \sigma_{i0} + \sigma_{ij}. \quad (4)$$

Здесь σ_{i0} — плотность заряда одиночной капли в поле в предположении ее сфероидальности с эксцентриситетом e_i [13]

$$\sigma_{i0}(\theta_i) = \frac{E_0 e_i^2 \cos\theta_i \eta(\theta_i)}{2\pi(\text{Arth } e_i - e_i) \sqrt{1 - e_i^2} \cos^2\theta_i \sqrt{1 - e_i^2}},$$

$$\eta^2 = \frac{1 - e_i^2}{1 - e_i^2 \cos^2 \theta_i} \quad (5)$$

σ_{ij} — поверхностная i -я плотность заряда, индуцированного j -й каплей.

Причем элемент заряда $dq_j = \sigma_j dS_j$ индуцирует, согласно [14], заряд с плотностью

$$d\sigma_{ij} = \frac{\sigma_j dS_j}{4\pi R_0 R_i} \left[1 - \frac{R_0^2 - R_i^2}{(R_0^2 + R_i^2 - 2R_0 R_i \cos \gamma)^{3/2}} \right] \equiv \sigma_j I(\theta_j; \theta_i) dS_j \quad (6)$$

Тогда (4) имеет вид

$$\sigma_i(\theta_i) = \sigma_{i0}(\theta_i) + \int_{S_j} \sigma_j I(\theta_j; \theta_i) dS_j \quad (4a)$$

Те же рассуждения справедливы для другой капли с поправкой на направление поля $E_0 \rightarrow -E_0$

$$\sigma_j(\theta_j) = \sigma_{j0}(\theta_j) + \int_{S_i} \sigma_i I(\theta_i; \theta_j) dS_i \quad (4б)$$

Последние два выражения дают интегральное уравнение относительно $\sigma_i(\theta_i)$

$$\sigma_i(\theta_i) = \left[\sigma_{i0} + \int_{S_j} \sigma_{j0}(\theta_j) I(\theta_j; \theta_i) dS_j \right] + \int_{S_j} \sigma_i(\theta_i') \left(\int_{S_i} I(\theta_i'; \theta_j) I(\theta_j; \theta_i) dS_j \right) dS_i \quad (7)$$

Разложив выражения (5), (6) в ряд по малым параметрам $\nu_i = R_i/R$, $\nu_j = R_j/R$ ($\nu_i, \nu_j < 1$) и решив (7), найдем давление электростатического поля на поверхность i -й капли в линейном по e^2 приближении с точностью до ν^4 в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n \cos(\theta_i)$.

$$\begin{aligned} P_E(\theta_i) = 2\pi\sigma_i^2 \approx & \frac{9E_0^2}{8\pi} \left\{ \mathcal{P}_0 \left[\frac{1}{3} + \frac{\nu_j^2}{\nu_i} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{15}e_j^2 - \frac{4}{15}e_i^4 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu_j^2 \nu_i \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{45}e_j^2 - \frac{22}{45}e_i^2 \right) + \frac{\nu_j^6}{\nu_i^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15}e_j^2 + \frac{14}{45}e_i^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \mathcal{P}_1 \left[-\frac{1}{5}e_j^2 \nu_i^2 + \nu_j^3 \nu_i \left(\frac{8}{3} + \frac{817}{126}e_i^2 + \frac{211}{15}e_j^2 \right) - \frac{1}{5}e_j^2 \frac{\nu_j^2}{\nu_i} \right] + \mathcal{P}_2 \left[\frac{2}{3} + \frac{12}{35}e_i^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\nu_j^3}{\nu_i} \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{15}e_j^2 - \frac{2}{315}e_i^2 \right) + \nu_i^2 \nu_j^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{45}e_j^2 + \frac{362}{315}e_i^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\nu_j^6}{\nu_i^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15}e_j^2 + \frac{50}{63}e_i^2 \right) \right] + \mathcal{P}_3 \left[4 + \frac{48}{5}e_j^2 + 5e_i^2 \right] \nu_j^3 + \\ & \left. + \frac{8}{35}e_i^2 \left[2 + \frac{\nu_j^3}{\nu_i} - \nu_i^2 \nu_j^2 + \frac{\nu_j^6}{\nu_i^2} \right] \mathcal{P}_4 + \frac{40}{21} \nu_i^3 \nu_j^2 e_i^2 \mathcal{P}_5 \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

