06; 07 Журнал технической физики, т. 61, в. 11, 1991

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ ТУННЕЛЬНО-СВЯЗАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

С. А. Дарманян

Система, состоящая из двух туннельно-связанных нелинейных волноводов, впервые была исследована в работах [1, 2]. Авторы этих работ показали, что на основе туннельно-связанных волноводов можно конструировать оптические транзисторы, переключатели, логические элементы и т. д. С другой стороны, использование солитонных режимов распространения оптических импульсов в световодах обещает значительно повысить пропускную способность оптических линий связи (см., например, [3]). Все это делает исследования распространения солитонов в системах связанных оптических волокон актуальными как с точки зрения общей теории солитонов, так и ее различных приложений. Такие исследования проводились, например, в работах [3-6]. В частности, в работе [4] было показано, что солитоны, распространяющиеся в разных волокнах, при определенных условиях могут образовывать связанные состояния или, наоборот, отталкиваться друг от друга. В данной работе в отличие от предыдущих исследован случай, когда параметр, описывающий связь двух волокон, является функцией координаты вдоль волокон.

Система уравнений, описывающая распространение оптических импульсов в связанных волокнах, есть система двух нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) [3]

$$iq_{1x}+\frac{1}{2}q_{1\tau\tau}+|q_1|^2 q_1=\varepsilon q_2,$$

$$iq_{2x}+\frac{1}{2}q_{2\tau\tau}+|q_2|^2 q_2=\varepsilon q_1, \tag{1}$$

где q, x, τ — соответственно обезразмеренные амплитуды поля, координата вдоль направления распространения и время в «бегущей» системе координат.

Параметр ε, характеризующий связь между волокнами и зависящий от расстояния между ядрами волокон и от разности диэлектрических проницаемостей ядра и оболочки волокна, будем считать функцией координаты x. Этим отражается тот факт, что возможны как флуктуации геометрических факторов системы и параметров среды, окружающей ядра волокон, так и их искусственная модуляция. Солитонное решение невозмущенного НУШ есть

$$q=2\nu\,\mathrm{sech}\,[2\nu(\tau-\xi)]\exp[2i\mu(\tau-\xi)+i\delta], \tag{2}$$

где ν, ξ, μ и δ — параметры, характерузующие соответственно амплитуду, положение центра, скорость и фазу солитона.

Полагая в дальнейшем, что $|\varepsilon|\ll 1$, и применяя теорию возмущений в адиабатическом приближении, аналогично [4] можно показать, что для солитонов одинаковой амплитуды $\nu_1=\nu_2=\nu$ потенциал взаимодействия есть

$$U=16\nu^2\cdot\varepsilon(x)\cdot\cos\psi_0\,\frac{r}{\sinh r}, \tag{3}$$

где $r=2\nu(\xi_2-\xi_1)$; $\varphi_0=\delta_{02}-\delta_{01}$ — начальная разность фаз солитонов, равная либо π, либо 0, а уравнение для параметра r, описывающего нормированное расстояние между центрами солитонов для малых r, есть

$$r_{xx}-\frac{16}{3}\nu^2\cdot\varepsilon(x)\cdot\cos\psi_0\cdot r=0. \tag{4}$$

Как видно из (3) и (4), в случае $\varepsilon\cos\psi_0<0$ между солитонами возникает притяжение. При $\varepsilon=\mathrm{const}$ решение уравнения (4), описывающее связанное состояние солитонов, есть $r=r_0\cos kx$, где $k=4\nu\sqrt{|\varepsilon|/3}$ [4]. Учет же зависимости параметра связи ε от координаты x может существенно изменить решение уравнения (4).

Рассмотрим два частных случая этой зависимости. Пусть $|\varepsilon| = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos \varkappa x$; $\varepsilon_0 > \varepsilon' > 0$. В этом случае уравнение (4) сводится к уравнению Матье

$$r_{xx} + k^2 (1 + \varepsilon_1 \cos \varkappa x) r = 0, \tag{5}$$

где $k^2 = 16\nu^2\varepsilon_0/3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon'/\varepsilon_0$.

Решение уравнения (5) выражается через функции Матье, однако в случае $\varepsilon_1 \ll 1$, т. е. в случае слабой модуляции связи решение уравнения (5) можно получить по теории возмущений [7]. Следует отметить возможность осуществления параметрического резонанса. В этом случае в области параметров $\varkappa = 2k + \Delta_1$, где Δ_1 — малая расстройка $(2|\Delta_1| < k\varepsilon_1)$, будет наблюдаться экспоненциальный рост амплитуды осцилляций расстояния между центрами солитонов, т. е. $r \sim \exp \lambda x$, где $4\lambda = \sqrt{k^2\varepsilon_1^2 - 4\Delta_1^2}$. При $\varkappa \approx 2k/n$, где n — целое число, осуществляются резонансы более высокого порядка $(n > 1)$. Однако в случае резонанса порядка n область резонанса существенно сужается $\Delta_n \sim \varepsilon_1^n$ и соответствующие инкременты неустойчивости также будут уменьшаться [7].

