

01

© 1991 г.

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Д. М. Ваврик, В. Б. Рябов, И. Ю. Чернышов

Изучено взаимодействие внешнего сигнала с колебанием накачки в параметрически возбуждаемых осцилляторах. Установлено, что в таких осцилляторах может развиваться стохастическая неустойчивость уже в квазилинейном режиме возбуждения. В рамках метода Мельникова определены условия возбуждения стохастических колебаний. Изучены сценарии возникновения странных аттракторов и закономерности их эволюции. Проведены экспериментальные исследования устойчивости одноконтурных параметрических генераторов, показавшие полное соответствие экспериментальных и теоретических результатов.

## Постановка задачи

Явления параметрической генерации и преобразования колебаний определяют специфику динамики разнообразных физических систем. Общие закономерности, характеризующие эти явления, удается адекватно описать и изучить в рамках нескольких универсальных математических моделей [1-3]. В случае одномодовых или одноконтурных колебательных систем, которые рассматриваются в данной работе, широко применяется следующее уравнение параметрически возбуждаемого осциллятора:

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(1 + M \cos pt)x + 2\alpha_0 \frac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \gamma x^3 = A \right| \cos \omega_0 t, \quad (1)$$

где  $x$  — обобщенная координата осциллятора;  $\omega_0$  — его собственная частота;  $M$  — глубина модуляции собственной частоты;  $p$  — частота модуляции;  $\alpha_0$  — параметр линейной диссипации;  $\alpha$ ,  $\gamma$  — параметры нелинейности;  $A$  — амплитуда усиливаемого или преобразуемого внешнего колебания (сигнальной волны) с частотой  $\omega_c \approx \omega_0$ .

Особенностью нелинейных колебательных систем является то, что параметрические эффекты проявляются не только при периодическом изменении их параметров, но и при аддитивном воздействии на осциллятор колебания накачки и сигнальной волны [1]. В этом случае вместо (1) приходим к следующему уравнению:

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\alpha_0 \frac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \gamma x^3 = B \cos pt + A \cos \omega_0 t, \quad (2) \right.$$

где  $B$  — амплитуда накачки.

Системы, описываемые уравнениями типа (1) и (2), обычно называют параметрическими генераторами (преобразователями) первого и второго родов соответственно. Такие системы являлись одними из основных объектов исследования в классической теории колебаний [1-3], где для анализа их колебательных режимов широко использовались асимптотические методы усреднения. Их применение основывалось на предположении о квазилинейности режимов возбуждения осциллятора, что в общем достаточно хорошо выполняется для значительного числа физических ситуаций.

После начала исследований в области динамического хаоса уравнения типа (1), (2) опять стали предметом интенсивных исследований (см., например, [4-6]). Однако хаотические колебания и сценарии их возникновения в основном изучались для другого предельного случая, когда режим возбуждения колебаний являлся существенно нелинейным и для его описания невозможно применение предположения о квазилинейности осциллятора. В данной работе мы возвращаемся к изучению динамики параметрически возбуждаемого слабо-нелинейного осциллятора. Нами показано, что взаимодействие колебания накачки с внешним сигналом может привести к развитию стохастической неустойчивости при существенном снижении порога возникновения хаоса по параметру нелинейности системы. Тем самым установлено, что режимы параметрической генерации и преобразования колебаний при некоторых типичных для практики условиях являются неустойчивыми по отношению к относительно небольшим возмущениям. Учет этого эффекта представляется важным для целого ряда задач теории колебаний, что и потребовало его детального анализа.

### Основные уравнения

Квазилинейному режиму возбуждения осциллятора (1) соответствуют малые значения параметров  $M$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $A$ , что позволяет перейти известным образом от (1) к укороченным уравнениям. Будем рассматривать случай основного параметрического резонанса, когда  $p \equiv 2\omega$  и  $\omega \simeq \omega_0$ . Тогда, используя замену переменных  $x = u \cos \omega t + v \sin \omega t$ ,  $dx/dt = -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t$ , переходим стандартным способом к укороченным уравнениям относительно медленно меняющихся функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  ( $du/dt \ll \omega_0 u$ ,  $dv/dt \ll \omega_0 v$ ) [1]

$$\frac{du}{dt} = -\alpha_0 u - [\Delta - m + \beta(u^2 + v^2)]v - P \sin \Omega t,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha_0 v + [\Delta + m + \beta(u^2 + v^2)]u + P \cos \Omega t, \quad (3)$$

где  $\Delta = \omega - \omega_0$ ,  $\Omega = \omega - \omega_c$ ,  $m = M/(4\omega)$ ,  $\beta = (3\lambda)/(8\omega)$ ,  $P = A/(2\omega)$ .

Без ограничения общности дальнейшего анализа примем, что  $\beta > 0$ ,  $m > 0$ . Интересно, что с помощью последовательной замены переменных [1]

$$x = y - \frac{B}{3\omega_0^2} \cos 2\omega t,$$

$$y = u \cos \omega t + v \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t$$

к этой же системе (3) сводится и уравнение движения осциллятора (2) с другим способом его накачки. В последнем случае параметры  $m$  и  $\Delta$  связаны с коэффициентами уравнения (2) следующими соотношениями:

$$m = \frac{\alpha B}{6\omega_0^2}, \quad \Delta = \omega - \omega_0 + \frac{\gamma B^2}{12\omega_0^3}.$$

Уравнения типа (3) описывают параметрическое возбуждение не только осцилляторов различной физической природы, но и пространственную эволюцию параметрически взаимодействующих волн, например, при анализе параметрических генераторов или усилителей света [2].

