01

УРАВНЕНИЕ ГРИНБЕРГА ДЛЯ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

Ю. К. Алексеев

Рассмотрено продольное взаимодействие нерелятивистского электронного потока с полем электромагнитной волны, амплитуда которой адиабатически медленно изменяется в пространстве. На основе метода полного тока Гринберга записана самосогласованная система уравнений Гамильтона, описывающая движение электронов с учетом сил объемного заряда. Система приведена к нормализованному виду, в котором малым параметром является обратный пролетный угол электронов. Найдено каноническое преобразование к медленным переменным, в которых гамильтониан задачи не зависит от времени. Получено и проанализировано уравнение Гринберга для усредненного движения электронов потока, описывающее нелинейное взаимодействие волн пространственного заряда и потенциального движения электронного потока в слабонеоднородном переменном поле. Показано, что пространственная неоднородность поля приводит к локальному изменению плазменной частоты колебаний электронов, а также что в результате действия сил объемного заряда электронов адиабатический инвариант Гапонова—Миллера не сохраняется. Получено условие применимости кинематического приближения в описании медленной эволюции системы.

Необходимость исследования взаимодействия пространственно неоднородной электромагнитной волны с системой заряженных частиц достаточно часто встречается в современной плазменной и электронновакуумной физике и технике. К задачам такого рода относятся взаимодействие лазерного излучения с плазмой [1], автоэмиссия электронов в высокочастотном поле [2], взаимодействие электронного потока с полем открытого резонатора в лазерах на свободных электронах [3], мазерах на циклотронном резонансе [4], приборах дифракционной электроники [5] и т. д. Во всех этих случаях адиабатически слабая пространственная неоднородность электромагнитного поля обусловливает появление усредненной, постоянно действующей силы, которая в определенных условиях может существенно влиять на движение заряженных частиц.

В кинематическом приближении движение электронов в слабонеоднородном в пространстве переменном поле рассмотрено в [6-8], при этом было показано, что для усредненного движения сохраняется адиабатический инвариант Гапонова—Миллера

$$\bar{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где $\bar{\varphi} \equiv \bar{v}/v_0$, $\bar{v}$ — средняя скорость частицы, v_0 — скорость влета, $\varepsilon \equiv \eta_e E/(\omega v_0)$, η_e — удельный заряд электрона, E — амплитуда напряженности электрического поля, ω — круговая частота сигнала.

Согласно (1), медленное движение электрона носит потенциальный характер, роль потенциала играет квадрат напряженности электрического поля. Однако в ряде случаев кинематическое приближение в решении рассматриваемой задачи является слишком грубым и уже неадекватно описывает движение электронов. Это относится, например, к электронным усилителям и генераторам средней и большой мощности, в которых плотность тока может достигать 10^2—10^4 А/см^2 и основную роль в движении потока играют волны объемного заряда электронов. Учету сил объемного заряда в усредненном движении электронного потока и посвящена настоящая работа.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением взаимодействия нерелятивистского электронного потока с продольным электрическим полем электромагнитной волны, амплитуда которой адиабатически медленно изменяется вдоль потока. Предположим также присутствие достаточно сильного продольного постоянного магнитного поля, а также неподвижного компенсирующего ионного фона. Для решения поставленной задачи привлечем метод полного тока Гринберга [9], на основе которого в приближении заданного поля и постоянной плазменной частоты запишем известное самосогласованное уравнение движения электрона в переменном поле, учитывающее влияние сил объемного заряда электронов и ионов [10, 11],

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\omega_e^2\frac{dx}{dt}=\omega_e^2 v_0+\eta_e\frac{dE}{dt}. \tag{2}$$

