

## КАПЕЛЬНЫЙ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО МОНОДИСПЕРГИРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

А. А. Земсков, А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Предлагается квазистатическая модель отрыва капли от капилляра под действием электрических сил и силы тяжести, на основе которой производится расчет объема, заряда и параметра Рэлея для отрывающихся капель. Полученные результаты качественно совпадают с экспериментальными данными и позволяют объяснить существование двух режимов монодиспергирования жидкости: капельного и гармонического.

### Введение

Явление электростатического монодиспергирования жидкостей с мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается, представляет интерес в связи с весьма широким кругом задач физики, техники и технологии — от электрокапельструйной печати, электроокраски и жидкостной масс-спектрометрии до проблем подпитки жидким водородом установок для термоядерного синтеза и ускорителей макрочастиц (см., например, [1-3] и указанную там литературу). В работах, посвященных экспериментальному изучению этого процесса [3-5], выделяют два режима электростатического монодиспергирования жидкости: капельный и гармонический, отличающиеся друг от друга качественным видом зависимости размера капель и частоты каплеобразования от внешних параметров. В капельном режиме отрыв капли от торца капилляра, по которому подается жидкость, происходит при совместном действии на каплю двух одинаково направленных сил: силы тяжести и силы электрического взаимодействия с электродами при определяющей роли силы тяжести. В гармоническом режиме определяющую роль играют электрические силы. Следует заметить, что в то время как теория гармонического режима в общих чертах разработана и создана достаточно эффективная модель, позволяющая рассчитывать параметры образующихся капель [6-7], капельный режим, связанный прежде всего с явлением отрыва капли от капилляра, не имеет строго теоретического объяснения. Ниже предлагается квазистатическая модель капельного режима монодиспергирования электропроводной жидкости в электростатическом и гравитационном полях, основанная на принципе минимальности свободной энергии капли, висящей на торце капилляра, при  $T = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$  и принципе наименьшего действия, описывающая при увеличении прикладываемого электрического поля также и переход к гармоническому режиму.

1. Пусть по металлическому вертикально ориентированному капилляру радиуса  $R$  и длины  $L$ , поддерживаемому под постоянным потенциалом  $\varphi$  относительно весьма удаленного противоиэлектрода, подается идеальная, идеально проводящая жидкость плотности  $\rho$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . И пусть скорость подачи жидкости по капилляру настолько мала, что объем висящей на срезе капилляра капли (мениска жидкости) можно считать постоянным по крайней мере на интервалах времени порядка периода основной моды капиллярных колебаний данной капли. Форма поверхности такой капли в любой момент времени будет определяться условием минимальности ее энергии в поле сил тяжести, энергии сил поверхностного натяжения и электростатической энергии

$$U = \sigma \int_S dS - \rho g \int_V x dV - \frac{1}{2} q \varphi, \quad (1)$$

где первое слагаемое определяет энергию сил поверхностного натяжения, второе — потенциальную энергию капли в поле силы тяжести (относительно среза капилляра) (рис. 1), третье — электростатическую энергию капли, поддерживаемой при потенциале  $\varphi$ . Имея в виду, что рассмотрение проводится на интервале времени, меньшем периода колебаний основной моды капли, потребуем выполнения дополнительного условия постоянства объема

$$\int_V dV = V = \text{const.} \quad (2)$$

Заряд на капле определим как

$$q = \int_S \omega dS,$$

где  $\omega(x)$  — поверхностная плотность заряда.

Введем капиллярную постоянную жидкости  $\alpha = \sqrt{2\sigma/(\rho g)}$  и, учитывая осевую симметрию задачи, перепишем выражения (1), (2) в виде

$$U = \pi \rho g \int_0^{x_m} y \left( \alpha^2 \sqrt{1+y^2} - xy - \frac{\varphi}{\rho g} \omega(x) \sqrt{1+y^2} \right) dx,$$

$$\pi \int_0^{x_m} y^2 dx = V = \text{const.}$$

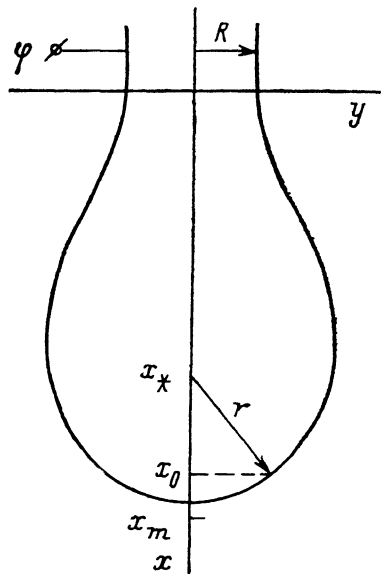


Рис. 1. Схема капли, висящей на капилляре, в поле сил тяжести.

