

01

© 1991 г.

## СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ С САМОИНДУКЦИЕЙ

*И. А. Митропольский, А. Г. Шугаев*

В квантовом и классическом случаях получены солитонные решения уравнений движения заряженных частиц в системе с индуктивной обратной связью. Показана возможность существования связанных состояний солитонов. Обсуждаются условия продольной фокусировки частиц, распространяющихся с разными начальными скоростями в нелинейной среде.

### Введение

Уединенные волны, или солитоны, — это стационарные импульсы, распространяющиеся в нелинейной среде с дисперсией [1]. Определяющим свойством солитона является динамический баланс между дисперсией и нелинейностью, благодаря которому возмущение распространяется, сохраняя свою форму. В настоящей работе рассматриваются нелинейные эволюционные уравнения,

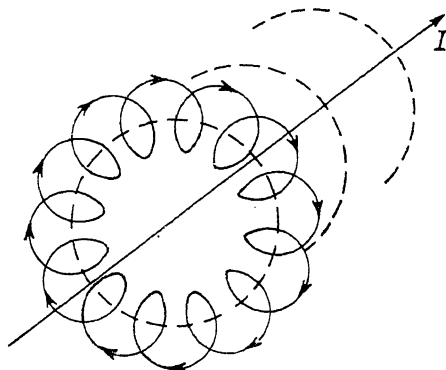


Рис. 1. Расположение тороидальных катушек, моделирующее нелинейную индуктивную среду.

описывающие распространение заряженных частиц. Дисперсия в этих уравнениях может иметь либо квантовый характер (расплывание волнового пакета), либо классический (разброс первоначальных скоростей). Нелинейность возникает при учете явления электромагнитной самоиндукции.

Моделью нелинейной среды может служить система короткозамкнутых тороидальных катушек, «наназанных» на траекторию частиц, схематически показанная на рис. 1. В такой геометрии изменение тока  $I$ , создаваемого заряженными частицами, вызывает максимальную действующую на них электродвижущую силу

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где  $L$  — коэффициент самоиндукции.

В дальнейшем конкретный способ введения в систему индуктивности не существен. Роль тороидальных катушек может играть любая распределенная вдоль траекторий частиц индуктивность подобно тому, как это имеет место в волноводах. Простота этой модели позволяет провести исследование аналитическими методами, а полученным результатам придать наглядный физический смысл.

### Нелинейное уравнение Шредингера

Рассмотрим одномерное движение вдоль оси  $x$  частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$  в системе с распределенной индуктивностью. Волновая функция  $\Psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right\} \Psi(x, t). \quad (2)$$

Согласно (1), действующий на частицу потенциал

$$U(x, t) = qL \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial t} j(x, t) dx, \quad (3)$$

где  $L$  — удельный коэффициент самоиндукции (индуктивность на единицу длины), определяется изменением квантово-механического тока

$$j(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} q \left\{ \Psi \frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(x, t) - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) \right\}, \quad (4)$$

создаваемого этой частицей. Система уравнений (2)–(4) является нелинейной. Задача состоит в отыскании ее солитонных решений.

Для решений типа бегущей волны воспользуемся подстановкой

$$\Psi(x, t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ mvx - \left( \frac{mv^2}{2} - \omega \right) t \right] \right\} \varphi(x - vt). \quad (5)$$

Уравнение (2) переходит при этом в так называемое стационарное нелинейное уравнение Шредингера [2]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' - q^2 Lv^2 \varphi^3 = -\omega \varphi. \quad (6)$$

В отличие от линейной теории это уравнение не является задачей на собственные значения. Энергетический параметр  $\omega$  определяется из условия нормируемости волновой функции

$$\omega = \hbar^2 / 2m\Delta^2. \quad (7)$$

Нормированное на единицу решение уравнения (6) имеет вид уединенной волны

$$\varphi(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \operatorname{ch}^{-1} \{ (x - vt) / \Delta \}, \quad (8)$$

ширина которой

$$\Delta = 2\hbar^2 / mv^2 q^2 L \quad (9)$$

зависит от параметров системы и скорости распространения  $v$ .