При отсутствии внешнего сигнала ( $P=0$ ) в системе (3) при  $t \rightarrow \infty$  реализуются стационарные состояния только с постоянными во времени значениями  $u$  и  $v$ . Соответствующие стационарные величины амплитуды колебаний  $A \equiv \sqrt{u^2 + v^2}$  определяются выражениями [1]

$$A_1 = 0, \quad A_{2,3} = \sqrt{(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \alpha_0^2})/\beta}. \quad (4)$$

При  $m > \alpha_0$  в интервале расстройек  $\Delta$ , удовлетворяющих условию

$$|\Delta| < \sqrt{m^2 - \alpha_0^2}, \quad (5)$$

состояния с амплитудой  $A=A_2$ , являются устойчивыми, а с  $A=0$  — неустойчивыми (седловыми); состояния с  $A=A_3$  не реализуются. При

$$\Delta < -\sqrt{m^2 - \alpha_0^2} \quad (6)$$

состояния с амплитудами  $A=0$  и  $A=A_2$  устойчивы, а с амплитудой  $A=A_3$  — седловые. Для каждого стационарного значения амплитуды колебаний существует два различных стационарных состояния осциллятора с различными фазами колебаний, отличающимися на  $\pi$ .

При  $P \neq 0$  динамика системы (3) оказалась значительно более разнообразной. Здесь притягивающими множествами при  $t \rightarrow \infty$  могут быть как регулярные (периодические орбиты), так и странные аттракторы. Дальнейший анализ проведем для случая малых расстройк  $|\Delta|$ , удовлетворяющих условию (5), т. е. когда частота накачки близка к значению, при котором точно выполняется условие параметрического резонанса  $\Delta=0$ .

Отметим также, что число независимых параметров системы (3) может быть уменьшено на два с помощью следующей замены переменных:  $u \rightarrow u/\sqrt{\beta}$ ,  $v \rightarrow v/\sqrt{\beta}$ ,  $t \rightarrow t\alpha_0$  с последующим переходом к безразмерным параметрам  $\Delta \rightarrow \Delta/\alpha_0$ ,  $m \rightarrow m/\alpha_0$ ,  $P \rightarrow P\sqrt{\beta}/\alpha_0$ ,  $\alpha_0=1$ ;  $\beta=1$ . В силу этого при проведении конкретных численных расчетов мы полагали  $\alpha_0=1$  и  $\beta=1$ , а при их сравнении с результатами натуральных экспериментов учитывалась указанная выше нормировка.

Для определения областей управляющих параметров, в которых возможна стохастизация колебаний, к системе (3) нами применен метод Мельникова [7], позволяющий найти условия образования гомоклинической структуры в фазовом пространстве системы, что является необходимым (но не достаточным) условием возникновения хаоса.

### Критерий Мельникова

Для применения метода Мельникова к системе (3) воспользуемся тем, что она при  $\alpha_0=0$ ,  $P=0$  является гамильтоновой

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -[\Delta - m + \beta(u^2 + v^2)]v, \\ \frac{dv}{dt} &= [\Delta + m + \beta(u^2 + v^2)]u \end{aligned} \quad (7)$$

со следующим гамильтонианом

$$H(u, v) = -\frac{\beta}{4}(u^2 + v^2)^2 - \frac{1}{2}[(\Delta - m)v^2 + (\Delta + m)u^2]. \quad (8)$$

В фазовом пространстве этой системы уравнений при выполнении условия  $|\Delta| < m$  существует двойная замкнутая гомоклиническая петля (сепаратриса), входящая и выходящая в седловую особую точку  $S$  с координатами  $u=0, v=0$ . Фазовый портрет системы (4) для этого случая приведен на рис. 1. В точках  $O_1$  и  $O_2$  с координатами  $(u, v) = (0, \pm\sqrt{\delta_1})$ , где  $\delta_1 = (m - \Delta)/\beta$ , расположены особые точки системы типа центр. В соответствии с методом Мельникова найдем величину  $\Delta_1(t_0)$ , определяющую расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями в сечении Пуанкаре (3), рассматривая систему (7) как невозмущенную, а диссипацию  $\alpha_0$  и внешнее воздействие ( $P \neq 0$ ) как возмущение. Тогда величина  $\Delta_1(t_0)$  определяется следующим общим выражением [7, 8]:

$$\Delta_1(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (R_1 Q_0 - R_0 Q_1) dt, \quad (9)$$

$$R_0 = -[\Delta - m + \beta(u_i^2 + v_i^2)]v_i, \quad R_1 = -\alpha_0 u_i + P \sin \Omega t, \\ Q_0 = [\Delta + m + \beta(u_i^2 + v_i^2)]u_i, \quad Q_1 = -\alpha_0 v_i + P \cos \Omega t,$$

где  $u = u_i(t, t_0)$ ,  $v = v_i(t, t_0)$  — уравнение траектории осциллятора на гомоклинической петле,  $t_0$  — начальное значение времени.