Здесь  $y=y(x)$  — образующая равновесной формы капли, которая с очевидностью является осесимметричной фигурой;  $x_m$  — нижняя вершина капли (рис. 1). Перейдем теперь к безразмерным переменным

$$\xi \equiv \frac{x}{R}, \quad v \equiv \frac{y}{R}, \quad a \equiv \frac{\alpha}{R}, \quad W^2 \equiv \frac{\varphi^2}{\rho g R^3}, \quad w(\xi) = \frac{\omega(x) R}{\varphi}$$

и получим

$$E \equiv \frac{U}{\pi \rho g R^4} = \int_0^{\xi_m} v \left[ (a^2 - W^2 w(\xi)) \sqrt{1+v^2} - \xi v \right] d\xi, \quad (3)$$

$$v \equiv \frac{V}{\pi R^3} = \int_0^{\xi_m} v^2 d\xi. \quad (4)$$

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (3) с дополнительным условием (4) имеет вид

$$v \ddot{v} = (1 + v^2) \left[ 1 - v \frac{W^2 v w(\xi) + 2(\xi + \lambda) \sqrt{1+v^2}}{a^2 - w(\xi) W^2} \right] \quad (5)$$

с граничными условиями: на торце капилляра — условие пересечения образующей с капилляром

$$v(0) = 1, \quad (6)$$

на нижней вершине капли — условие трансверсального пересечения образующей  $v(\xi)$  с осью  $0\xi$

$$(\xi_m + \lambda) v^2(\xi_m) = \frac{a^2 - W^2 w(\xi_m)}{\sqrt{1+v^2(\xi)}} v(\xi_m),$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа.

Введем радиус кривизны поверхности капли в нижней точке  $r_*$  (в безразмерном виде  $\zeta \equiv r_*/R$ ) и, заменяя искомую кривую в малой окрестности нижней вершины  $[\xi_0, \xi_m]$  окружностью, запишем уравнение образующей в виде

$$v(\xi) = \begin{cases} v(\xi) & \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ \frac{v(\xi_0)}{\sqrt{\zeta^2 - (\xi - \xi_*)^2}} & \text{при } \xi_0 \leq \xi \leq \xi_m, \end{cases}$$

где  $\xi_*$  — центр окружности, который, так же как и радиус, легко найти из значений  $\xi_0, v(\xi_0), v'(\xi_0)$

$$\xi = -\frac{v(\xi_0)}{\cos[\operatorname{arctg} v'(\xi_0)]},$$

$$\xi_* = \xi_0 - \sqrt{\zeta^2 - v^2(\xi_0)},$$

тогда условие трансверсальности примет вид

$$\xi_m = \frac{a^2 - W^2 w(\xi_m)}{\zeta} = \lambda. \quad (7)$$

Безразмерная плотность электрического заряда легко определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\omega,$$

решение которого с помощью функции Грина можно представить в интегральной форме

$$\varphi = \int \frac{\omega(r') dr'}{|r - r'|}$$

или с учетом постоянства потенциала на поверхности мениска и цилиндрической симметрии задачи в безразмерном виде

$$1 - \int_{-L/R}^{\xi_m} \int_0^{2\pi} \frac{w(\xi') v(\xi') \sqrt{1 + [v'(\xi')]^2} d\psi d\xi'}{[(\xi - \xi')^2 + v^2(\xi) - v^2(\xi') - 2v(\xi) v(\xi') \cos \psi]^{1/2}} = 0. \quad (8)$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка (5) с граничными условиями (6), (7) и условием (8) решалось численно следующим образом: в качестве начального приближения рассчитывался профиль капли  $v^0(\xi)$  при нулевом потенциале ( $W=0 \rightarrow w_0(\xi)=0$ ). Затем для этого профиля из уравнения (8) находилось распределение заряда  $w_1(\xi)$  при заданном потенциале  $W^2$ . После чего опять находился профиль капли  $v_1(\xi)$ , но уже с  $W_1^2 = W^2$  и  $w(\xi) = w_1(\xi)$ . Затем из (8) находилось  $w_2(\xi)$ , и процесс повторялся, пока  $\Delta v \equiv v_i - v_{i-1}$  для всех  $\xi$  не становилось меньше заданной точности  $\varepsilon$ .

