

04; 10
© 1992 г.**ВЛИЯНИЕ СКИН-ЭФФЕКТА В РЕЛЬСОТРОННОМ УСКОРИТЕЛЕ
НА ПАРАМЕТРЫ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПЛАЗМЕННОГО ПОРШНЯ***В. С. Юферев, М. Л. Гнедина, Н. Ю. Гнедин*

В плоской геометрии и квазистационарном приближении решена задача о движении плазменного поршня в рельсотронном ускорителе с учетом скин-эффекта. Считалось, что температура вдоль поршня является постоянной, а сам поршень движется как целое со скоростью, равной скорости ускоряемого тела. Показано, что отгеснение тока к тыльной стороне поршня, вызываемое скин-эффектом, приводит к возрастанию газодинамического давления в плазме и соответственно к уменьшению протяженности плазменного сгустка. Последнее оказывается весьма значительным, если масса плазмы превосходит массу поршня.

Введение

Обычно при движении плазменного поршня его размеры увеличиваются, что происходит прежде всего благодаря возрастанию массы поршня из-за эрозии материала стенок канала ускорителя. Считается, что увеличение размеров поршня является показателем недостаточной эффективности преобразования электромагнитной энергии ускорителя в кинетическую энергию движущегося тела и поэтому необходимо стремиться к компактированию ускоряемого сгустка плазмы. Однако надо иметь в виду, что изменение размеров поршня может происходить не только вследствие изменения его массы, но и в результате действия других факторов, например скин-эффекта. И если влияние эрозии изучалось достаточно интенсивно, то воздействие скин-эффекта на параметры поршня практически не исследовалось.

При больших скоростях движения ускоряемого тела магнитное поле в рельсах оказывается сосредоточенным в узкой области у поверхности электродов, главным образом на их внутренней стороне, обращенной к каналу ускорителя. Соответственно в поршне электрический ток будет отгесняться к тыльной стороне поршня. На первый взгляд кажется (и эта точка зрения достаточно широко распространена), что указанное отгеснение тока будет вызывать замедление движения задней части поршня и увеличение его длины. На самом деле, как будет показано в данной работе, влияние скин-эффекта может оказаться совершенно противоположным и приводить не к увеличению, а к уменьшению протяженности плазменного сгустка.

Скин-эффект в рельсах бесконечной длины в высокочастотном приближении рассматривался в работах [1,2]. Численное решение плоской задачи диффузии магнитного поля в сечении электрода ускорителя было дано в [3]. Совместное рассмотрение диффузии магнитного поля в рельсах и движущейся металлической перемычки между ними было проведено для плоской геометрии в [4] и для трехмерного случая в [5]. В [6] исследовалось распределение магнитного поля в рельсах при произвольно заданном распределении тока в плазменном поршне. Геометрия задачи при этом считалась плоской. И, наконец, в [7] была рассмотрена самосогласованная задача о распределении тока в рельсах и плазменном поршне бесконечной ширины с учетом существенного различия проводимости металлических электродов и плазмы. Однако в этой работе размер поршня не определялся, поскольку в одномерном уравнении импульсов пренебрегалось инерционными членами. Кроме того, в последней работе при выводе уравнения диффузии

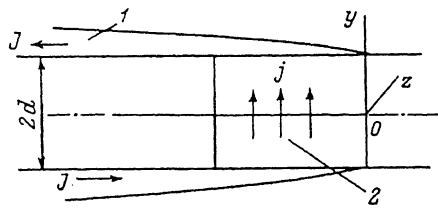


Рис. 1. Модель ускорителя.
1 — скин-слой в рельсах, 2 — плазменный поршень.

магнитного поля в поршне с учетом скин-эффекта в рельсах использовалось допущение о том, что плотность тока имеет лишь одну компоненту, которая в плазме направлена перпендикулярно электродам, а в электродах вдоль их поверхности. Как будет показано ниже, необходимости в этих допущениях на самом деле нет.

Постановка задачи

В настоящей работе, как и в работах [4, 6, 7, 9], задача рассматривалась в простейшей плоской геометрии, когда электроды являются бесконечно широкими. Свяжем систему координат с поршнем, а оси направим так, как показано на рис. 1. Поскольку задача считается плоской, то магнитная индукция будет иметь только одну компоненту B_z , а плотность тока j — две: x и y . Будем считать также, что эрозия стенок канала отсутствует и масса поршня остается постоянной в процессе движения.