Определим теперь решение системы (7) на сепаратрисе, учитывая, что ей соответствует следующее значение гамильтониана:  $H(u_i, v_i) = 0$ . Тогда из (8) непосредственно следует

$$u_i^2 = \delta_2 - v_i^2 + \sqrt{\delta_2^2 - 2(\delta_2 - \delta_1)v_i^2}, \quad (10)$$

где  $\delta_{1,2} = (\pm m - \Delta)/\beta$ .

При дальнейших преобразованиях необходимо учитывать для рассматриваемого случая, что  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ .

Из уравнения (10) и системы (7) следует уравнение для определения закона движения на сепаратрисе

$$\frac{dv}{dt} = \pm \beta \sqrt{\delta_2^2 + 2(\delta_1 - \delta_2)v^2} \sqrt{\delta_2 - v^2 + \sqrt{\delta_2^2 + 2v^2(\delta_1 - \delta_2)}}. \quad (11)$$

Его решение находится аналитически с помощью следующей замены переменных:

$$y = \delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 2(\delta_1 - \delta_2)v^2}. \quad (12)$$

После ряда преобразований находим явную зависимость  $y(\tau)$

$$y(\tau) = \frac{-4\delta_1\delta_2}{(\delta_1 - \delta_2) \operatorname{ch} \tau - \delta_1 - \delta_2}, \quad (13)$$

где  $\tau = 2\beta \sqrt{-\delta_1\delta_2} (t - t_0)$ .

В результате из (10)–(13) определяем искомое решение уравнения движения на сепаратрисе

$$v_i^2(\tau) = \frac{4\delta_1\delta_2^3(1 + \operatorname{ch} \tau)}{[(\delta_1 - \delta_2) \operatorname{ch} \tau - \delta_1 - \delta_2]^2}, \\ u_i^2(\tau) = \frac{4\delta_1^2\delta_2(1 - \operatorname{ch} \tau)}{[(\delta_1 - \delta_2) \operatorname{ch} \tau - \delta_1 - \delta_2]^2}. \quad (14)$$

После подстановки (14) в (9) и вычисления интегралов получаем следующее выражение для величины Мельникова:

$$\Delta_1(\tau_0) = -\frac{2\alpha_0}{\beta} \left( \sqrt{m^2 - \Delta^2} - \Delta \arccos \frac{\Delta}{m} \right) + \\ + \frac{\pi P \Omega \cos \Omega \tau_0}{\sqrt{\beta m} \operatorname{ch} \frac{\pi \Omega}{2\sqrt{m^2 - \Delta^2}}} e^{\frac{\beta \arccos \frac{\Delta}{m}}{2\sqrt{m^2 - \Delta^2}}}, \quad (15)$$

где  $\tau_0 = 2\beta \sqrt{-\delta_1\delta_2} t_0$ .

Отсюда легко получить связь между параметрами задачи, при которой функция  $\Delta_1(\tau_0)$  становится знакопеременной, и тем самым определить условие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неустойчивой периодической орбиты, которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{P \sqrt{\beta}}{\alpha_0} \geq \left| \frac{2\sqrt{m} \left( \sqrt{m^2 - \Delta^2} - \Delta \arccos \frac{\Delta}{m} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi \Omega}{2\sqrt{m^2 - \Delta^2}}}{\Omega \exp \left( \frac{\Omega \arccos \frac{\Delta}{m}}{2\sqrt{m^2 - \Delta^2}} \right)} \right|. \quad (16)$$

Полученная формула является конечным результатом применения метода Мельникова к системе (3). Она позволяет достаточно хорошо предсказать области управляющих параметров, в которых происходит образование странного аттрактора. Прежде чем приступить к анализу условий возникновения таких аттракторов, сформулируем области применения условия (16). Во-первых, оно было получено в предположении наличия седловой особой точки с координатами  $u \simeq 0$ ,  $v \simeq 0$  в сечении Пуанкаре системы. Условие ее существования с учетом влияния диссипации определяется соотношением (5) совместно с требованием возникновения параметрической генерации  $m > \alpha_0$ . Во-вторых, применение метода Мельникова предполагает близость рассматриваемой системы (3) к ее гамильтонову пределу (7). Для этого необходимо, чтобы ве-

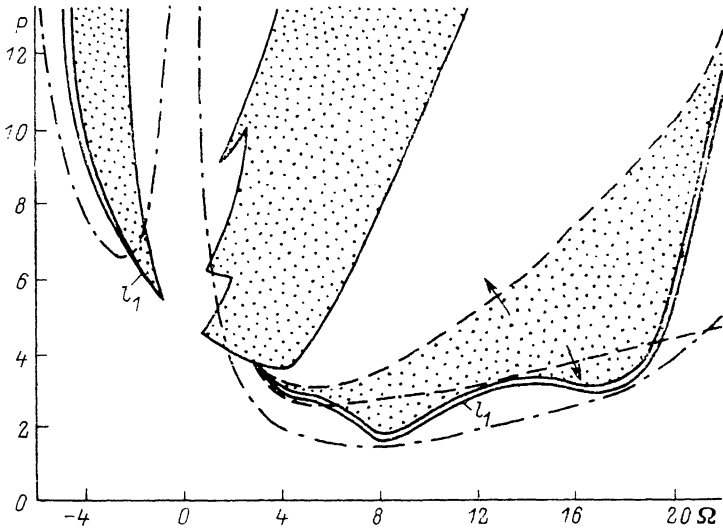


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров  $P$ ,  $\Omega$  для  $m=5$ ,  $\Delta=-0.5$ ,  $\alpha_0=1$ ,  $\beta=1$ .