2. В результате численного решения на ЭВМ задачи (5)–(8) были получены формы капель для различных значений объема жидкости, висающей на капилляре, и разных значений параметров  $a$  и  $W$ . Было установлено, что для фиксированных значений  $a$  и  $W$  имеется некий предельный максимальный объем  $V_*$ , для которого еще существуют решения уравнения (5) с условиями (6)–(8). Для объемов, больших  $V_*$ , решений не существует. С физической точки зрения это означает, что при  $V > V_*$  не существует равновесных форм капель, соответствующих минимуму энергии. В силу теоремы о неустойчивости состояния равновесия при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии [8] сказанное означает неустойчивость капель с  $V > V_*$  по отношению к отрыву капли от капилляра. Таким образом, как только объем капли достигнет величины  $V_*$ , капля становится неустойчивой и начинается динамический процесс ее отрыва от капилляра.

На рис. 2 представлена зависимость полной свободной энергии капли, висающей на торце капилляра, от объема  $V$  и высоты капли  $x_m$ . Очевидно, что в квазистатическом приближении, когда в каждый момент времени форму капли можно считать равновесной, процессу роста капли на конце капилляра будет

соответствовать экстремаль на энергетической поверхности (кривая, проходящая через точки с минимальной энергией для каждого фиксированного значения  $V$ ), являющаяся решением задачи (5)–(8). Причем при объемах, больших  $V_*$ , как уже говорилось, равновесных форм капли не существует, а следовательно, не существует и экстремума энергии, а сама точка  $V=V_*$  является точкой перегиба: в ней происходит переход системы из состояния с максимальной энергией (при  $x_m < x_m(V_*)$ ) в состояние с минимальной энергией (при  $x_m > x_m(V_*)$ ).

Из рис. 2 видно, что по мере увеличения объема  $V$  от нуля свободная энергия для равновесной формы капли вначале уменьшается, проходит через ми-

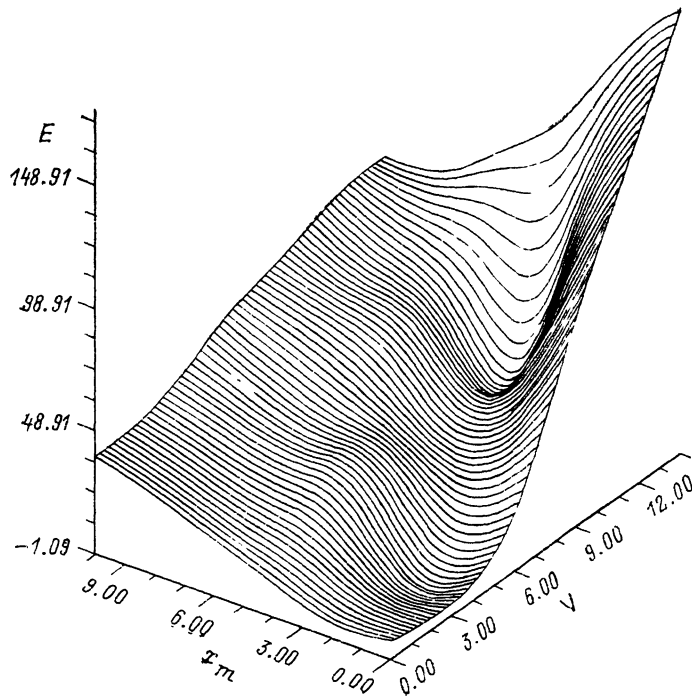


Рис 2. Зависимость свободной энергии капли, висящей на капилляре, от объема и характерного линейного размера ( $a=4$ ).

нимальное значение  $E_{\min}=E(V_0)$ , а затем увеличивается, достигая максимума при  $V=V_*$ . В силу принципа наименьшего действия система при отрыве капли от капилляра переходит в точку с наименьшей энергией. В соответствии со сказанным объем отрывающихся капель  $V_+$  легко найти:  $V_+=V_*-V_0$ .

На рис. 3 приведены зависимости максимального устойчивого объема и объема, соответствующего минимуму энергии для капли, висящей на капилляре, от приложенного к капилляру потенциала (характеризуемого безразмерным параметром  $W$ ). Формы жидкого мениска, соответствующие обоим объемам — максимальному устойчивому и объему, характеризующему положение минимума энергии, — приведены на рис. 4. Формирование отрывающейся капельки и сам отрыв происходят после потери капли состояния устойчивости, т. е. являются неравновесными процессами и требуют специального анализа, выходящего за рамки данного рассмотрения.