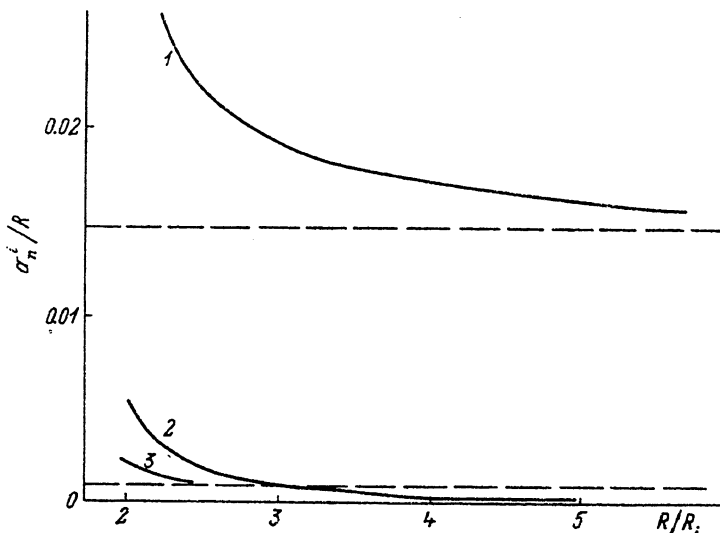


Рис. 2. Зависимость амплитуд первых трех мод капиллярных волн, определяющих равновесный рельеф капель, электростатически взаимодействующих в однородном внешнем поле, от расстояния между их центрами.

1 — основная мода ($n = 2$), 2 — мода с $n = 3$, 3 — мода с $n = 4$. Штриховые прямые — амплитуды мод изолированных капель в однородном электрическом поле.

Полученное выражение при $v_i = v_j = 0$ совпадает с выражением для давления поля на поверхность изолированной проводящей капли в поле E_0 [15].

Теперь подставим (8), (3) в (2) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых $\mathcal{P}_n(\cos\theta_j)$, найдем неизвестные амплитуды $a_n^{(i)}$ в выражении для равновесной формы i -й капли (1).

Случай $n = 1$ соответствует трансляционному движению капли как целого, поэтому в нашем статическом случае мы его не рассматриваем;

$$\frac{a_2^{(i)}}{R_i} = \frac{9}{16\pi} W_i^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{6}{35} e_i^2 + \frac{v_j^3}{v_i} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{15} e_j^2 - \frac{1}{315} e_i^2 \right) + v_i^2 v_j^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{45} e_j^2 + \frac{181}{315} e_i^2 \right) + \frac{v_j^6}{v_i^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15} e_j^2 + \frac{25}{63} e_i^2 \right) \right];$$

$$\frac{a_3^{(i)}}{R_i} = \frac{9}{20\pi} W_i^2 v_i^2 v_j^3 \left(1 + \frac{17}{5} e_j^2 + \frac{5}{4} e_i^2 \right);$$

$$\frac{a_4^{(i)}}{R_i} = \frac{1}{35\pi} W_i^2 e_i^2 \left(1 + \frac{1v_j^2}{2v_i} - \frac{1}{2} v_i^2 v_j^2 + \frac{1v_i^2}{2v_i^2} \right);$$

$$\frac{a_5^{(i)}}{R_i} = \frac{15}{196\pi} e_i^2 W_i^2 v_i^2 v_j^3; \quad \frac{a_0^{(i)}}{R_i} = \frac{1}{45} \left(\frac{9}{16\pi} W_i^2 \right)^2. \quad (9)$$

Здесь $W_i^2 = E_0^2 R_i / \alpha$ — параметр Тейлора i -й капли, связанный в нашем случае с параметром Тейлора j -й капли $W_j^2 = W_i^2 v_j / v_i$. Амплитуда $a_0^{(i)}$ найдена из