Специфика рассматриваемой задачи состоит в следующем.

а) Проводимость рельсов σ_r существенно больше проводимости плазмы σ_p . Обычно

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_r} = \frac{D_r}{D_p} \sim 10^{-4} - 10^{-3}, \quad (1)$$

где $D_{r,p} = 1/(\sigma_{r,p}\mu_0)$ — коэффициент диффузии магнитного поля.

б) Магнитное число Рейнольдса в рельсах велико.

$$\text{Re}_m^r = \frac{ul}{D_r} \gg 1, \quad (2)$$

где l — длина поршня, а u — скорость движения тела.

Для меди $\text{Re}_m^r = 10^4 - 10^5$. Дополнительно к этому будем считать, что в отличие от рельсов магнитное число Рейнольдса в плазме является малым, т. е.

$$\text{Re}_m^p = \frac{vl}{D_p} < 1, \quad (3)$$

где v — скорость плазмы относительно ускоряемого тела.

С учетом (1) и (2) условие (3) будет выполняться, если $v \ll u$. Последнее может реализоваться, если движение поршня происходит в режиме, близком к квазистационарному, когда вся плазма движется как целое со скоростью, равной скорости ускоряемого тела.

С учетом вышесказанного уравнения движения магнитного поля будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} + u \frac{\partial B_r}{\partial x} = D_r \frac{\partial^2 B_r}{\partial y^2}, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial B_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_p \frac{\partial B_p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_p \frac{\partial B_p}{\partial y} \right]. \quad (4б)$$

В качестве краевых условий в поршне выбираются

$$\text{при } x=0 \quad B_p=0, \quad \text{при } x=l \quad B_p = B_{\max} = \mu_0 I, \quad (5a)$$

где I — плотность тока на единицу ширины рельса в электродах

$$\text{при } x=0 \quad B_r = 0,$$

$$\text{при } x \geq l, \quad y = \pm d \quad B_r = B_{\max},$$

$$\text{при } y \rightarrow \pm \infty \quad B_r = 0, \quad (5б)$$

а на границе между рельсом и плазмой выполняются условия непрерывности
а) нормальной составляющей тока

$$j_y^p = j_y^r \quad \text{или} \quad \frac{\partial B_p}{\partial x} = \frac{\partial B_r}{\partial x},$$

откуда

$$B_r = B_p, \quad (6a)$$

б) тангенциальной составляющей электрического поля $E_x^p = E_x^r$, откуда

$$\frac{1}{\sigma_p} \frac{\partial B_p}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_r} \frac{\partial B_r}{\partial y}. \quad (6б)$$

Полагаем далее, что поршень является длинным, т. е. $l \gg 2d$ ($2d$ — расстояние между рельсами). Тогда уравнение (4б) можно проинтегрировать по высоте канала. В результате с учетом (6б) получим

$$\frac{\partial B_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_p \frac{\partial B_p}{\partial x} \right] + \frac{1}{d} D_r \frac{\partial B_r}{\partial y} \Big|_{y=\pm d}, \quad (7)$$

$$\text{при } x=0 \quad B_p=0, \quad \text{при } x=l \quad B_p = B_{\max}.$$

Проводимость σ_r в данной задаче считалась постоянной. В то же время σ_p является функцией давления и температуры. Как указывается в работе [7] со ссылкой на работу [8], проводимость медной плазмы может быть аппроксимирована выражением

$$\sigma_p = C T^{1/4} p^{1/4}. \quad (8)$$

Там же (в [7]) отмечалось, что, как показывают расчеты, температура вдоль поршня меняется незначительно (в пределах 20—30 %). Поэтому, как и в работе [7], зависимость σ_p от температуры пренебрегалось и принималось, что

$$\sigma_p = C p^n, \quad (9)$$

где n зависит от состава плазмы.

К уравнению (4), (7) необходимо добавить уравнение импульсов и уравнение состояния. Первое в одномерном приближении имеет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] + \rho a, \quad (10a)$$

где $a = \partial u / \partial t$.