Точки — области хаоса, штриховые кривые — границы гистерезиса;  $L_1$  — линии первой бифуркации удвоения периода; штрихпунктир — границы области хаоса, найденные из критерия Мельникова.

лична диссипации  $\alpha_0$  была гораздо меньше характерной собственной частоты динамической системы (5), которая приблизительно равняется  $\sqrt{m^2 - \Delta^2}$ . В целом, как следует из проведенных численных экспериментов, эти дополнительные условия не накладывают слишком жестких ограничений на применение условия (16).

Рассмотрим пример конкретных расчетов. На рис. 2 на плоскости параметров  $P$ ,  $\Omega$  отмечены области существования странных аттракторов, найденные путем непосредственного численного анализа решений системы (3). Штрихпунктиром на рисунке приведена зависимость от  $\Omega$  порогового значения амплитуды колебаний  $P_{\text{пор}}$ , начиная с которого в соответствии с критерием (16) может развиваться стохастическая неустойчивость. Отметим удовлетворительное совпадение найденных численно и аналитически пороговых значений амплитуды  $P_{\text{пор}}$  практически во всей области изменения  $\Omega$ . Следует указать, что при относительно небольших превышениях  $m$  над  $\alpha_0$ , как и следует из анализа условий применимости метода Мельникова, формула (16) лишь приблизительно описывает условия возникновения хаоса.

Отметим, что в работе [8] указывалось на значительные трудности применения метода Мельникова к системам укороченных уравнений, возникающие из-за появления быстро осциллирующих членов в возмущении. В рассмотренном нами случае в силу резонансного характера воздействия на систему указанные проблемы не имеют места, поскольку характерная частота возмущения  $\Omega$  порядка параметра малости исходной задачи.

Проследим общие связи между параметрами осциллятора и внешнего воздействия, при которых возможно развитие стохастической неустойчивости. Для этого обратимся к соотношению (16). Его правая часть не зависит от амплитуды внешнего сигнала  $P$ , параметра диссипации  $\alpha_0$  и неизохронности  $\beta$ , поэтому уменьшение  $\alpha_0$  и увеличение  $\sqrt{\beta}$  приводят к пропорциональному уменьшению порога возникновения хаоса по амплитуде  $P$ . Влияние параметров  $\Delta$ ,  $m$  и  $\Omega$  на величину  $P_{\text{пор}}$  определяется правой частью неравенства (16). Типичную зависимость  $P_{\text{пор}}$  от расстройки частот  $\Omega \equiv \omega - \omega_c$  иллюстрирует рис. 2. Здесь необходимо отметить следующие особенности. Всегда существуют

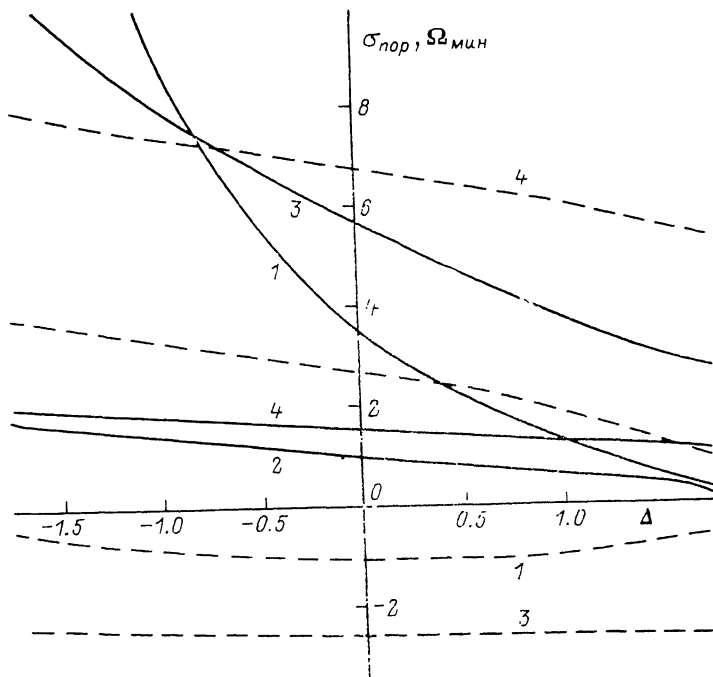


Рис. 3. Зависимость двух минимальных по  $\Omega$  значений  $\sigma_{\text{пор}}$  от  $\Delta$  (сплошные кривые) при  $\Omega < 0$  (1, 3) и  $\Omega > 0$  (2, 4) для  $m=2$  (1, 2) и 5 (3, 4).

Соответствующие штриховые кривые — значения  $\Omega$ , при которых достигаются минимальные значения  $\sigma_{\text{пор}}$ .

два минимума зависимости  $P_{\text{пор}}(\Omega)$  — минимумы в области отрицательных и положительных значений  $\Omega$ . Наименьшие значения  $P_{\text{пор}}$  достигаются при  $|\Omega| > 0$ . Для таких расстроек ширина области хаотических колебаний по параметру  $\Omega$  при  $P > P_{\text{пор}}$  значительно больше по сравнению с областью хаоса, где  $\Omega < 0$ .

