КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

07
Журнал технической физики, т. 61, в. 9, 1991

КОЛЬЦО ФУРЬЕ С ПОДВИЖНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ δ-ИСТОЧНИКОМ

С. В. Клецкий

Принято считать, что основы современной математической физики были заложены Фурье при изучении нагрева тонкого кольца неподвижным точечным источником (задача о кольце Фурье) (см., например, [1]). Естественное и важное в прикладном отношении обобщение этой задачи на случай периодического движения источника по периметру кольца еще не рассматривалось, а между тем оно имеет замечательное точное решение, не встречавшееся ранее в других задачах теплопроводности и диффузии. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{a}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{q}{c\rho\Delta r}\delta_{2\pi}(\varphi-\omega t), \tag{1}$$

$$t>0,\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

$$T(\varphi,\ t=0)=0, \tag{2}$$

$$T(\varphi=-\pi,\ t)=T(\varphi=+\pi,\ t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(\varphi=-\pi,\ t)}{\partial\varphi}=\frac{\partial T(\varphi=+\pi,\ t)}{\partial\varphi}. \tag{4}$$

Здесь T — абсолютная температура, t — время, φ — угловая координата, a — коэффициент температуропроводности материала кольца, c — коэффициент его теплоемкости, ρ — плотность, R — радиус кольца, Δr — его толщина ($\Delta r\ll R$), q — мощность источника, ω — угловая скорость его вращения. Периодическую (с периодом 2π) δ-функцию запишем в виде [2]

$$\delta_{2\pi}(\varphi-\omega t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(\varphi+2\pi k+\pi-\omega t). \tag{5}$$

Переходя к безразмерным переменным $\tau=\omega t$ и $v=c\rho\Delta r\,\omega T/q$ и выполняя преобразование Лапласа по времени $y=\int\limits_0^\infty\exp(-p\tau)v(\varphi,\ \tau)\,d\tau$, получим

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}+h^2y+\frac{1}{B}\frac{\exp(-p(\varphi+\pi))}{1-\exp(-2\pi p)}=0, \tag{6}$$

$$y(\varphi=-\pi)=y(\varphi=+\pi),\quad y'(\varphi=-\pi)=y'(\varphi=+\pi), \tag{7}$$

где $B=a/\omega R^2$, $h^2=-(p/B)$.

Решение задачи в изображениях можно представить в виде

$$y=y_1+y_2+y_3=-\frac{1}{2B(p^2+h^2)}\left[\frac{\sin h\varphi}{\sin h\pi}+\frac{p\cos h\varphi}{h\sin h\pi}+\frac{\exp(-p(\varphi+\pi))}{1-\exp(-2\pi p)}\right]. \tag{8}$$

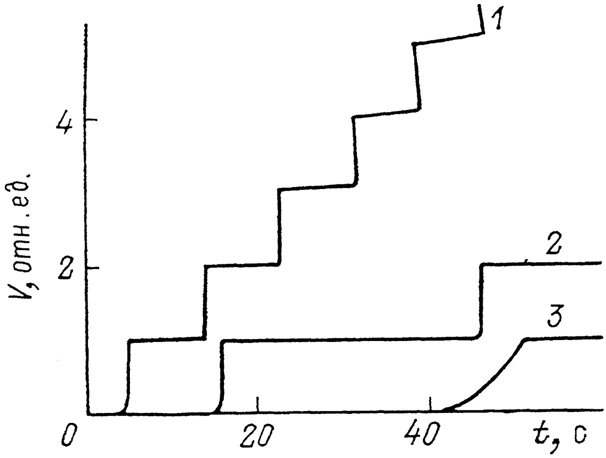
Все члены этого решения имеют простые полюса $p=1/B$ (сумма их вычетов равна нулю) и полюса второго порядка $p=0$. Кроме того, два первых члена имеют простые полюса $p=-Bk$, где $k=1,\ 2,\ \ldots$ Переход к оригиналам для функций y_1 и y_2 осуществляется с помощью теоремы разложения. Оригинал для функции y_3 определим, используя теорему умножения изображений

$$\frac{1}{p-1/B} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p\,(1-e^{-2\pi p})}$$

и после вычисления интеграла свертки теорему запаздывания. Тогда точное решение исходной задачи можно представить в виде

$$v(\varphi,\ t)=\frac{\varphi-B}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\exp(-Bk^2\tau)}{k\,(B^2k^2+1)}(\sin k\varphi-Bk\cos k\varphi)+\left[\frac{\tau-\varphi-\pi}{2\pi}\right]+1+$$
$$+\frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{B}\left(1-\left\{\frac{\tau-\varphi-\pi}{2\pi}\right\}\right)\right)}{1-\exp(2\pi/B)}. \tag{9}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть числа, фигурные — дробную часть числа. Если два первых члена в этом решении имеют обычный «диффу-



Изменение относительной температуры точки $\varphi=0$ кольца во времени для трех различных угловых скоростей движения δ-источника.