Второе уравнение, принимая во внимание допущение о постоянстве температуры, как и в работе [9], записывается следующим образом:

$$p = K\rho. \quad (10б)$$

Как уже указывалось выше, если не учитывать влияния скин-эффекта в рельсах, то уравнение (4а), (7), (10) имеют решение, описывающее режим равномерно ускоренного движения тела, когда плазменный поршень движется как целое со скоростью, равной скорости тела, а длина поршня остается неизменной. При учете диффузии магнитного поля в рельсах ситуация, вообще говоря, становится принципиально нестационарной, поскольку с увеличением скорости тела толщина скин-слоя в рельсах будет уменьшаться и соответственно будет увеличиваться член $D_r (\partial B_r / \partial y)$ в уравнении (7). Чтобы избежать возникающих при этом трудностей, в данной работе было принято допущение о квазистационарном движении поршня, когда ускорение не слишком велико и временной производной $\partial B_{r,p} / \partial t$ в уравнениях (4а), (7) можно пренебречь. Это допущение будет справедливо, если выполняются следующие неравенства в поршне:

$$\frac{l^2}{D_p T} \ll 1$$

и в рельсах:

$$\frac{\delta^2}{D_r T} = \frac{l}{uT} \ll 1, \quad (11)$$

где δ — толщина скин-слоя в рельсах, а T — характерный временной масштаб задачи, например время ускорения тела в канале ускорителя.

Сделанное допущение в свою очередь позволяет пренебречь в уравнении импульсов инерционными членами, кроме ускорения тела $a = \partial u / \partial t$, которое будем считать постоянным.

Решение

Перейдем к безразмерным переменным (знак \sim в дальнейшем опускаем)

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}; \quad \tilde{y} = \frac{y}{l} \sqrt{\frac{ul}{D_r}}; \quad \tilde{B}_p = \frac{B_p}{B_{\max}}; \quad \tilde{B}_r = \frac{B_r}{B_{\max}};$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{p|_{x=0}}; \quad D_p = \frac{D_p}{D_p^*}; \quad D_p^* = \frac{C_1}{\mu_0 p^n |_{x=0}}$$

и обозначим

$$\chi = \frac{al}{K}; \quad \beta = \frac{B_{\max}^2}{2\mu_0 p |_{x=0}} = \frac{B_{\max}^2}{2\mu_0 \rho m^a},$$

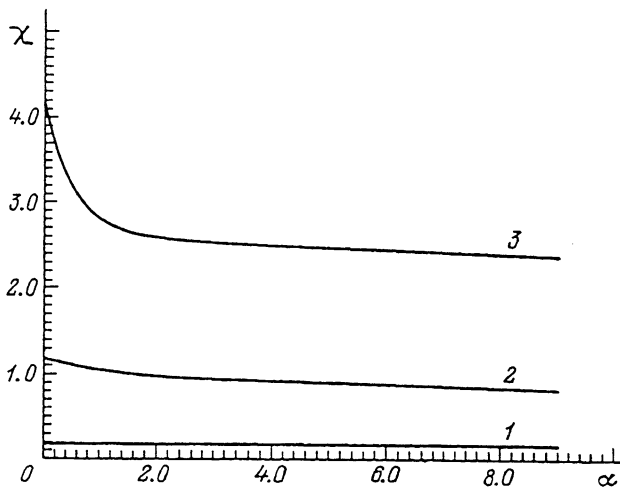


Рис. 2. Зависимость параметра χ от α .

β^{-1} : 1 — 0.9, 2 — 0.5, 3 — 0.1.

$$\alpha = \left(\frac{K}{a}\right)^{3/2} \frac{1}{d} \sqrt{\frac{u}{D_r}} \frac{D_r}{D_p^*}, \quad (12)$$

где ρ_m — масса ускоряемого тела на единицу его площади.