Предполагая зависимость поля от времени в виде $E=E\sin\omega t$ и переходя в (2) к безразмерным переменным $\chi\equiv\omega x/v_0$, $\varphi\equiv\omega t$, $\bar\omega_e^2\equiv\omega_e^2/\omega^2$ (нормированная плазменная частота), получаем

$$\frac{d^3\chi}{d\varphi^3}+\bar\omega_e^2\frac{d\chi}{d\varphi}=\bar\omega_e^2+\frac{d}{d\varphi}\varepsilon\sin\varphi. \tag{3}$$

Запишем (3) в виде следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi}=1-\pi,$$

$$\frac{d\pi}{d\varphi}=\varepsilon\sin\varphi+\bar\omega_e^2\alpha,$$

$$\frac{d\chi}{d\varphi}=\pi. \tag{4}$$

Перейдем от переменной α к переменной β

$$\beta=\alpha+\chi,\quad \frac{d\beta}{d\varphi}=1, \tag{5}$$

а также введем ассоциированное уравнение и переменную γ так, чтобы

$$\frac{d\gamma}{d\varphi}=\bar\omega_e^2(\chi-\beta). \tag{6}$$

Тогда получаем следующую каноническую систему уравнений, описывающую движение электронного потока в переменном поле с учетом сил объемного заряда:

$$\frac{d\gamma}{d\varphi}=\bar\omega_e^2(\chi-\beta),$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi}=1,$$

$$\frac{d\pi}{d\varphi}=\varepsilon\sin\varphi+\bar\omega_e^2(\beta-\chi),$$

$$\frac{d\chi}{d\varphi}=\pi. \tag{7}$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\pi^2-\sin\varphi\int\varepsilon(\chi)\,d\chi+\gamma+\frac{1}{2}\bar\omega_e^2(\chi-\beta)^2. \tag{8}$$

Проведем каноническое преобразование переменных, используя производящую функцию

$$\mathscr{F}(\chi,\ \beta,\ p_x,\ p_y) = \frac{1}{\theta_0}\left(\chi p_x + \beta p_y - \cos\varphi \int \varepsilon(\chi)\, d\chi\right) \tag{9}$$

с валентностью $c = 1/\theta_0$, где $\theta_0 \gg 1$ — характерный пролетный угол электрона в поле волны, определяемый масштабом пространственной неоднородности ее амплитуды; $x,\ y,\ p_x,\ p_y$ — новые канонические переменные.

В результате получаем

$$\pi = p_x - \varepsilon\cos\varphi,\quad \gamma = p_y,\quad x = \chi/\theta_0,\quad y = \beta/\theta_0. \tag{10}$$

В новых переменных гамильтониан приобретает следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}\mu\left[(p_x - \varepsilon\cos\varphi)^2 + 2p_y + \Omega^2(x-y)^2\right], \tag{11}$$

где $\mu \equiv \pi_0/\theta_0$, $\Omega \equiv \bar{\omega}_e\theta_0$, при этом уравнения Гамильтона принимают стандартную форму Крылова—Боголюбова с малым параметром $\mu \ll 1$

$$\frac{dp_y}{d\varphi} = \mu\Omega^2(x-y),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \mu,$$

$$\frac{dp_x}{d\varphi} = \mu(p_x - \varepsilon\cos\varphi)\frac{d\varepsilon}{dx}\cos\varphi - \mu\Omega^2(x-y),$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \mu(p_x - \varepsilon\cos\varphi). \tag{12}$$

Будем искать замену переменных к медленным координатам и импульсам $H,\ p_x,\ p_y,\ x,\ y \to \mathscr{H},\ \pi_\xi,\ \pi_\eta,\ \xi,\ \eta$ с помощью производящей функции

$$F(x,\ y,\ \pi_\xi,\ \pi_\eta,\ \varphi) = x\pi_\xi + y\pi_\eta + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots, \tag{13}$$

при этом представим гамильтониан в новых переменных в виде ряда по малому параметру

$$\mathscr{H}(\xi,\ \eta,\ \pi_\xi,\ \pi_\eta) = \mu\mathscr{H}_1 + \mu^2\mathscr{H}_2 + \ldots . \tag{14}$$