На рис. 3 приведены зависимости двух минимальных по  $\Omega$  (при  $\Omega < 0$  и  $\Omega > 0$ ) значений  $\sigma_{\text{пор}} \equiv ((p\sqrt{\beta})/\alpha_0)_{\text{пор}}$ , определяемых формулой (16), и соответствующих значений  $\Omega_{\text{мин}}$  от параметра  $\Delta \equiv \omega - \omega_0$  для различных значений накачки  $m$ . Характерным является то, что с увеличением  $\Delta$  в интервале значений, определяемом (5), величина  $\sigma_{\text{пор}}$  монотонно убывает. Уменьшение  $m$  при  $\Delta > 0$  также приводит к снижению порога возникновения хаоса. Обращаясь теперь к формуле (4), следует указать, что изменение амплитуды стационарных состояний  $A$  при вариации  $\Delta$  и  $m$  происходит по аналогичному закону. Поэтому здесь можно говорить о более общей закономерности, заключающейся в том, что с уменьшением амплитуды колебаний автономного генератора уменьшается порог по амплитуде внешнего воздействия, при которой возможно развитие стохастической неустойчивости.

Из критерия Мельникова (рис. 3), а также из численных расчетов следует, что величина  $P_{\text{пор}}$  может снижаться до весьма малых значений, удовлетворяющих условию  $P_{\text{пор}} \ll 1$ . Отметим, что в этом случае при отсутствии накачки ( $m=0$ ) реакция осциллятора на внешнее воздействие ( $P \neq 0$ ) является практически линейной. Отметим наблюдаемое здесь существенное различие в условиях возбуждения хаоса по сравнению с рассматривавшейся ранее задачей [9, 10] о возбуждении осциллятора квазипериодическим колебанием с двумя независимыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , удовлетворяющими условию  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_0$ . При таком воздействии на осциллятор переход к хаосу также возможен в квазилинейном пределе, однако амплитуды каждой из спектральных составляющих  $P_i$  ( $i=1, 2$ ) должны удовлетворять условию  $P_i \geq 1$ . Таким образом, параметриче-

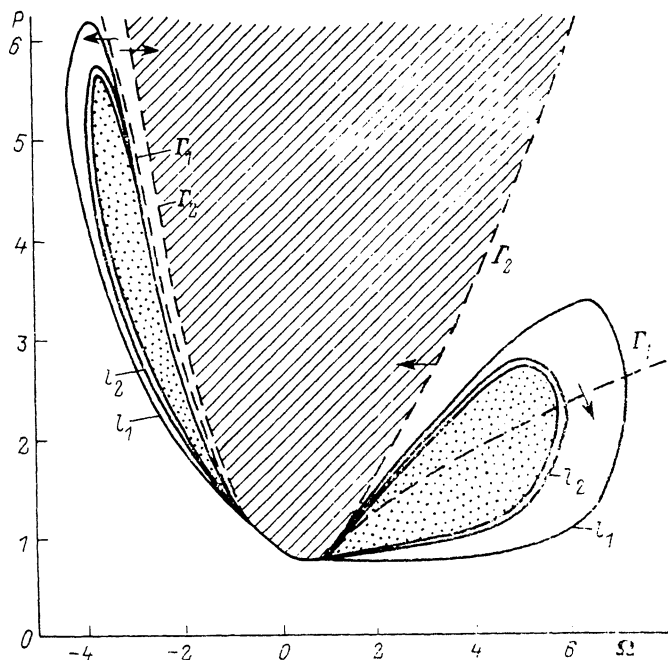


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма режимов для  $m=2$ ,  $\Delta=0$ ,  $\alpha_0=1$ ,  $\beta=1$ .

ски возбуждаемый осциллятор является более чувствительным по отношению к резонансному возмущению с частотой  $\omega_c \simeq \omega_0$  и в реальных физических ситуациях для него существует большая вероятность возникновения стохастической неустойчивости.

Критерий Мельникова (17) определяет нижний по параметру  $P$  порог возникновения хаоса. Для определения верхней границы проводились численные расчеты, которые показали, что стохастические колебания существуют всегда в ограниченном диапазоне изменения амплитуды  $P$ . Наиболее существенное влияние на размеры области хаоса на плоскости управляющих параметров  $P$ ,  $\Omega$  оказывает величина параметра накачки  $m$ , уменьшение которой приводит к убыванию размеров областей существования стохастических колебаний. Эта зависимость наглядно прослеживается из сравнения бифуркационной диаграммы режимов для  $m=5$  (рис. 3) с результатами расчета для  $m=2$ , приведенными на рис. 4, где сохранены обозначения предыдущего рисунка.

