

## ФРАКТАЛЬНЫЙ КОНТАКТ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Ф. М. Бородич, А. Б. Мосолов

Рассматривается контакт шероховатого штампа с гладкой полуплоскостью, деформирующейся по упругому и пластическому законам. Шероховатость штампа моделируется фрактальной поверхностью. Для фрактальной поверхности, построенной на основе канторова множества, получены точные решения задач о внедрении штампа и найдены степенные асимптотики, связывающие глубину внедрения и действующую силу. Выявлена связь показателей степени с фрактальными характеристиками (размерностями) поверхности и отпечатка.

Контакт реальных твердых тел практически всегда является дискретным, и площадь фактического касания составляет лишь малую долю номинальной площади. Параметры области фактического контакта существенно зависят от извилистости и шероховатости контактирующих поверхностей. Вопрос о влиянии шероховатости на характеристики контактного взаимодействия привлекает широкое внимание [1-3]. Возникающие при этом проблемы связаны с тем, что точное аналитическое решение контактных задач теории упругости и пластичности известно только для тел, имеющих правильную геометрическую форму. Учет шероховатости поверхности приходится проводить исходя из более или менее простых моделей шероховатой поверхности.

В последние годы было обнаружено, что поверхность многих тел обладает фрактальными свойствами [4]. Фракталом является поверхность многих пористых и керамических тел [5], поверхность горных пород [6], поверхность трещин [7] и т. д. На рис. 1 построена зависимость длины профиля поверхности металлов, обработанных на плоскошлифовальном станке, от масштаба измерения. Приведенные данные свидетельствуют о том, что шероховатая поверхность металла является фракталом, причем размерность фрактала зависит от чистоты обработки.

Определить фрактальную размерность поверхности можно на основе результатов адсорбции [8], анализа профилограмм, островного метода Мандельброта [7], изучая электрический отклик поверхности на переменном токе и ма-лоугловое рассеяние нейтронов [9] и многими другими способами.

Фрактальность поверхности твердых тел, разумеется, будет оказывать существенное влияние на их контактные свойства, в частности на характер зависимости деформации микронеровностей от величины сжимающих нагрузок.

Экспериментально было установлено [3], что зависимость между сжимающими усилиями и деформацией микронеровностей носит существенно нелинейный характер и может быть аппроксимирована степенной функцией. С учетом этого факта Л. А. Галиным была впервые сформулирована нелинейная постановка контактной задачи для шероховатых упругих тел. В этой постановке контактная деформация шероховатостей под действием давления аппроксимировалась степенной функцией.

В настоящей работе показано, что степенной характер зависимости между сжимающими нагрузками и деформациями является следствием предположения о фрактальности поверхности контактирующих тел.

Простейшая модель фрактальной поверхности может быть основана на канторовом множестве [10]. Соединив друг с другом отрезки, получающиеся на последовательных стадиях построения канторова множества, получим объект,

представленный на рис. 2. На каждой последующей стадии построения этого множества из каждого исходного отрезка выбрасывается средняя часть, так что суммарная длина оставшихся отрезков составляет  $1/c$  от длины исходного ( $c > 1$ ), а глубина впадин (отсчитываемая от верха структуры), получающихся на  $n+1$  шаге построения фрактальной структуры, в  $f$  раз меньше ( $f \geq 1$ ) глубины впадин, возникших на  $n$ -м шаге. В направлении, перпендикулярном плоскости страницы, будем считать поверхность гладкой (это не очень существенное ограничение и при желании можно построить канторову поверхность, фрактальную и в направлении, перпендикулярном плоскости страницы).

Может сложиться впечатление, что рассматриваемая модель поверхности совершенно нереалистична. Конечно, нет никаких надежд на то, что шероховатость поверхности реального тела будет описываться канторовым множеством.