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial B_r}{\partial x} = \frac{\partial^2 B_r}{\partial y^2}, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^n} \frac{\partial B_p}{\partial x} \right) + \alpha \chi^{3/2} \frac{\partial B_r}{\partial y} \Big|_{y=\pm d} = 0, \quad (13б)$$

$$\chi p = \frac{\partial}{\partial x} (p + \beta B^2) \quad (13в)$$

с краевыми условиями

$$\text{при } x=0 \quad B_{r,p}=0, \quad p=1; \quad \text{при } x=1 \quad B_p = 1, \quad p = 0,$$

$$\text{при } x < 1, \quad y = \pm d \quad B_r = B_p; \quad \text{при } x \geq 1, \quad y = \pm d \quad B_r = 1,$$

$$\text{при } y \rightarrow \pm \infty \quad B_r = 0. \quad (14)$$

Из условий (14) видно, что имеются два условия на давление p . В то же время уравнение (13в) является уравнением первого порядка. Поэтому наличие дополнительного условия на p позволяет определить размер поршня.

Решение уравнения (13а) с учетом краевых условий (14) имеет вид

$$B_r = \int_0^x \frac{\partial B_p}{\partial x} \operatorname{erfc} \left(\frac{y-d}{2\sqrt{x-x'}} \right) dx'. \quad (15)$$

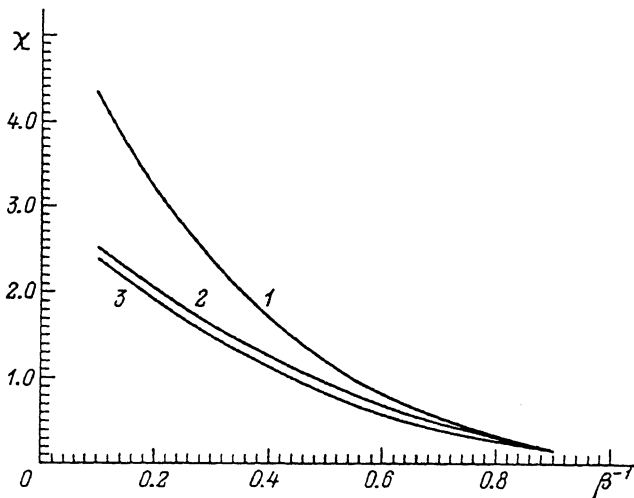


Рис.3. Зависимость параметра χ от β^{-1} .
 α : 1 — 0, 2 — 3, 3 — 5.

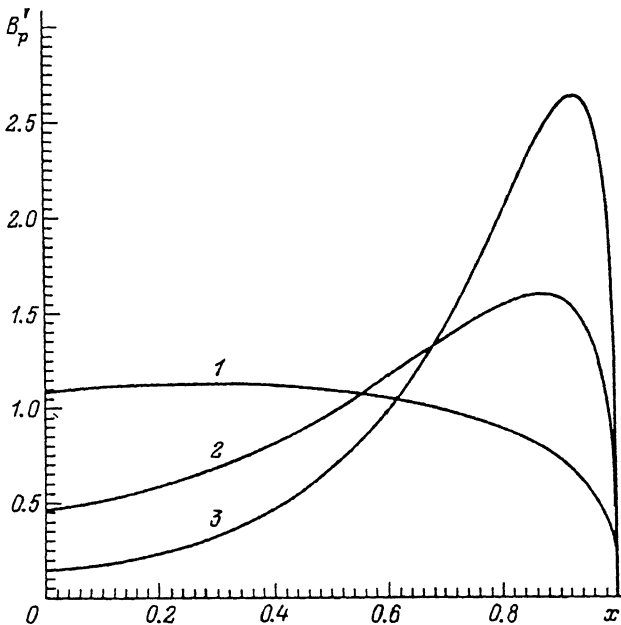


Рис.4. Распределение плотности тока при $\beta^{-1}=0.5$.
 α : 1 — 0, 2 — 3, 3 — 9.