Используя (11), (14), можем записать

$$\mu\mathscr{H}_1 + \mu^2\mathscr{H}_2 + \ldots = \frac{1}{2}\mu\left[p_x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + 2p_y + \Omega^2(x-y)^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\mu\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos 2\varphi - 2p_x\varepsilon\cos\varphi\right] + \mu\frac{\partial F_1}{\partial\varphi} + \mu^2\frac{\partial F_2}{\partial\varphi} + \ldots, \tag{15}$$

$$p_x = \pi_\xi + \mu\frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu^2\frac{\partial F_2}{\partial x} + \ldots,\quad p_y = \pi_\eta + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} + \mu^2\frac{\partial F_2}{\partial y} + \ldots,$$

$$x - \xi = -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\pi_\xi} - \mu^2\frac{\partial F_2}{\partial\pi_\xi} - \ldots,\quad y - \eta = -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\pi_\eta} - \mu^2\frac{\partial F_2}{\partial\pi_\eta} - \ldots . \tag{16}$$

Проводя в (15) разложение F_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, в точке $\xi,\ \eta$

$$F_k(x,\ y,\ \pi_\xi,\ \pi_\eta,\ \varphi) = F_k(\xi,\ \eta,\ \pi_\xi,\ \pi_\eta,\ \varphi) + \frac{\partial F_k}{\partial\xi}(x-\xi) + \frac{\partial F_k}{\partial\eta}(y-\eta) + \ldots \tag{17}$$

и проводя вычисления, получаем с точностью до μ

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\mu\left[\pi_\xi^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\xi) + 2\pi_\eta + \Omega^2(\xi-\eta)^2\right] + \frac{1}{2}\mu\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2(\xi)\cos 2\varphi - 2\pi_\xi\varepsilon(\xi)\cos\varphi\right] + \\ + \mu\frac{\partial}{\partial\varphi}F_1(\xi,\ \eta,\ \pi_\xi,\ \pi_\eta,\ \varphi). \tag{18}$$

Откуда, учитывая, что $\partial \mathcal{H}_1 / \partial \varphi = 0$, и полагая F_1 ограниченной во времени, находим

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\left[\pi_\xi^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\xi) + 2\pi_\eta + \Omega^2(\xi - \eta)^2\right] \tag{19}$$

и

$$F_1 = \frac{1}{2}\left[2\pi_\xi \varepsilon(\xi)\sin\varphi - \frac{1}{4}\varepsilon^2(\xi)\sin 2\varphi\right]. \tag{20}$$

Таким образом, для усредненного движения электронного потока в расширенном фазовом пространстве сохраняется следующий адиабатический инвариант, учитывающий действие сил объемного заряда:

$$\pi_\xi^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\xi) + 2\pi_\eta + \Omega^2(\xi - \eta)^2 = \mathrm{const}. \tag{21}$$

Используя (19), получаем канонические уравнения для медленных переменных

$$\frac{d\pi_\eta}{d\varphi} = \mu\Omega^2(\xi - \eta),$$

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \mu,$$

$$\frac{d\pi_\xi}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\mu\left[\varepsilon(\xi)\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} + 2\Omega^2(\xi - \eta)\right],$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \mu\pi_\xi. \tag{22}$$

Из (22) видно, что переменная η есть с точностью до константы время η: $\eta = \mu\varphi + \mathrm{const}$. Поэтому для медленной координаты ξ из (22) получаем следующее уравнение, описывающее нелинейное взаимодействие волн объемного заряда электронов и потенциального движения в поле силы Гапонова—Миллера:

$$\frac{d^2\xi}{d(\mu\varphi)^2} + \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{d\xi} + \Omega^2(\xi - \mu\varphi) = 0. \tag{23}$$