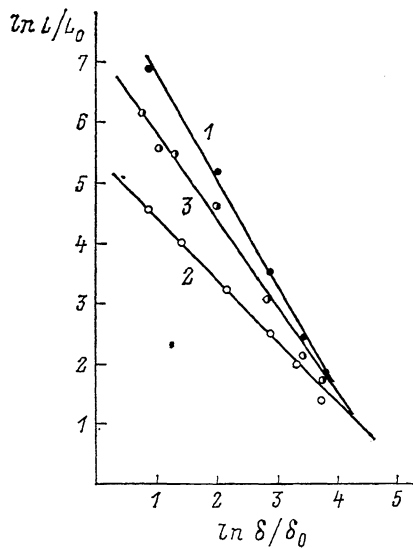


Рис. 1. Зависимость длины профиля  $L$  поверхности стали, обработанной на плоскошлифовальном станке, от масштаба измерения  $\delta$ .

1 — 9-й класс точности; 2, 3 — доводка, 10-й и 14-й классы (по данным работы [8]) соответственно. Соответствующие размерности (контура) равны  $D=1.8$  (1),  $1.5$  (2),  $1.0$  (3) (графики построены для относительных длин  $L/L_0$ ,  $\delta/\delta_0$ ).

Рис. 2. Фрактальная поверхность, построенная на основе канторова множества для  $c=3/2$ ,  $f=3/2$ .

Показан 3-й шаг итерационного построения,  $D_f = \ln 4 / \ln 3$ .

В данной работе такая модель выбрана для того, чтобы иметь возможность получить точные аналитические решения контактных задач. Однако вполне может случиться, что описанная модель поверхности все же не столь далека от действительности. Результаты изучения фактической площади контакта полированных металлических поверхностей показывают, что на поверхности металла имеется множество параллельных царапин разной глубины с резкими зазубренными краями [2, 3, 11].

Рассматривая фрактальную модель поверхности, предполагаем, что царапины самоподобны.

В дальнейшем мы будем интересоваться вдавливанием штампа с построенной выше канторовой поверхностью в гладкое полупространство, как это показано на рис. 3. Поэтому представляет интерес исследовать поверхность штампа с точки зрения фрактальной геометрии.

Прежде всего ясно, что фракталом является «отпечаток» штампа на полупространстве. Этот фрактал получается в результате прямого произведения канторова множества с размерностью  $D_c = \ln 2 / \ln 2c$  и прямой (или отрезка). Таким образом, размерность отпечатка  $D_0 = 1 + D_c$ .

Выясним теперь, является ли фракталом поверхность штампа. Для этого вычислим длину контура штампа (рис. 2). Длина контура после  $n$  итераций равна

$$L_{(n)} = L + 2h \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q = \frac{2}{f},$$

где  $L$  — ширина штампа,  $h$  — глубина наибольшей впадины на поверхности штампа.

Очевидно, что при  $q < 1$  длина контура конечна ( $L_{(n)}$  стремится к конечному пределу при возрастании  $n$ ), следовательно, только при  $f \leq 2$  ( $q \geq 1$ ) контур штампа будет фракталом. Нетрудно определить размерность этого фрактала  $D_f$ . Действительно, при  $f < 2$  и достаточно больших  $n$

$$L_{(n)} \sim \frac{2h}{q-1} q^{n+1}.$$

Следовательно,

$$L_{(n+1)}(\delta_{n+1}) = qL_{(n)}(\delta_n), \quad \delta_{n+1} = \frac{1}{2c} \delta_n, \quad (1)$$

где  $\delta_n$  — масштаб измерения.

Из (1) следует, что

$$D_f = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2c} - \frac{\ln f}{\ln 2c} = 1 + D_c - \frac{\ln f}{\ln 2c} \leq 2.$$

Размерность всей фрактальной поверхности будет, очевидно, равна  $D_s = 1 + D_f$ .

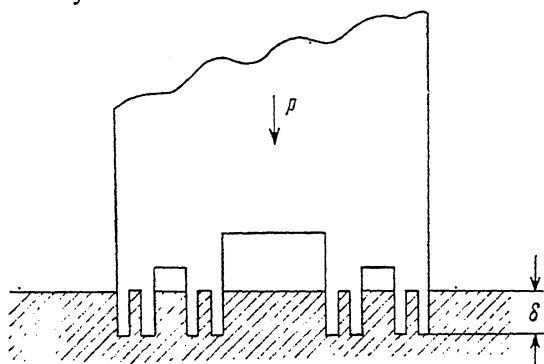


Рис. 3. Вдавливание фрактального жесткого штампа в гладкое полупространство.