Отсюда

$$\frac{\partial B_r}{\partial y} \Big|_{y=\pm d} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\partial B_p}{\partial x} \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13б), для определения магнитного поля в плазменном поршне получим следующее уравнение:

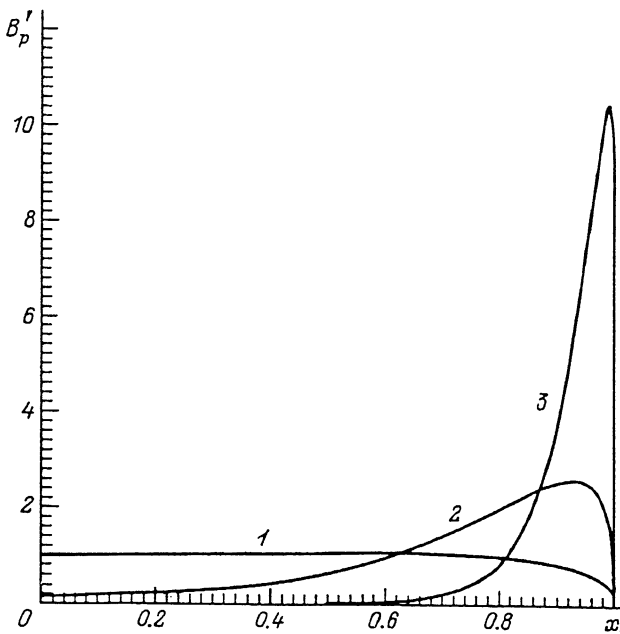


Рис.5. Распределение плотности тока при $\alpha = 9$.
1-3 — то же, что и на рис. 2.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{p^n} \frac{\partial B_p}{\partial x} \right) - \alpha \chi^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\partial B_p}{\partial x} \frac{dx}{\sqrt{x-x'}} = 0,$$

$$\text{при } x = 0 \quad B_p = 0; \quad \text{при } x = 1 \quad B_p = 1. \quad (17)$$

Следуя [9], проинтегрируем далее (13в) по x от 0 до 1. Получим

$$\chi \int_0^1 p \, dx = \beta - 1. \quad (18)$$

Из (12) следует, что

$$\chi \int_0^1 p \, dx = \frac{1}{\rho_m} \int_0^1 \rho \, dx = \frac{\rho_l}{\rho_m},$$

где ρ_l — масса плазмы на единицу площади канала.

Тогда, учитывая (12), будем иметь

$$\alpha = \frac{B_{\max}^2}{2 \mu_0 (\rho_m + \rho_l)}; \quad \beta = \frac{\rho_m + \rho_l}{\rho_m}. \quad (19)$$

С другой стороны, интегрирование (13в) позволяет найти зависимость $p(x)$

$$p(x) = e^{x\chi} \left[1 - \beta \left(B_p^2 e^{-x\chi} + \chi \int_0^x B_p^2 e^{-x\chi} dx \right) \right]. \quad (20)$$

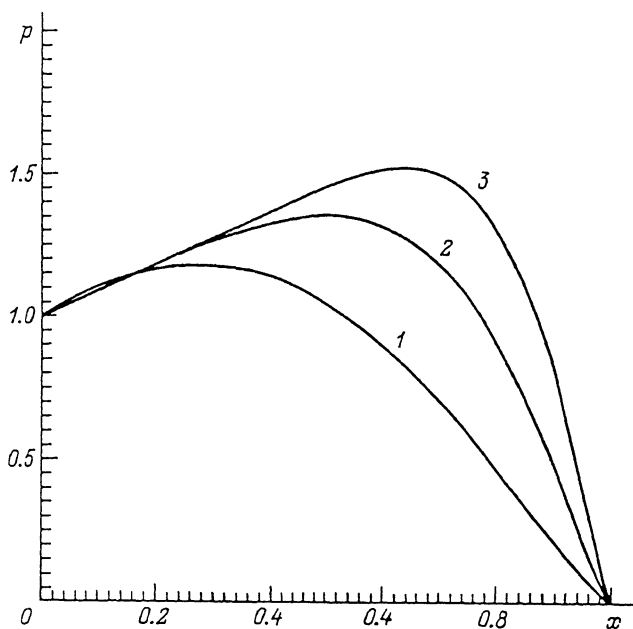


Рис.6. Распределение давления при $\beta^{-1}=0.5$.
1—3 — то же, что и на рис.4.

Полагая здесь $x=1$ и учитывая, что $p(1)=0$, получаем уравнение для определения параметра χ , а следовательно, и длины поршня l

$$\frac{1}{\beta} = e^{-\chi} + \chi \int_0^1 e^{-\chi x} B_p^2(x) dx. \quad (21)$$

Таким образом, окончательно задача свелась к решению трех уравнений (17), (20), (21) относительно переменных B_p , p , x .