Проанализируем это уравнение подробнее. В случае $\varepsilon = 0$ (23) описывает колебание объемного заряда электронов. Действительно, дифференцируя (23) по $\mu\varphi$, найдем усредненное уравнение Гринберга, описывающее изменение медленной координаты электрона $\bar{\chi}$ под действием сил объемного заряда электронов, а также силы Гапонова—Миллера,

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\varphi^2} + (\bar{\omega}_e^2 + \bar{\omega}_f^2)\bar{\psi} = \bar{\omega}_e^2. \tag{24}$$

Здесь

$$\bar{\omega}_f^2 \equiv \frac{1}{4}\frac{d^2\varepsilon^2(\bar{\chi})}{d\bar{\chi}^2} \tag{25}$$

и имеет смысл квадрата нормированной частоты колебаний уединенного электрона в сверхвысокочастотной потенциальной яме с распределением поля $\varepsilon^2(\bar{\chi}) = 2\bar{\omega}_f^2\bar{\chi}^2$. Действительно, дифференцируя (1) дважды по φ, находим кинематическое уравнение колебаний медленной скорости электрона

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\varphi^2} + \bar{\omega}_f^2\bar{\psi} = 0, \tag{26}$$

где $\bar{\omega}_f^2$ определяется (25).

Таким образом, в рассмотренных приближениях слабонеоднородное в пространстве переменное электрическое поле приводит к локальному изменению частоты плазменных колебаний электронного потока на величину $\bar{\omega}_f^2(\bar{\chi})$, причем эта нелинейная поправка может принимать как положительное, так и отрицательное значение. В отсутствие внешнего поля $\varepsilon=0$ из (24) получаем обычное уравнение колебаний электронного потока в присутствии неподвижного компенсирующего ионного фона

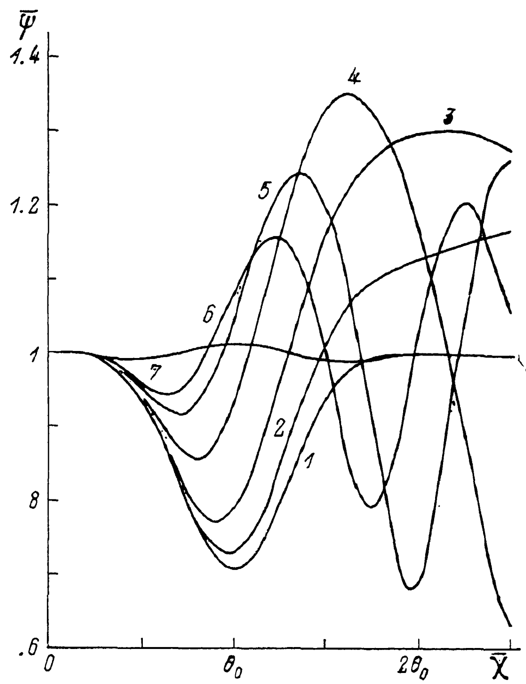
$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\varphi^2} + \bar{\omega}_e^2(\bar{\psi} - 1) = 0. \tag{27}$$

С другой стороны, умножая (23) на $d\xi/d\,(\mu\varphi)$, получаем

$$\frac{d}{d\bar{\chi}}\left(\bar{\psi}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) = 2\bar{\omega}_e^2(\varphi - \bar{\chi}). \tag{28}$$

Отсюда следует, что адиабатический инвариант (1) Гапонова—Миллера сохраняется лишь в отсутствие объемного заряда электронов $\bar{\omega}_e^2=0$.

В случае $\Omega\neq 0$ и $\varepsilon\neq 0$ движение электрона имеет сложный характер. Результаты численного решения уравнения (23) приведены на рис. 1, где на «медленной» фазовой плоскости показаны траектории электрона, влетающего в адиабатически слабонеоднородное поле открытого резонатора типа Фабри—Перо перпендикулярно его оси. Резонатор возбужден на простейшем типе колебания, пространственное распределение амплитуды поля вдоль электронного потока имеет форму гауссовской кривой ($\varepsilon_{max}=1$).