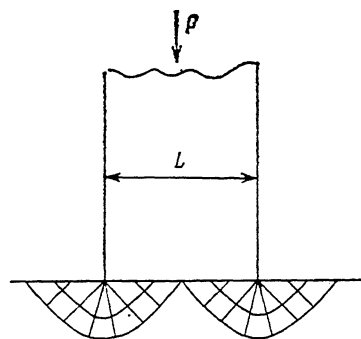


Рис. 4. Решение Р. Хилла для задачи о вдавлении жесткого плоского штампа в жестко-пластическую среду [12].

Перейдем теперь к задачам о вдавлении фрактального штампа в полупространство. Рассмотрим сначала пластическую задачу, используя для полупространства модель жесткопластического тела с пределом пластичности при сдвиге  $\tau_y$ . При решении задачи о вдавлении фрактального штампа мы будем широко использовать решение Хилла для штампа с плоским основанием [12]. Это решение показано на рис. 4, предельная нагрузка (на единицу длины штампа) равна

$$P_* = \tau_y L (2 + \pi).$$

Предположим, что каждый выступ поколения  $n$  нашего фрактального штампа работает как плоский штамп Хилла. Для того чтобы исключить взаимное влияние выступов одного поколения друг на друга, нужно считать, что  $c > 3/2$ .

Пусть  $P_{n+1}$  — предельная нагрузка для выступов  $n+1$ -го поколения. Будем считать, что при ее достижении штамп вдавливается в полуплоскость на величину  $\Delta \delta_{n+1}$ , равную разности высот выступов  $n$ -го и  $n+1$ -го поколений. Принятых предположений достаточно для того, чтобы определить зависимость предельной нагрузки  $P$  от глубины вдавливания  $\delta$ .

Воспользуемся тем обстоятельством, что при увеличении предельной нагрузки с  $P_{n+1}$  до  $P_*$  штамп вдавливается на величину  $\Delta \delta_{n+1}$ . Нетрудно получить следующие зависимости:

$$\Delta P_{n+1} = P_n - P_{n+1} = \tau_Y (2 + \pi) (L_n - L_{n+1}) = \tau_Y (2 + \pi) (c - 1) L \left(\frac{1}{c}\right)^{n+1}, \quad L_n = \left(\frac{1}{c}\right)^n L,$$

$$\Delta \delta_{n+1} = \delta_n - \delta_{n+1} = H \left(\frac{1}{f}\right)^{n+1} (f - 1), \quad H = h \cdot f,$$

$$\frac{\Delta P_{n+1}}{\Delta \delta_{n+1}} = \tau_Y (2 + \pi) \frac{c - 1}{f - 1} \frac{L}{H} \left(\frac{f}{c}\right)^{n+1}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\delta_n = H \left(\frac{1}{f}\right)^n, \quad (3)$$

из (2) и (3) получим, что в пределе  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{dP}{d\delta} = \tau_Y (2 + \pi) \frac{c - 1}{f - 1} \frac{L}{H} \left(\frac{\delta}{H}\right)^{\frac{\ln c}{\ln f} - 1}.$$

Следовательно, зависимость силы  $P$  от сближения  $\delta$  штампа со средой имеет вид

$$P = P_* \frac{c - 1}{f - 1} \frac{\ln f}{\ln c} \left(\frac{\delta}{H}\right)^\alpha, \quad (4)$$

где показатель  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{\ln c}{\ln f} = \frac{1 - D_c}{1 + D_c - D_f}.$$

При пластическом вдавливании шероховатых тел показатель степени  $\alpha < 1$  [3]. В нашем случае это условие будет выполнено, если  $3/2 \leq c < f \leq 2$ .

Рассмотрим теперь задачу о вдавливании фрактального штампа в упругой постановке. К сожалению, получить аналитическое решение этой задачи в замкнутом виде в рамках традиционной теории упругости пока не удастся. Однако можно построить точное решение для упрощенной модели упругого полупространства. Выберем в качестве такой модели винклеровское основание [13].