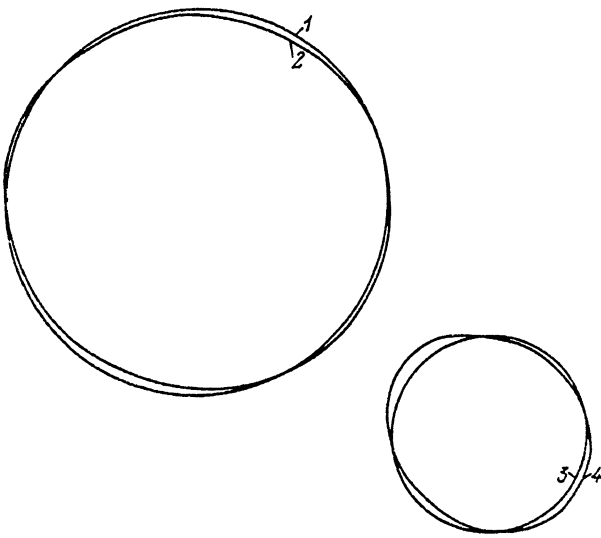


Рис. 3. Исходная сферическая форма капля (1, 3) и равновесная форма, установившаяся в результате индукционного взаимодействия пары капель в горизонтальном внешнем поле (2, 4).

условия несжимаемости капли. Полученные зависимости (рис. 2) показывают, что 1) в нулевом приближении капля имеет форму вытянутого сфероида, эксцентриситет которого зависит не только от величины однородного внешнего поля E_0 , но и от степени близости и параметров другой капли

$$e_i^2 \approx \frac{3a_2^{(i)}}{R} \approx \frac{9}{16\pi} W_i^2 \left(1 + 2 \frac{v_j^2}{v_i^2} + 2 v_i^2 v_j^2 + \frac{v_j^6}{v_i^2} \right);$$

2) амплитуды четных мод при разведении капель на бесконечность стремятся к своим предельным значениям, соответствующим случаю изолированной капли в однородном поле; 3) при сближении увеличиваются амплитуды четных мод и возбуждаются нечетные моды, что приводит к формированию на вершинах капель выступов в сторону соседней капли. Рис. 3, 4 иллюстрируют расчетные формы капель при условиях, характерных для экспериментов [8–9], реальные возмущения формы капель больше расчетных, так как в проведенном рассмотрении не учитывалось влияние аэродинамики при движении капель [8] и поляризация среды [9].

2. Принимая во внимание тот факт, что неустойчивость капли в поле начинается с неустойчивости именно основной моды [15], проверим, будет ли найденное отклонение амплитуды при $\mathcal{P}_2(\cos\theta_i)$ устойчивым.

Примем, что равновесные формы пары капель в поле E_0 действительно сфероидальны и по отношению к такой форме поверхности i -й капли зададим возмущение вида $\xi_0 \mathcal{P}_2(\cos\theta_i)$. Будем искать форму рельефа поверхности капли, который установится в результате взаимодействия с полем.

Уравнение равновесной поверхности будем искать в виде

$$r_i = r_i(\theta_i) + f(\theta_i) \equiv r(\theta_i) + \sum_0^{\infty} A_n^{(i)} \mathcal{P}_n(\cos\theta_i). \quad (10)$$

Тогда для нахождения $f(\theta_i)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\delta P_E^i &= \delta P_\alpha^i - \delta P^i; & r_i &= r_i(\theta_i) + f(\theta_i); \\
\Delta(\delta\Phi^i) &= 0; & r_i &> r_i(\theta_i) + f(\theta_i); \\
\delta\Phi^i &= 0; & r_i &= r_i(\theta_i) + f(\theta_i),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\delta\Phi^i$, δP_E^i и δP_α^i — полные добавки к соответствующим величинам, появляющимся из-за возмущения поверхности $\xi_0 P_2(\cos\theta_i)$; δP^i — малое изменение постоянного давления внутри капли, связанное с изменением формы капли.