Уравнения (17), (20), (21) были проинтегрированы численно. Исследовалась зависимость безразмерной плотности тока $B'(x)$, давления $p(x)$ и параметра χ от параметров α и β . Параметр α определяет влияние скорости тел, а параметр β — соотношение масс тела и плазмы. Таким образом, зависимость $\chi(\alpha)$ даст нам изменение размеров поршня по мере его движения в канале ускорителя.

Оценки показывают, что характерные значения параметров задачи равны $K \approx 2 \cdot 10^6 - 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $\rho_m \approx 10 \text{ Кг}/\text{м}^2$, $\rho_l \approx 3 - 20 \text{ Кг}/\text{м}^2$, $\mu_0 = 126 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}/\text{м}$, $a = 10^6 - 10^7 \text{ м}^2/\text{с}$, $d = 0.05 \text{ м}$, $D_r = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_r/D_p^* = 10^{-4} - 10^{-3}$, $u = 1 - 6 \cdot 10^3 \text{ м}/\text{с}$. Отсюда $\alpha \approx 0.5 - 10$.

Результаты расчетов

Расчеты были выполнены для следующих значений параметров: $\alpha = 1; 3; 9; 1/\beta = 0.1; 0.5; 0.9$. Результаты расчетов представлены на рисунках 2—6. На рис. 2, 3 показана зависимость χ от α и β^{-1} , на рис. 4, 5 — распределение безразмерной плотности тока по длине поршня в зависимости от параметров α и β^{-1} , а на рис. 6 — распределение давления в поршне. Из анализа рисунков можно сделать следующие выводы.

1. Влияние скин-эффекта приводит не к увеличению, а к уменьшению размеров поршня, тем большому, чем больше скорость u , вследствие роста давления в плазме.

2. При малых значениях β^{-1} , т.е. при малой массе плазменного поршня по сравнению с массой ускоряемого тела, влияние скин-эффекта незначительно и размер поршня меняется очень слабо при увеличении α .

3. Влияние скин-эффекта существенно в случае, когда масса плазмы превосходит массу поршня ($\beta > 0.5$). При этом основное уменьшение χ происходит в диапазоне изменения α от 0 до 3, а при дальнейшем росте α длина поршня меняется незначительно. Это объясняется тем, что с увеличением отснесения тока к тыльной стороне поршня, где $\chi = 1$, интеграл в (21) стремится к нулю, а χ стремится к пределу, равному $\ln\beta$. В то же время, как показано в [9], без учета скин-эффекта при $\beta \rightarrow \infty$ параметр χ ведет себя, как $(2\beta)^{1/2}$.

4. Из пункта 3 следует, что скин-эффект может оказывать существенное влияние на абсолютный размер плазменного поршня (а не только на изменение этого размера), что необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных.

5. Из пункта 3 следует также, что поскольку длина поршня при $\alpha > 3$ меняется незначительно, то пренебрежение инерциальными членами в уравнении импульсов (10а) в этом случае будет оправдано без ограничения условиями (11).

Список литературы

- [1] Kerrisk J. F., Vox P. O. // IEEE Trans. Magn. 1984. Vol. 20. N 2. P. 399—402.
- [2] Leuer J. A. // IEEE Trans. Magn. 1986. Vol. 22. N 6. P. 1584—1590.
- [3] Бодров А. Ю. // Препринт ИВТАН СССР. № 6—187. М., 1980. 23 с.
- [4] Long G. C. // IEEE Trans. Magn. 1986. Vol. MAG-22. N 6. P. 1597—1602.
- [5] Подольцев А. Д., Кучерявая И. И. // Препринт ИЭД УССР. № 487. Киев, 1987. 30 с.
- [6] Kharing J. S., Huerta M. A. // IEEE Trans. Magn. 1989. Vol. 25. N 1. P. 381—386.
- [7] Uglum J. R. // IEEE Trans. Magn. 1989. Vol. 25. N 1. P. 563—567.
- [8] Kovitya P. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. N 6. P. 13.
- [9] Powell J. D. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34. N 4. P. 3262—3269.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе РАН
С.-Петербург

Поступило в Редакцию
10 января 1991 г.