В отсутствие объемного заряда ($\Omega=0$) (кривая *1*) медленное движение носит потенциальный характер, график средней скорости определяется формой распределения амплитуды поля в резонаторе $\bar{\psi}=\sqrt{1-(1/2)\varepsilon^2(\bar{\chi})}$. При малых Ω (*2* — $\pi/4$, *3* — $\pi/2$), когда период колебания объемного заряда много больше времени прохождения электрона через поле волны, медленное движение электрона близко к потенциальному. В этом случае влияние объемного заряда к некоторому увеличению средней скорости в сравнении с кинематическим значением.

Этот же вывод можно сделать и из выражения (28). Действительно, при $\Omega \ll 1$ правая часть (28) мала во всем пространстве взаимодействия, следовательно, изменение значения инварианта (1) за счет действия сил объемного заряда электронов незначительно. Поэтому, согласно (1), средняя скорость электрона уменьшается при его влете в более сильное поле, разность $\varphi-\bar{\chi}$, а значит, и левая часть (28) положительны. Следовательно, величина выражения (1) растет по мере продвижения электрона в поле резонатора, что означает при заданной амплитуде поля увеличение средней скорости электрона в сравнении с кинематическим значением.

При больших Ω движение электронов определяется в первую очередь колебанием объемного заряда. При этом роль потенциальной силы Гапонова—Миллера сводится к раскачке равновесного состояния потока частиц и возбуждению колебаний электронного газа (*4* — $\Omega=\pi$, *5* — $\pi^2/2$, *6* — 2π, *7* — $3\pi^2/^2$).

Таким образом, приведенное выше краткое теоретическое рассмотрение усредненного движения электронов в переменном слабонеоднородном электрическом поле показало, что для достаточно плотных потоков объемный заряд существенно изменяет закон движения электронов по сравнению с кинематическим приближением. Последнее применимо лишь при $\Omega \leqslant 1$ или соответственно при плотности тока в потоке

$$j_0\ (\text{А/см}^2) \leqslant 10^{-6} U_0^{3/2}\ (\text{В})/d^2\ (\text{см}), \tag{29}$$

где U_0 — потенциал пучка, d — длина пространства взаимодействия.

Так, для $U_0=10$ кВ, $d=1$ см из (29) получаем, что инвариант (1) приблизительно сохраняется при условии $j_0 \leqslant 10$ А/см^2.

Список литературы

[1] *Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Крохин О. Н.* и др. Итоги науки и техники. Радиотехника. Т. 17. М.: ВИНИТИ, 1978. 298 с.

[2] *Исаев В. А., Соколов Д. В., Трубецков Д. И.* // Лекция по электронике СВЧ и радиофизике. VIII Зимняя школа-семинар инженеров. Саратов, 1989. Кн. 2. С. 3—36.

[3] *Маршалл Т. С.* Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987. 238 с.

[4] *Гапонов-Грехов А. В., Петелин М. И.* // Наука и человечество. Международный ежегодник. М., 1980. С. 282—297.

[5] *Шестопалов В. П.* Дифракционная электроника. Харьков: Вища школа, 1976. 232 с.

[6] *Миллер М. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 3. С. 110—123.

[7] *Литвак А. Г., Миллер М. А., Шолохов Н. В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т. 5. № 6. С. 1160—1170.

[8] *Ходжаев К. Ш., Чирков А. Г., Шаталов С. Д.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. № 6. С. 1036—1041.

[9] *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.; Л., 1948. 728 с.

[10] *Кацман Ю. А.* Вопросы теории многорезонаторных клистронов. М.: Связьиздат, 1958. 176 с.

[11] *Соколов О. Н., Штыров А. И.* // РЭ. 1966. Т. 11. № 6. С. 1092—1099.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 15 ноября 1990 г.