Используя бифуркационную диаграмму, представленную на рис. 4, проследим основные закономерности возникновения стохастических колебаний. Здесь дополнительно к рис. 2 штриховкой выделена также область параметров, где под воздействием внешнего сигнала происходит подавление параметрической генерации (область гашения). Области хаоса всегда примыкают к области гашения, а нижний порог возникновения стохастических колебаний практически совпадает с минимальным значением  $P_{\text{мин}}$ , при котором происходит подавление параметрической генерации. При  $P < P_{\text{мин}}$  в системе (3) существуют

периодические колебания на разностной частоте  $\Omega \equiv P/2 - \omega_c$ . При этом, как и в случае автономного параметрического генератора ( $P=0$ ), в фазовом пространстве могут одновременно существовать два регулярных аттрактора, движение на которых отличается только сдвигом фазы на  $\pi$ . При  $P \neq 0$  такими аттракторами являются периодические орбиты, переходящие одна в другую при замене  $u \rightarrow -u$ ,  $v \rightarrow -v$ . Фазовые портреты этой пары аттракторов приведены на рис. 5, а. При движении к области хаоса со стороны больших значений  $|\Omega|$  и малых амплитуд  $P$  каждый из аттракторов может превращаться в хаотический в результате последовательности бифуркаций удвоения периода. На рис. 4 обозначены две первые линии бифуркации  $l_1$  и  $l_2$ . Из результатов применения метода Мельникова следует, что в силу идентичности петель сепаратрисы аттракторы превращаются в хаотические одновременно, что подтвер-

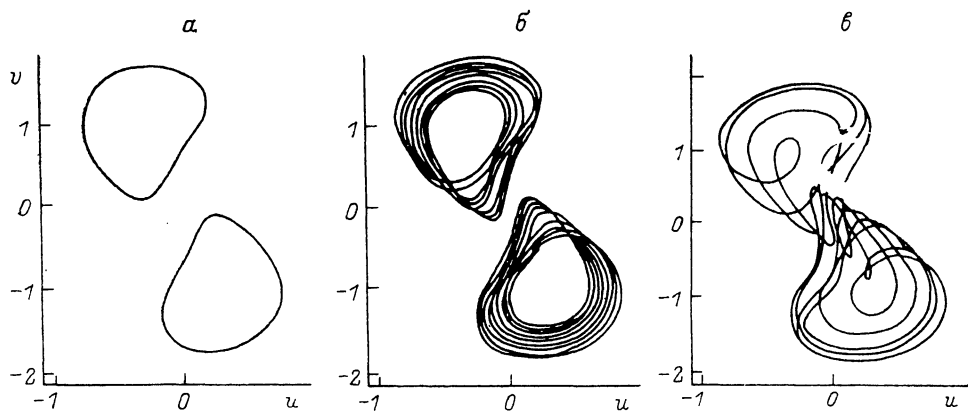


Рис. 5. Эволюция пары аттракторов при переходе от регулярных колебаний к хаосу.

$P$ : а — 0.7, б — 0.77, в — 0.86;  $\Omega$ : а — в — 2.0.

ждается и численными расчетами. В результате в фазовом пространстве образуется пара странных аттракторов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 5, б. При дальнейшем движении в область хаоса наблюдается следующая бифуркация, связанная с возникновением через перемежаемость между этими аттракторами единого странного аттрактора<sup>2</sup> (рис. 5, в). Следует отметить, что типичным является и несколько другой сценарий перехода к хаосу. В фазовом пространстве могут сливаться бассейны притяжения, принадлежащие двум указанным аттракторам. В результате этого возникает единый странный аттрактор через перемежаемость между двумя исходными регулярными аттракторами или после одной или нескольких бифуркаций удвоения. В целом в этой области параметров в сценариях перехода к хаосу четко прослеживается конкуренция между перемежаемостью и сходящейся последовательностью бифуркаций удвоения периода.

При переходе в область хаоса со стороны малых значений  $|\Omega|$  (из области гашения) наблюдаются другие характерные особенности в динамике осциллятора. В области гашения решениями системы (3) являются также периодические функции времени. Это обусловлено тем, что, хотя параметрическая генерация на частоте  $\omega$  подавлена, в полосу пропускания осциллятора попадают и смешиваются спектральные составляющие на частотах  $\omega_c$  и  $2\omega - \omega_c$  [1, 3]. Укороченные уравнения (3) описывают изменение амплитуды и фазы биений на их разностной частоте  $2(\omega - \omega_c)$ . При этом в фазовом пространстве существует единый, симметричный относительно поворота на  $\pi$  регулярный аттрактор.

<sup>1</sup> Отметим, что при малых  $|\Omega|$  расстояние между бифуркационными линиями очень мало по сравнению со случаем больших  $|\Omega|$  и здесь в силу влияния шумов бифуркационные линии могут сливаться, а сам переход к хаосу проявляется как перемежаемость, индуцированная шумами [11].

<sup>2</sup> Подобные закономерности перехода в режим хаотических колебаний наблюдались и при исследовании уравнения Дуффинга [12].