Благодаря динамическому балансу между нелинейностью (параметр  $q^2 L$ ) и дисперсией (параметр  $\hbar^2 / 2m$ ) волновой пакет, соответствующий движущейся частице, не расплывается, что позволяет назвать его солитоном. Скорость солитона  $v$  имеет смысл групповой скорости пакета (скорость переноса массы), которая не совпадает с фазовой скоростью (скорость постоянной фазы волновой функции)

$$u = \frac{v}{2} \left\{ 1 - \frac{\hbar^2}{2m} \left/ \left( \frac{mv^2}{2} \Delta^2 \right) \right. \right\}. \quad (10)$$

Уравнение движения (2) может быть получено варьированием лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} i\hbar \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{2q^2 L} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial t} \Psi^* \Psi \quad (11)$$

относительно полей  $U$  и  $\psi$ ,  $\psi^*$  (электромагнитное поле  $U$  рассматривается классически) с учетом уравнения непрерывности

$$q \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

связывающего плотность  $\rho(x, t) = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$  с током (4). Для решения (5) плотность энергии и импульса, полученные из (11) на основе теоремы Нетер, имеют следующий вид:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{3\Delta^2},$$

$$P = mv + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4}{3v\Delta^2}. \quad (13)$$

Полная энергия кроме кинетической

$$T = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi dx = \frac{mv^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{3\Delta^2}, \quad (14)$$

содержит потенциальную

$$U = \frac{\hbar^2}{2m} (1/3\Delta^2),$$

равную энергии, запасенной в индуктивности. Поэтому скорость солитона  $v$  всегда меньше скорости свободно движущейся частицы с той же полной энергией. Это можно выразить в терминах эффективной массы

$$m^* = m \left( 1 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4}{3mv^2\Delta^2} \right). \quad (15)$$

Если положение центра тяжести солитона можно сопоставить с классической координатой частицы, то его ширина  $\Delta$  является квантовой характеристикой. Задавшись ее величиной, можно оценить индуктивность  $L$ . Для этого можно, например, приравнять  $\Delta$  дебройлевской длине волны свободной частицы, т. е. положить  $\Delta = \hbar/\sqrt{2mE}$ . Результаты такой оценки, полученной с помощью формул (9) и (13), для электронов и протонов с несколькими энергиями приведены в таблице.

Значения удельной индуктивности в Гн/см, обеспечивающие дебройлевскую ширину солитона

Энергия	Электрон	Протон
1 эВ	$0.41 \cdot 10^{-3}$	$114 \cdot 10^{-3}$
1 кэВ	$13 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
1 МэВ	$0.41 \cdot 10^{-6}$	$0.11 \cdot 10^{-3}$

### Связанные состояния двух солитонов

Индуктивная обратная связь может приводить к режиму распространения частиц, отвечающему связанным состояниям солитонов. Аналитическими средствами можно рассмотреть случай слабо взаимодействующих солитонов, когда в каждый момент времени общее поле мало отличается от суперпозиции полей отдельных солитонов [3].

В системе с самоиндукцией каждая частица своим током создает бегущее поле, напряженность которого, учитывая уравнение непрерывности (12), можно выразить через плотность

$$\varepsilon(x) = qLv^2 \frac{\partial}{\partial x} \rho(x). \quad (16)$$

Таким образом, если плотности частиц перекрываются, то возникает взаимодействие, которое имеет характер притяжения (кулоновским расталкиванием пока пренебрегаем). Вообще говоря, силы, действующие между солитонами в нелинейной среде, несимметричны. Сила, действующая на первый солитон со стороны второго,

$$F_1(\xi) = q^2Lv_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x - \xi) \frac{\partial}{\partial x} \rho_2(x) dx = q^2Lv_2^2 f(\xi) \quad (17)$$

зависит только от расстояния между ними  $\xi = x_1 - x_2$  и пропорциональна квадрату скорости второго солитона  $v_2$ .

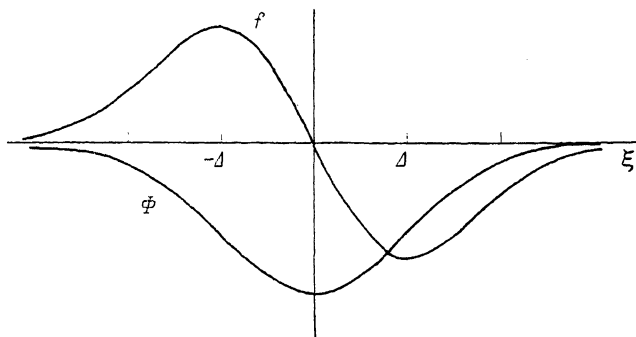


Рис. 2. Сила  $f$  и потенциал  $\Phi$  взаимодействия между солитонами на больших расстояниях.