Выражение для лапласовского давления под искаженной сфероидальной поверхностью несложно получить в виде разложения по степеням e_i^2 , повторяя рассуждения, приведенные в [12] при выводе лапласовского давления под искривленной сферической поверхностью,

$$\begin{aligned}
\delta P_\alpha^i &= \frac{\alpha}{R_i^2} \left\{ \frac{2}{3}(3 - 2e_i^2) + \frac{1}{3}(3 + e_i^2)\hat{L} + e_i^2 \cos^2\theta(4 - \hat{L}) \right\} f(\theta_i) = \\
&= -\frac{\alpha}{R_i^2} \sum_0^\infty A_n^{(i)} \left\{ \frac{2}{3}(3 - 2e_i^2) - \frac{1}{3}n(n+1)(3 + e_i^2) + \right. \\
&\quad \left. + e_i^2[4 + n(n+1)] \cos^2\theta_i \right\} \mathcal{P}_n(\cos\theta_i).
\end{aligned}$$

Раскладывая произведение $\cos^2\theta_i \mathcal{P}_n(\cos\theta_i)$ по $\mathcal{P}_m(\cos\theta_i)$, окончательно получим

$$\begin{aligned}
\delta P_\alpha^i &= -\frac{\alpha}{R_i^2} \sum_0^\infty \left\{ \left[\frac{2}{3}(3 - 2e_i^2) - \frac{1}{3}(3 + e_i^2)(n+1) \right] \mathcal{P}_n + \right. \\
&\quad \left. + e_i^2[4 + n(n+1)] \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \mathcal{P}_{n+2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2n(n+1)-1}{(2n-1)(2n+3)} \mathcal{P}_n + \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \mathcal{P}_{n-2} \right\} A_n^{(i)}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Чтобы найти выражение для добавки δP_E к давлению электрического поля на поверхность сфероидальной капли, претерпевшей виртуальное возмущение формы, учтем, что в приближении $\sim e^2$ возмущение $\xi(\theta_i) = \xi_0 P_2(\cos\theta_i)$ не изменяет

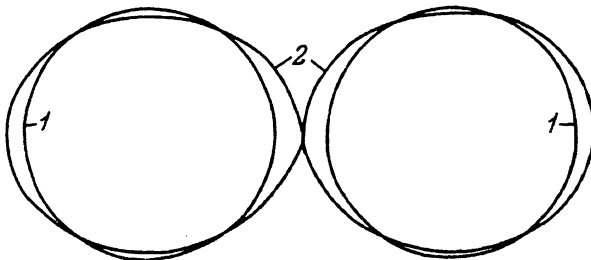


Рис. 4. Исходные сферические формы (1) и равновесные формы капель, установившиеся в результате индукционного взаимодействия пары капель в поле (2).

Отклонение от сферической формы на рисунке увеличено в 5 раз от расчетного.

сфероидальной формы капли, но соответствует лишь увеличению эксцентриситета сфероида

$$e_i^2 \rightarrow e_{0i}^2 = e_i^2 + \delta e_i^2,$$

где

$$\delta e_i^2 = \frac{3\xi_0}{r_i} \left(1 - \frac{7}{6} e_i^2\right).$$

Тогда $e_{ij}^2 = e_j^2 + \delta e_j^2$, где

$$\delta e_j^2 = \frac{9}{16\pi} W_j^2 \frac{4}{15} \frac{v_i^3}{v_j} \delta e_i^2 = \frac{4}{15} v_i^2 e_i^2 (1 - 2v_j^2/v_i) \delta e_i^2.$$

Будем считать, что мы помещаем i -ю каплю в неоднородное внешнее поле, состоящее из поля E_0 , а также поля проводящего сфероида, имеющего поверхностную плотность заряда (7). Тогда суммарный потенциал представим в виде суперпозиции мультипольных моментов, а остальными в использованном приближении можно пренебречь

$$\varphi = -E_0 x + \frac{P_x}{r^2} + h(v),$$

p — дипольный момент.

Тогда в малой окрестности капля на расстоянии $\sim (R_0 - R_i)$

$$E_* \approx E_0 + \frac{2P_x}{(R_0 - R_i)^3} = E_0 \left[1 + \frac{2v_j^3}{(1-v_j)^3} \left(1 + \frac{2}{3} e_j^2 \right) \right]. \quad (13)$$

Неоднородность поля также имеет более высокий порядок малости по v , чем требуется.