Еще в 1801 г. Н. И. Фуссом была предложена модель, в которой упругое основание заменялось вертикальными, непрерывно расположенными упругими стержнями (пружинами) [14]. Считается, что жесткость этих пружин определяет работу упругого основания на сжатие. Обычно такая модель называется моделью Винклера—Фусса.

Позднее [15, 16] была предложена комбинированная модель, представляющая собой обычное упругое полупространство, покрытое слоем винклеровских пружин. В [16] было отмечено, что так можно моделировать контактное взаимодействие шероховатых упругих тел. Эта комбинированная модель нашла широкое применение при рассмотрении ряда задач [13, 17]. В частности, в [13] асимптотическими методами показано, что в случае, когда упругое полупространство покрыто тонким упругим слоем (работающим по типу пластинок Кирхгофа—Лява), жесткость которого соизмерима или меньше жесткости полупространства, тонкое покрытие в ряде задач может работать подобно слою винклеровских пружин.

Итак, будем рассматривать вдавливание фрактального штампа в винклеровское основание. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем

$$\begin{aligned} \Delta P_{n+1} &= P_n - P_{n+1} = EL_n \Delta \delta_{n+1}, \\ \Delta P_{n+1} / \Delta \delta_{n+1} &= EL (1/c)^n, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E$  — жесткость винклеровских пружин.

Учитывая формулу (3), в пределе при  $n \rightarrow \infty$  из (5) получим

$$\frac{dP}{d\delta} = EL \left(\frac{\delta}{h}\right)^{\ln c / \ln f}$$

или

$$P = \frac{EhL}{1 + \frac{\ln c}{\ln f}} \left(\frac{\delta}{h}\right)^\beta, \quad (6)$$

где

$$\beta = \frac{2 - D_f}{1 + D_c - D_f} > 1.$$

Отметим, что нелинейная зависимость (6) получена без предположения о нелинейной податливости основания, только исходя из предположения о фрактальности шероховатости штампа.

Таким образом, при сдавливании шероховатых штампов с фрактальной поверхностью получены асимптотические степенные законы (4) и (6) для зависимости нагрузки от глубины вдавливания. Показатели  $\alpha$  и  $\beta$  в этих законах явно зависят от фрактальных размерностей «отпечатка» и контура штампа. При этом для начального («упругого») сближения показатель  $\beta$  лежит в интервале  $1 < \beta < 2$ , а при «пластическом» сближении  $0 < \alpha < 1$ . Такая смена изгиба кривой согласуется с имеющимися экспериментальными данными (например, данные по экспериментам на свинце [3]).

Область применимости полученных асимптотик ограничена областью применимости фрактальной модели  $\delta \ll h$ .

### Список литературы

- [1] Бюден Ф. П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. 543 с.
- [2] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
- [3] Демкин Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М., 1962. 111 с.
- [4] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. San. Francisco: Freeman, 1982.
- [5] Мосолов А. Б., Динариев О. Ю. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1679—1685.
- [6] Katz A. J., Thompson A. H. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 12. P. 1325—1328.
- [7] Mandelbrot B. B., Passoja D. E., Paullay A. J. // Nature. 1984. Vol. 308. N 4. P. 721—722.
- [8] Pfeifer P., Avnir D., Farin D. // J. Stat. Phys. 1984. Vol. 36. N 516. P. 699—716.
- [9] Bale H. D., Schmidt P. W. // Phys. Lett. 1984. Vol. 53. N 6. P. 596—599.
- [10] Луи С., Каплан Т., Грей П. // Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тоттати. М.: Мир, 1988. С. 544—552.
- [11] Levie de R. // Electrochimica Acta. 1965. Vol. 10. P. 113.
- [12] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
- [13] Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
- [14] Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
- [15] Жемочкин Б. Н., Силицин А. П. Практические методы расчета фундаментальных балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1947.
- [16] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
- [17] Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища школа, 1982. 167 с.

Институт проблем механики АН СССР  
Москва

Поступило в Редакцию  
15 октября 1990 г.