Классические уравнения движения солитонов

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(\xi) = q^2Lv_2^2 f(\xi), \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(\xi) = -q^2Lv_1^2 f(\xi) \end{aligned} \quad (18)$$

интегрируются после перехода к координатам их центра масс  $X = (x_1 + x_2)/2$ . Решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= C_x \exp\{g\Phi(\xi)\}, \\ \dot{\xi}^2 &= C_\xi \exp\{-g\Phi(\xi)\} - \frac{4}{3} C_x^2 \exp\{2g\Phi(\xi)\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $g = q^2L/m$ , а функция  $\Phi(\xi) = - \int_{-\infty}^{\xi} f(x) dx$  является потенциалом взаимодействия солитонов на больших расстояниях. Его вид и вид функции  $f(\xi)$  при  $\Delta_1 \approx \Delta_2 = \Delta$  показан на рис. 2.

Константы  $C_x$  и  $C_\xi$  в (19) определяются начальными условиями

$$\dot{X}(0) = V, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \dot{\xi}(0) = u, \quad (20)$$

где  $V$  — начальная скорость центра масс частиц,  $\xi_0$  — начальное расстояние между ними,  $u$  — скорость относительного движения.

Связанному состоянию солитонов отвечает финитное движение по относительной координате. Так как  $\Phi(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , то при  $C_\xi < 4C_x^2/3$  движение ограничено точками поворота, в которых исчезает квадрат относительной скорости (второе равенство (19)). Таким образом, связанное движение со-

литонов осуществляется только для относительных скоростей  $u$ , ограниченных в зависимости от начальной скорости  $V$  и параметров системы

$$u^2 < u_0^2 = \frac{4}{3} V^2 \{ \exp[-3g\Phi(\xi_0)] - 1 \}. \quad (21)$$

Учет кулоновского расталкивания усиливает это требование

$$u^2 < u_0^2 - 4q^2/m\xi_0. \quad (22)$$

Для квантового описания связанных состояний солитонов вместо (18) следовало бы решать двухчастичное уравнение Шредингера, вытекающее из лагранжиана (11). Точное решение этой задачи может быть найдено численно. На качественном уровне связанному состоянию квантовых солитонов отвечает существование дискретных уровней с отрицательной энергией в потенциале  $\Phi(\xi)$ , который можно аппроксимировать потенциалом Пешля—Теллера  $\Phi(0) \text{ch}^{-2}(\xi/a)$ . В этом потенциале всегда есть по крайней мере один дискретный уровень (см., например, [4]). Этим доказывается существованием связанных состояний двух солитонов в квантовом случае.

Связанные состояния солитонов отвечают так называемым бионам [5]. При этом каждый солитон осциллирует около общего центра масс. Его скорость меньше скорости свободных солитонов, так как часть их кинетической энергии переходит в энергию осцилляций. За счет этого компенсируется пространственная дисперсия частиц, вызванная разбросом их начальных импульсов.

### Нелинейное уравнение Лиувилля

Решение типа уединенных волн возникает также при классическом описании движения сгустка заряженных частиц в системе с самоиндукцией. Пренебрегая кулоновским взаимодействием, распространение сгустка можно описать посредством одночастичного уравнения Лиувилля

$$\frac{v\rho_N}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \rho_N}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \rho_N}{\partial p} = 0. \quad (23)$$

Здесь  $U(x)$  — потенциал внешней силы,  $\rho_N(p, x, t)$  определяет плотность частиц в точке фазового пространства  $(p, x)$  в момент времени  $t$ . Удобнее перейти к фазовой плотности  $\rho = \rho_N/N$ , нормированной на единицу. Как и ранее, в системе с самоиндукцией действующая на частицы сила

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -qL \frac{\partial I}{\partial t} \quad (24)$$

вызывается изменением тока

$$I(x, t) = N \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} p\rho(p, x, t) dp, \quad (25)$$

который создается всеми частицами. Подставляя это выражение для тока в уравнение (23), получим нелинейное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \rho}{\partial x} - G \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\partial \rho}{\partial t} dp = 0 \quad (26)$$

для фазовой плотности, где силовая константа  $G = Nq^2L/m$  по-прежнему составлена из заряда  $q$  и массы  $m$  частиц, удельного коэффициента самоиндукции  $L$ , но пропорциональна полному числу  $N$  частиц в сгустке.