Тогда подставим в (5) вместо E_0 значение (13), а вместо e_i^2 — увеличенное значение $e_i^2 + \delta e_i^2$ и, раскладывая получившееся выражение по δe_i^2 , найдем изменение напряженности поля в окрестности капли, связанное с возмущением ее формы,

$$\delta E_i = 2\pi\sigma_i(\theta_i; E_*) \left[-\frac{3}{5 + 3e_i^2} + \frac{\cos^2 \theta_i}{1 - 2e_i^2 \cos^2 \theta_i} \right] \delta e_i^2. \quad (14)$$

Подставим $\delta P_{\alpha}^{(i)}$ и

$$\delta P_E = 4\pi\sigma_i(\theta_i; E_*) \delta\sigma_i(\theta_i; E_*)$$

в (11) и, приравнявая коэффициенты при равных полиномах Лежандра, найдем равновесные амплитуды A_n^i , определяющие отклонение формы капли от сфероидальной,

$$\frac{A_2^i}{R_i} = \frac{\xi_0}{R_i} \frac{81}{280\pi} W_i^2 \left(1 + \frac{4171}{630} e_i^2 \right) \left[1 + \left(4v_j^3 + 12v_j^4 \right) \left(1 + \frac{2}{3} e_j^2 \right) \right]. \quad (15)$$

Вычисления показывают, что все последующие коэффициенты тоже отличны от нуля, каждый последующий примерно на порядок меньше предыдущего.

Коэффициенты A_n^i определяют амплитуды стационарных равновесных отклонений мод капиллярных волн от значекий, характерных для сфероидальной формы капли, при исходном возмущении.

$$\xi(\theta_i) = \xi_0 \mathcal{P}_2 \cos(\theta_i).$$

3. Из (15) следует, что в результате взаимодействия виртуального возмущения с внешним электрическим полем амплитуда исходного возмущения будет уменьшаться при $A_2^2 < \xi_0$. Это требование позволяет записать условие устойчивости пары капель в однородном электрическом поле в виде

$$\frac{81}{280\pi} W_{*i}^2 \left(1 + \frac{4171}{630e_i^2}\right) \left[1 + 4\nu_j^3(1 + 3\nu_j) \left(1 + \frac{2}{5}e_j^2\right)\right] - 1 < 0. \quad (16)$$

При выполнении противоположного условия амплитуда основной моды, а с ней и всех более высоких мод будет расти и $\xi(\theta_i)$ будет неограниченно увеличиваться. Приравняв в (16) $e_i^2 \approx 3a_2^{(i)}/R_i$, $e_j^2 \approx 3a_2^{(j)}/R_j$, получим для равных капель критическую зависимость, которая (рис. 5) хорошо согласуется с данными экспериментов при $(R/R_i) > 2.5$. На более близких расстояниях (при $(R/R_i) \rightarrow 2$) критическая величина W_{*i} должна стремиться к нулю, как показано штриховой линией. Для сравнения приведена критическая зависимость, полученная численно в [10] и в результате аналитического расчета, проведенного в предположении сфероидальности капель. На том же графике представлены экспериментальные точки из работы [11]. Из графика видно, что результат приведенного рассмотрения, данные численного расчета [10] и модельного расчета [11] хорошо согласуются между собой и с данными экспериментов при $(R/R_i) \geq 2.5$. При меньших значениях R/R_i проведенное выше рассмотрение непригодно, так как в нем не учитывались более высокие степени электрических моментов, чем дипольные. Ясно, что при $(R/R_i) \rightarrow 2$ должны расти амплитуды высоких мод капиллярных волн и искажение сфероидального рельефа капель должно стать более значительным. Это приведет к локальному усилению поля между каплями и к снижению критических значений W_j . В связи со сказанным вызывает удивление, что результаты модельного расчета [11], где использовалась в качестве равновесной формы капель сфероидальная, так хорошо согласуются с экспериментальными данными.