Вблизи границы области гашения в системе возникает гистерезис, границы которого отмечены штриховыми линиями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . В этой области бифуркационную диаграмму удобно рассматривать как два наложенных один на другой листа. Один из листов продолжает область гашения, которая заканчивается на границе гистерезиса  $\Gamma_1$  (в области гистерезиса штриховка, отмечающая режим гашения, на рисунке не приведена). На другом листе при  $\Omega > 0$  располагается область хаоса и наблюдаемые здесь бифуркации приведены на рис. 4. Возникновение отмеченного гистерезиса непосредственно связано с проявлением нелинейного резонанса осциллятора. Известно, что даже при отсутствии накачки ( $m=0$ ) и гармоническом воздействии на осциллятор с амплитудой

$$P > \frac{2\alpha_0}{3} \sqrt{\frac{2\alpha_0 \sqrt{3}}{\beta}}$$

возможно существование двух устойчивых состояний с различными амплитудами. При  $m \neq 0$  в окрестности каждого из двух состояний возникают регуляр-

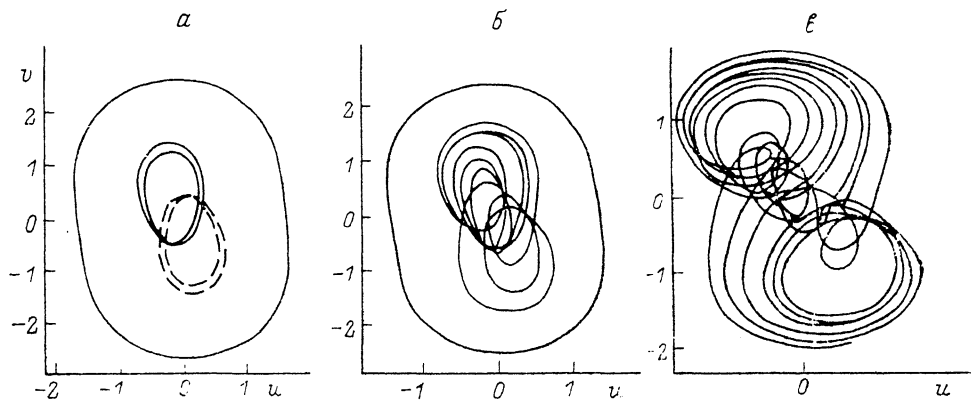


Рис. 6. Аттракторы системы (3).

*a* — три регулярных ( $P=2.6$ ,  $\Omega=4.1$ ); *b* — регулярный и хаотический ( $P=2.01$ ,  $\Omega=3.5$ ); *c* — один хаотический ( $P=1.5$ ,  $\Omega=4.0$ ).

ные или хаотические аттракторы, которые сосуществуют в конечном диапазоне изменения параметров, что и образует два указанных листа бифуркационной диаграммы.

Проследим эволюцию аттракторов, одновременно существующих в системе, при движении от линии  $\Gamma_2$  к  $\Gamma_1$ . Вблизи границы  $\Gamma_2$  на каждом листе возбуждаются регулярные аттракторы, типичный вид которых приведен на рис. 6, *a*. Аттрактор с большой амплитудой колебаний соответствует листу, на котором реализуется гашение колебаний, а на другом существует пара удвоенных периодических орбит (одна из них выделена штриховой кривой). При движении в область хаоса эта пара регулярных аттракторов испытывает описанные выше превращения, например бифуркацию удвоения, сосуществование двух странных аттракторов и переход через перемежаемость к одному аттрактору (рис. 6, *b*). Видно, что при этом регулярный аттрактор на другом листе практически не испытывает изменений. При пересечении линии  $\Gamma_1$  он жестко исчезает и в фазовом пространстве существует только один странный аттрактор (рис. 6, *c*).

### Результаты экспериментальных исследований

В качестве конкретных физических моделей параметрически возбуждаемых осцилляторов нами исследовались радиотехнические параметрические генераторы первого и второго родов, схемы которых приведены на рис. 7 [1, 3]. Напомним, что генераторы первого рода выполняются по балансной схеме, в которой напряжение накачки  $U_n(t)$  подается симметрично в колебательный

контур. Описание динамики колебаний в такой системе в общем сводится к уравнению (1). В генераторе, выполненном по схеме рис. 7, б, реализуется аддитивное воздействие внешнего сигнала  $U_c(t)$  и накачки  $U_H(t)$ , он описывается уравнением (2) [1]. В качестве нелинейных емкостей нами использовались обратно-смещенные варикапы КВ 109В. Амплитуды внешнего воздействия были малы, и

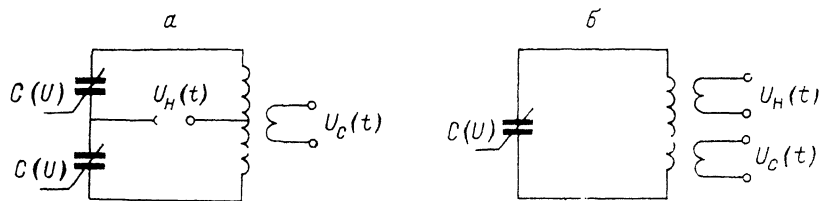


Рис. 7. Исследовавшиеся схемы параметрических генераторов первого (а) и второго (б) родов.

так что возбуждаемые колебания всегда оставались узкополосными. Наблюдавшиеся при этом закономерности смены колебательных режимов и их бифуркационные параметры оказались идентичными для обоих типов генераторов, что характерно для квазилинейного режима возбуждения и позволяет применять для описания их динамики единую систему укороченных уравнений (3).