Уединенной волне, движущейся со скоростью  $v$ , отвечает решение  $\rho(p, x, t) = \rho(p, x - vt)$ , удовлетворяющее уравнению

$$\left(\frac{p}{m} - v\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + Gv \frac{\partial \rho}{\partial p} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\partial \rho}{\partial x} dp = 0. \quad (27)$$

Переходя к переменной  $\bar{p} = p - mv$  и вводя обозначение

$$\rho(p, x) = \rho(\bar{p} + mv, x) = w(\bar{p}, x), \quad (28)$$

получаем окончательное уравнение для уединенной волны (тильду в дальнейшем можно опустить)

$$\frac{p}{m} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial p} = 0, \quad (29)$$

в котором потенциал

$$U(x) = -Gv \int_{-\infty}^{\infty} (p + mv) w(p, x) dp. \quad (30)$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$w(p, x) = \varphi\left(\frac{p^2}{2m} + U(x)\right), \quad (31)$$

где  $\varphi(x)$  — произвольная функция.

Подставляя его в определение потенциала (30), можно найти потенциал  $U(x)$  по заданной  $\varphi$

$$U(x) = -Gmv^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{p^2}{2m} + U(x)\right) dp. \quad (32)$$

Удобнее, однако, искать  $\varphi$  как функцию потенциала  $U$ . Так как уединенной волне должно соответствовать локализованное решение, то  $\varphi$  можно искать в следующем виде:

$$\varphi\left(\frac{p^2}{2m} + U\right) = f\left(\frac{p^2}{2m} + U\right) \theta\left(-\frac{p^2}{2m} - U\right), \quad (33)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция.

Смысл такого решения очевиден: сгусток состоит из частиц, которые не могут выйти из потенциальной ямы  $U(x) < 0$ . После подстановки выражения (33) в интегральное уравнение (32) его решение

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2m} Gmv^2} \sqrt{-x} \quad (34)$$

позволяет найти плотность (31)

$$w(p, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2m} Gmv^2} \sqrt{-\frac{p^2}{2m} - U(x)} \theta\left(-\frac{p^2}{2m} - U(x)\right). \quad (35)$$

Заметим, что потенциал  $U(x)$  определяет пространственную плотность частиц в сгустке

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(p, x) dp = -\frac{1}{Gmv^2} U(x). \quad (36)$$

При этом функция  $U(x) < 0$  произвольна, ограничением на нее служит условие нормировки

$$\int w(p, x) dp dx = -\frac{1}{Gmv^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx = 1. \quad (37)$$

Ее произвольность не означает, однако, что любой сгусток будет распространяться через систему с самоиндукцией в виде уединенной волны. Солитонами являются лишь те сгустки, импульсное распределение в которых связано с пространственной плотностью формулой (35). Например, сгусток с максвелловским распределением частиц в силу независимости пространственного и импульсного распределений не образует уединенной волны и расплывается в процессе эволюции.

Характер многочастичного решения подобен одночастичному: все частицы осциллируют в среднем поле солитона. Интересной особенностью является то, что полное число частиц  $N$  входит в константу эффективного взаимодействия  $G$ . Это приводит к возможности усиления солитонных свойств распространяющихся сгустков заряженных частиц при увеличении их числа. В частности, растет мощность потенциала среднего поля, что ведет к увеличению степени пространственной локализации частиц в сгустке.

### Заключение

В этой работе исследована возможность существования солитонных решений, описывающих распространение частиц в нелинейной среде с дисперсией. Любое решение линеаризованной системы уравнений (2)–(4) представимо в виде ряда по целым степеням  $L$ , в то время как солитонное решение (8) содержит фактор  $\sqrt{L}$ . Следовательно, оно принципиально не может быть получено в линейном подходе. Это является следствием общего утверждения об отсутствии предельного перехода по константе взаимодействия к линейной теории [6].

Предложенная модель нелинейной среды с дисперсией, основанная на явлении электромагнитной самоиндукции, допускает аналитическое исследование солитонных свойств возникающих решений. В этой работе сделаны первые шаги в этом направлении. На наш взгляд, в подобных моделях могут быть количественно изучены многие интересные детали динамики солитонов как аналитическими, так и численными методами. Чрезвычайно интересной была бы прямая экспериментальная проверка полученных здесь результатов.

В заключение нам приятно поблагодарить участников семинаров, где докладывалась эта работа, за доброжелательную критику.

### Список литературы

- [1] Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. // УФН. 1971. Т. 103. № 2. С. 193–232.
- [2] Захаров В. Е., Макаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 134 с.
- [3] Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 2. С. 585–593.
- [4] Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. С. 106.
- [5] Маханьков В. Г. // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. Вып. 1. С. 123–180.
- [6] Филиппов А. Т. // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. Вып. 4. С. 735–801.

Поступило в Редакцию  
9 июля 1990 г.