ω, 1/с: *1* — 0.7, *2* — 0.2, *3* — 0.06.

зионный» вид, то последующие разрывные члены ранее не встречались в задачах математической физики и не содержатся в перечне известных типов точных решений линейных параболических уравнений [1]. Экспоненциальный член с периодическим показателем («периодическая» экспонента) описывает изменение температуры данной точки на интервале времени между двумя последовательными контактами с подвижным источником. Целочисленный член, нумерующий число контактов с течением времени, обеспечивает подъем каждого экспоненциального участка решения на единицу относительной температуры. На больших временах сумма этих разрывных членов полностью определяет непрерывное решение задачи в виде бесконечной последовательности «состыкованных» экспонент

$$v(\varphi,\ \tau\to\infty)\sim\left[\frac{\tau-\varphi-\pi}{2\pi}\right]+\frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{B}\left(1-\left\{\frac{\tau-\varphi-\pi}{2\pi}\right\}\right)\right)}{1-\exp(-2\pi/B)}.$$

Характерный вид изменения относительной температуры точки $\varphi=0$ во времени для трех различных значений угловой скорости ω приведен на рисунке ($B=0.01$). Видно, что увеличение угловой скорости приводит к более интенсивной периодической подкачке энергии и, следовательно, более быстрому повышению средней температуры кольца. Кроме того, с ростом ω температурные зависимости приобретают все более «целочисленный» вид, определяемый относительным увеличением показателя «периодической» экспоненты. Для значения $\omega \geqslant 0.7$ 1/с угол «стыковки» между соседними экспоненциальными участками практически не отличается от прямого.

Возможны различные физические интерпретации рассмотренной задачи. Это, например, качение цилиндрических тел по греющей плоскости, тепловые расчеты разнообразных физико-технических устройств, диффузия неравновесных носителей в кольцевой полупроводниковой пленке, облучаемой «скользящим» по ней лазерным пучком, и др.

В заключение автор приносит благодарность А. А. Серикову за полезное обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Карслоу Х. С., Егер Д. К.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 427 с.
[2] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

Институт полупроводников АН УССР
Киев

Поступило в Редакцию
4 декабря 1990 г.

03; 04

Журнал технической физики, т. 61, в. 9, 1991

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УДАРНО НАГРЕТОЙ ПЛАЗМЫ В РЕЖИМЕ РАЗВИТИЯ В НЕЙ ПЕРВОГО ТИПА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Г. К. Тумакаев, З. А. Степанова, П. В. Григорьев

Первый тип неустойчивости ударно нагретой плазмы [1] развивается в узком диапазоне изменения интенсивности падающей ударной волны: в ксеноне при $M \sim 8.3 \pm 0.5$ [2, 3], в аргоне это явление наблюдалось при $M \sim 10.5$ [4]. Для рассматриваемого процесса характерно строго периодическое изменение интенсивности излучения ударно нагретой плазмы в релаксационной зоне потока с глубоким уровнем модуляции амплитуды сигнала ($\Delta A \sim 40$ %) и частотой колебания $F \sim 30$ кГц, причем в экспериментах не обнаружено различие в характере изменения интенсивности излучения в спектральных линиях и континууме видимого и ИК диапазонов длин волн. Природа развития неустойчивости ударно нагретой плазмы до настоящего времени неясна.

В результате проведенных исследований впервые одновременно получена информация об изменении интенсивности излучения плазмы и данные о распределении концентрации электронов и плотности газа в потоке за фронтом ударной волны в режиме развития неустойчивости первого типа ударно нагретой плазмы ксенона.

Исследования проведены в диапазоне изменения чисел Маха падающей ударной волны от 6.5 до 8.6. Начальное давление ксенона перед ударной волной в обсуждаемой серии экспериментов оставалось неизменным и равным $P = 16.7$ Тор. Парциальное давление примесных добавок молекулярных газов не превышало $5 \cdot 10^{-4}$ Тор. Эксперименты производились на ударной трубе с цилиндрическим каналом камеры низкого давления. Диаметр внутреннего сечения трубы 100 мм. Степень предварительной откачки системы $5 \cdot 10^{-5}$ Тор. Примесные добавки, а также следы остаточных газов перед каждым экспериментом перемешивались с исследуемым газом путем многократной прокачки смеси в закольцованном тракте с помощью двуроторного компрессора. Измерительное сечение расположено в 40 калибрах от диафрагмы, разделяющей камеры низкого и высокого давлений.

Для определения концентрации нормальных атомов (плотности) и электронов в потоке за фронтом ударной волны использовался двухволновой ла-