4. Что касается влияния электрического поля на величину коэффициента диффузионной коагуляции капель, то в соответствии с вышеприведенным анализом можно выделить два возможных механизма, связанных в обоих случаях

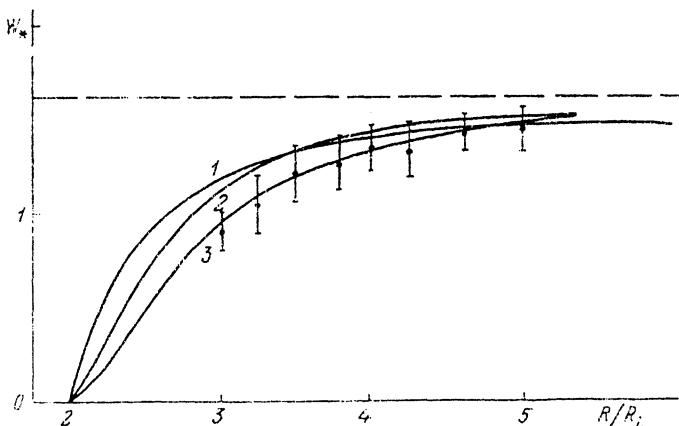


Рис. 5. Зависимость критического для реализации электрогидродинамической неустойчивости параметра W от расстояния между каплями.

1 — результаты расчета, проведенного в данной работе; 2 — зависимость, полученная путем численного анализа в [10]; 3 — результат модельного расчета на основе представлений о сфероидальных равновесных формах капель [11]. Экспериментальные точки — данные работы [11] при $R_1 = R_2 = 0.51$ мм.

с увеличением эффективного сечения столкновения капель. Первый механизм обусловлен деформацией исходной слабо сферической формы капель при их сближении за счет поляризационного взаимодействия и соответствующего удлинения вдоль общей оси симметрии. Это приведет к увеличению эффективного сечения столкновения и значения константы коагуляции. Но, как видно из вышеприведенного анализа (рис. 2), относительные удлинения капель весьма незначительны даже в сильных полях и добавка к величине коэффициента коагуляции, посчитанного в отсутствие электрического поля, будет незначительной — порядка сотых долей абсолютной величины.

Другой механизм влияния внешнего электрического поля на величину коэффициента коагуляции связан с электрогидродинамической неустойчивостью капель в достаточно сильном поле, проявляющейся в выбросе с вершин сближающихся капелек струек жидкости навстречу друг другу. Этот механизм в соответствии с рис. 5 может проявляться на расстояниях между центрами капель в несколько диаметров и должен приводить к существенному увеличению значения константы коагуляции в сильных электрических полях. Величины напряженностей полей, при которых этот механизм будет эффективно работать, согласно данным, представленным на рис. 5, должны составлять не менее десятка процентов от критических в смысле устойчивости по Тейлору для изолированной капли во внешнем электрическом поле, что подтверждается экспериментальными данными [5, 16].

Список литературы

- [1] *Верещазин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М.* Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия, 1974. 480 с.
- [2] *Григорьев А. И., Сыщиков Ю. В., Ширяева С. О.* // ЖПХ. 1989. Т. 63. № 9. С. 2020—2026.
- [3] *Бальгин И. Е.* Электрическая прочность жидких диэлектриков. М.: Энергия, 1964. 227 с.
- [4] *Григорьев А. И.* // Метеорология и гидрология. 1988. № 5. С. 67—75.
- [5] *Мучник В. М., Фишман Б. Е.* Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 208 с.
- [6] *Григорьев А. И., Гершензон Н. И., Гохберг М. Б.* // ДАН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1087—1090.
- [7] *Мухина Е. И., Григорьев А. И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 25—32.
- [8] *Бейтуганов М. Н., Белогорков Л. Г.* // Тр. Высокотемпературного геофизического ин-та. 1987. С. 8—11.
- [9] *Sartor J. D., Abbot C. E.* // J. Geophys. Res. 1968. Vol. 73. N 20. P. 6415—6423.
- [10] *Brazier-Smith P. R.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. N 1. P. 1—6.
- [11] *Latham J., Roxburg I. W.* // Proc. Roy. Soc. 1966. Vol. A295. P. 84—97.
- [12] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [13] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
- [14] *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
- [15] *Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И.* // ЖТФ. 1989. Т. 50. Вып. 6. С. 27—34.
- [16] *Власенко С. С., Ивлева Л. С.* // Тез. докл. XV Всесоюз. конф. "Актуальные вопросы физики аэродисперсных систем". Одесса, 1989. Т. 1. С. 119.

Ярославский
университет

Поступило в Редакцию
17 января 1991 г.