Безразмерный заряд отрывающихся капель 
$$\left( Q \equiv 2\pi \int_0^{\xi_m} w(\xi) v(\xi) \sqrt{1+v^2(\xi)} d\xi \right)$$

будем считать как разность полных зарядов капель, висящих на капилляре, при  $V_*$  и  $V_0$

$$Q_+ = Q(V_*) - Q(V_0).$$

На рис. 5 приведена зависимость объема отрывающихся капель  $V_+ = V_+(W)$  (кривая 1), безразмерного заряда отрывающихся капель  $Q_+ = Q_+(W)$  (кривая 2) и параметра Рэлея для отрывающихся капель  $\Pi = q^2/16\pi\sigma r^3$  (кривая 3) от безразмерного потенциала  $W$ . Полученные зависимости качественно хорошо согласуются с экспериментальными данными Сэмпла и Боллини [4, 5], которые обнаружили, что переход от капельного режима к гармоническому характеризуется резким уменьшением размеров и зарядов отрывающихся капель. На рис. 5 также бросается в глаза резкое изменение размеров и зарядов капель при достижении полем некоторой критической величины. Качественное согласие найденных зависимостей с данными [4, 5] подтверждается и тем, что в капельном режиме монодиспергирования кривая  $V_+(W)$  выпуклая, а в гармоническом — вогнутая, как и отмечалось в [6, 7]. О количественном согласии говорить не приходится ввиду идеализации, принятой в данном рассмотрении системы электродов.

Следует также отметить, что в работе [5] в гармоническом режиме обнаружены

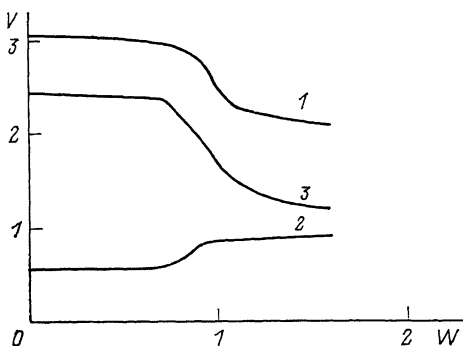
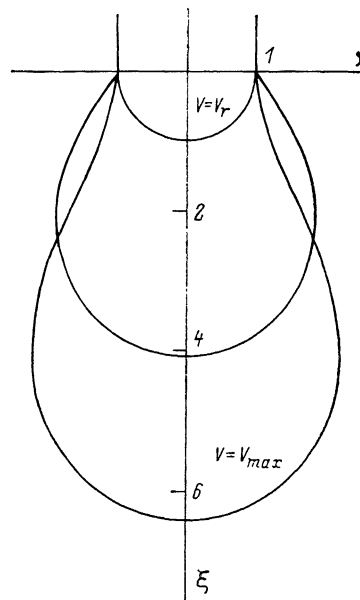


Рис. 3. Зависимость максимального устойчивого объема  $V_*$  (1), объема, соответствующего минимуму энергии  $V_0$  (2), и объема отрывающейся капли (3) от безразмерного объема  $W$  ( $a=2$ ).

Рис. 4. Формы жидкого мениска, соответствующие максимальному устойчивому объему и объему с минимальной свободной энергией ( $a=5$ ).



две различные области, размеры и заряды отрывающихся капель в которых различным образом зависят от прикладываемого напряжения. В первой области размер капель уменьшается при увеличении напряжения, во второй — увеличивается (что указывает, по-видимому, на определяющее влияние неких кинетических процессов). Эти области разделяются зоной неустойчивого диспергирования, где процесс диспергирования жидкости с мениска на торце капилляра носит неустойчивый характер и капли имеют сильный разброс в размерах. Проведенное в данной работе рассмотрение относится к первой из этих областей. Во второй области задача (5)–(8) решений не имеет, что связано, по-видимому, с перманентной неустойчивостью мениска в силу большой величины напряженности электрического поля в его окрестности, в то время как предложенная в настоящей работе модель является квазистатической.

Существование двух режимов (капельного и гармонического) объясняется тем, что отрыв капли от капилляра происходит под действием двух сил: силы тяжести и электростатической силы. По мере увеличения  $W$  значение  $V_*$  уменьшается, а  $V_0$  увеличивается, и поэтому процесс отрыва капли от капилляра будет иметь место уже при весьма малых объемах, когда влияние силы тяжести пренебрежимо мало.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что капельный режим монодиспергирования жидкости обуславливается в первую очередь наличием силы

тяжести, а гармонический — электростатическими силами. Этот вывод подтверждается тем, что в работах [9, 10] отмечается существование только одного режима (по характеристикам близкого к гармоническому). В этих работах были использованы очень тонкие капилляры, объемы капель на среде капилляра были малы и влияние силы тяжести на процесс отрыва капли от капилляра было также мало. К тому же ввиду малости радиусов капилляра в [9, 10] напряженность электростатического поля в окрестности отрывающихся капель была велика, поэтому диапазон напряжений существования капельного режима в установках, использованных в [9, 10] очень узок и находится в области напряжений (близких к нулю), которые не исследовались на каплеобразование.