Второй случай соответствует флуктуациям параметра связи около своего среднего значения ε_0; $|\varepsilon| = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_1)$, где ε_1 — случайная гауссова функция, причем $\langle\varepsilon_1\rangle = 0$, $\langle \varepsilon_1 (x_1)\, \varepsilon_1 (x_2)\rangle = B (x_1 - x_2)$. В этом случае выписать решение уравнения (4) в явном виде не удается, однако это можно сделать для средних величин. Известно [8], что при наличии флуктуаций параметров колебательной системы в ней может осуществиться стохастический параметрический резонанс. Возможность параметрической раскачки системы связана с тем, что случайная функция содержит все гармоники, часть из которых удовлетворяет условиям параметрического резонанса. На существование аналога явления стохастического параметрического резонанса для солитонов впервые было указано в работе [9]. Здесь мы приводим еще один пример этого явления для солитонов. Предположим для простоты, что корреляционная функция $B (x_1 - x_2) = 2\sigma^2\delta (x_1 - x_2)$, и, опуская промежуточные вычисления, которые можно найти в [8], приведем выражение для среднего квадрата расстояния между центрами солитонов

$$\langle r^2 (x)\rangle = r_0^2 + \frac{1}{2}\left\{e^{\sigma^2k^2x} - e^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2x}\left[\cos 2kx + \frac{3}{4}\sigma^2k^2 \sin 2kx\right]\right\}. \tag{6}$$

Аналогичное выражение можно выписать и для среднего значения квадрата скорости солитонов. Из (6) видно, что среднее значение квадрата расстояния между солитонами экспоненциально растет по мере распространения солитонов вдоль волокна, причем инкремент нарастания $\lambda = \sigma^2k^2$. Обобщение этих результатов на процессы с конечным радиусом корреляции можно найти в [8], там же указан способ построения функций распределения случайных величин r и r_x.

Таким образом, мы показали, что в системе туннельно-связанных волокон с переменной связью возможно осуществление параметрического и стохастического параметрического резонансов солитонов, выражающихся в экспоненциальном нарастании амплитуды взаимных колебаний положений центров и относительных скоростей солитонов.

Существует еще один вид начальных условий, когда система уравнений (1) может быть исследована в рамках адиабатической теории возмущений. Предположим, что солитоны, распространяющиеся в разных волокнах, имеют одинаковые скорости, их центры совпадают, а амплитуды отличаются незначительно. В этом случае система уравнений, описывающая поведение разности фаз солитонов $\varphi = \delta_2 - \delta_1$ и разности их амплитуд $\Delta = \nu_2 - \nu_1$, имеет вид

$$\Delta_x = -2A\varepsilon (x) \sin \psi, \tag{7а}$$

$$\psi_x = \left(2A + \frac{5}{A}\varepsilon (x)\right)\Delta, \tag{7б}$$

где $A = \nu_1 + \nu_2 = \text{const}$, $\Delta \ll A$.

Из системы уравнений (7) можно получить замкнутое уравнение для разности фаз ψ. Пренебрегая вторым членом в скобках в уравнении (7б), получаем

$$\psi_{xx}+4A^2\varepsilon(x)\cdot\sin\psi=0. \tag{8}$$

Это уравнение при $\varepsilon=\mathrm{const}$ совпадает с уравнением, полученным в [6], и является хорошо изученным уравнением нелинейного маятника (для ψ при $\varepsilon>0$ или для $\varphi=\psi+\pi$ при $\varepsilon<0$). В случае, когда ε является функцией x, уравнение (8) описывает параметрически возбуждаемый нелинейный маятник. При $|\psi|\ll 1$ уравнение (8) сводится к рассмотренному выше линейному уравнению и в зависимости от закона $\varepsilon(x)$ может осуществляться параметрический или стохастический параметрический резонанс. Это приведет к экспоненциальному росту разности амплитуд солитонов, которая в соответствии с (7) равна $\Delta\approx\psi_x/2A$.

Отметим также следующее обстоятельство. Нелинейный маятник под действием регулярного возмущения имеет область параметров, где его поведение становится хаотическим. Так, для $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon'\cos\varkappa x$ ширина стохастического слоя, который образуется вблизи сепаратрисы, имеет следующее значение [10]:

$$|H-H_s|\leqslant 4A^2\varepsilon'\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^3\exp\left[-\frac{\pi\varkappa}{2k}\right],$$

где $k^2=4A^2\varepsilon_0$, $H=1/2\ \psi_x^2-k^2\cos\psi$ — гамильтониан нелинейного маятника, $H_s=k^2$ — значение H на сепаратрисе. Таким образом, в системе туннельно-связанных волокон с модулированной связью существует область значений начальных параметров, при которых возникает стохастическая динамика солитонов.

Список литературы

[1] *Jensen S.* // IEEE J. Quant. Elect. 1982. Vol. QE-18. N 10. P. 1580—1583.
[2] *Майер А. А.* // Квантовая электрон. 1982. Т. 9. № 11. С. 2296—2302.
[3] *Абдуллаев Ф. Х., Дарманян С. А., Хабибуллаев П. К.* Оптические солитоны. Ташкент, 1987. 300 с.
[4] *Abdullaev F., Abrarov R., Darmanyan S.* // Opt. Lett. 1989. Vol. 14. N 2. P. 131—133.
[5] *Wright E., Stegeman G., Wabnitz S.* // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 40. N 8. P. 4455—4466.
[6] *Kivshar Y., Malomed B.* // Opt. Lett. 1989. Vol. 14. N 24. P. 1365—1367.
[7] *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
[8] *Клятцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
[9] *Абдуллаев Ф. Х., Дарманян С. А., Джумаев М.* // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 6. С. 54—58.
[10] *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.

Отдел теплофизики АН УзССР
Ташкент

Поступило в Редакцию
19 ноября 1990 г.