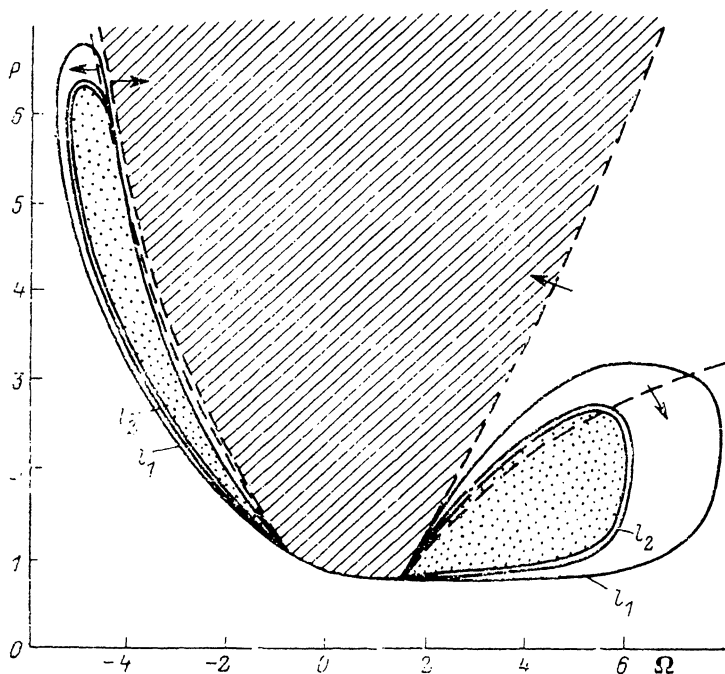


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма режимов, полученная в экспериментах.

При отсутствии внешнего сигнала в генераторах возбуждались только субгармонические колебания с частотой, равной половине частоты накачки. Приведем теперь результаты конкретных экспериментов с генератором второго рода (рис. 7, б) при воздействии на него внешнего гармонического колебания. Собственная частота и добротность колебательного контура равнялись  $f_0 = 12.91$  МГц,  $Q = 92.2$ , частота накачки  $f_H = 25.46$  МГц. На рис. 8 приведена бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров амплитуда — частота внешнего сигнала. Варьируемые параметры пересчитаны к использованным выше безразмерным параметрам  $P$  и  $\Omega$ . Реализованные в данном эксперименте значения других параметров соответствуют бифуркационной

диаграмме, приведенной на рис. 4. Здесь также сохранены прищипы там обозначения.

Сравнение рис. 8 и 4 показывает, что все закономерности смены колебательных режимов и их расположение на плоскости параметров полностью повторяются. Более того, наблюдается достаточно хорошее качественное совпадение между численными и экспериментальными данными. Проведенные эксперименты показали, что такое соответствие имеет место в широком диапазоне изменения параметров.

### Заключение

Таким образом, параметрически возбуждаемые осцилляторы являются неустойчивыми к резонансному воздействию внешнего гармонического сигнала относительно малой интенсивности. Численные и натурные эксперименты показали, что в результате взаимодействия колебания накачки и сигнала возможно возбуждение стохастических колебаний в широком диапазоне изменения управляющих параметров уже в квазилинейном режиме возбуждения. Сравнение теоретических и экспериментальных данных показало, что все закономерности возбуждения хаотических колебаний и их эволюцию удается описать с помощью известных укороченных уравнений осциллятора. Установлено, что данные уравнения допускают эффективное применение метода Мельникова для определения аналитических условий возникновения хаоса. Исследования показали, что характерной особенностью динамики неавтономного, параметрически возбуждаемого осциллятора является мультистабильность, проявляющаяся в одновременном сосуществовании и взаимодействии нескольких (двух и более) аттракторов различных типов (регулярных и хаотических).

В данной работе мы ограничились описанием динамики осцилляторов при небольших расстройках  $|\Delta|$ . Из уже выполненных исследований следует, что стохастическая неустойчивость существенным образом проявляется и при  $\Delta$ , удовлетворяющих условию (6). При таких расстройках хаотические колебания возбуждаются не только в режиме параметрической генерации  $m > \alpha_0$ , но и в режиме усиления  $m < \alpha_0$ . Последний случай представляет особый интерес для целого ряда приложений и требует отдельного рассмотрения.

### Список литературы

- [1] Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. И. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 391 с.
- [2] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ, 1964. 295 с.
- [3] Каплан А. Е., Крацов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио, 1966. 334 с.
- [4] Ito H. // Progr. Theor. Phys. Jap. 1979. Vol. 61. N 3. P. 815—824.
- [5] Izrailev F. M., Rabinovich M. I., Ugodnikov A. D. // Phys. Lett. 1981. Vol. 86A. N 6, 7. P. 321—325.
- [6] Kapitaniak T. // J. Sound and Vibration. 1988. Vol. 121. P. 259—263.
- [7] Мельников В. К. // Тр. Моск. мат. общ-ва. 1963. Т. 12. С. 3—52.
- [8] Guckenheimer J. M., Holmes Ph. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. New York: Springer Verlag, 1983. 454 p.
- [9] Белогорцев А. Б., Вавриш Д. М., Третьяков О. А. // ЖЭТФ. 1987. Т. 94. Вып. 4. С. 1316—1321.
- [10] Вавриш Д. М., Чернышов И. Ю., Третьяков О. А. // РЭ. 1989. Т. 34. № 8. С. 1698—1706.
- [11] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [12] Yataaguchi A., Fujisaka H., Inoue M. // Phys. Lett. 1989. Vol. 135. N 6, 7. P. 320—326.

Радиоастрономический институт  
Харьков

Поступило в Редакцию  
11 февралл