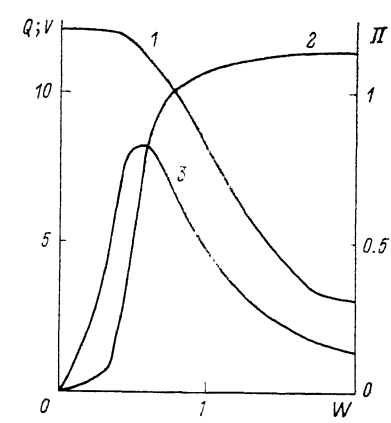
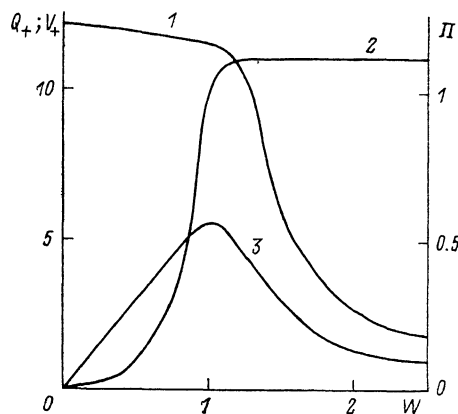


Рис. 5. Зависимость объема  $V_+$  (1), безразмерного заряда  $Q_+$  (2) и параметра Рэлея  $\Pi$  (3) для отрывающихся капель от безразмерного потенциала  $W$  ( $a=4$ ).

Рис. 6. Зависимости  $V_+=V_+(W)$  (1),  $Q_+=Q(W)$  (2) и  $\Pi-\Pi(W)$  (3) для  $a=4$  в системе с плоским противоэлектродом  $l=10R$ .

3. В заключение отметим, что с помощью данного метода можно рассчитать параметры капель при электростатическом монодиспергировании жидкости и в иных системах электродов, например когда помимо капилляра имеется плоский противоэлектрод, находящийся на расстоянии  $l$  от среза капилляра. При теоретическом анализе подобной ситуации все изменения сведутся к замене уравнения нахождения поверхностной плотности заряда, легко получаемого методом изображений,

$$1 - \int_{-l/R}^{\xi_m} \int_0^{2\pi} \omega(\xi') v' V \sqrt{1+v'^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \psi}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi - 2l + \xi')^2 + v^2 (\xi')^2 + v^2 (\xi) - 2v(\xi) v(\xi') \cos \psi}} \right] d\psi d\xi' = 0.$$

Видно, что это выражение при предельном переходе  $l \rightarrow \infty$  преобразуется в выражение (8), так как при  $l \rightarrow \infty$  второй член в квадратных скобках стремится к нулю.

На рис. 6 представлены зависимости  $V_+=V_+(W)$  и  $\Pi=\Pi(W)$  для  $l=10R$ . Видно, в частности, что в обсуждаемом случае интервал напряжений, соответствующих капельному режиму диспергирования, сужается, что происходит, по-видимому, ввиду усиления электрического поля на поверхности мениска.

**Список литературы**

[1] Григорьев А. И., Сыщиков Ю. В., Ширяева С. О. // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020—2026.  
 [2] Baily A. G. // Sci. Prog. Oxford, 1974. Vol. 61. P. 551—581.

- [3] *Woosley J. P., Turnbull R. J., Kim K.* // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 4278—4284.
- [4] *Raghupathy B., Sample S. B.* // Rev. Sci. Inst. 1970. Vol. 41. N 5. P. 645—647.
- [5] *Sample S. B., Raghupathy B.* // J. Coll. Interface Sci. 1971. Vol. 41. N 2. P. 185—193.
- [6] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 5—15.
- [7] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // Научное приборостроение. Физика аналитических приборов. Л.: Наука, 1989. С. 28—35.
- [8] *Владимиров В. А.* // ЖПМТФ. 1989. № 2. С. 108—116.
- [9] *Нагорный В. С., Безруков В. И.* // Магнитная гидродинамика. 1980. № 3. С. 111—117.
- [10] *Ahira D. V., Kamra A. K.* // Mausam. 1984. Vol. 35. N 1. P. 27—32.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию  
26 октября 1990 г.