10

ПРИБЛИЖЕННОЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЭП В ОБЪЕМЕ С НЕПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

Л. В. Глазычев

Предложен подход к определению приближенных значений потенциалов электромагнитного поля на периферии импульсного релятивистского электронного пучка (РЭП), распространяющегося в объеме с непроводящими стенками или в неограниченной среде. Полученные при этом соотношения применимы для описания параксиальных осесимметричных РЭП с плавной зависимостью тока от времени. В результате появляется возможность преобразования задачи Коши для электромагнитных процессов в системе пучок—среда в краевую, что может существенно ускорить и облегчить решение уравнений электродинамики при численном моделировании такой системы. Если пространственно-временно́е распределение плотностей тока и заряда как пучка, так и среды задано извне, то значения потенциалов на периферии РЭП определяются аналитически, что проиллюстрировано примером.

1. Процесс инжекции и распространения релятивистских электронных пучков (РЭП) в плазме и газе представляет интерес как для экспериментальных так и для теоретических исследований в силу наличия ряда перспективных приложений. Достаточно полное теоретическое изучение данного процесса, позволяющее достичь количественного согласия с результатами имеющихся экспериментов и прогнозировать результаты планируемых, возможно только с помощью сложных математических моделей. Это связано с необходимостью самосогласованного описания целого ряда разноплановых явлений: движения электронов пучка (с учетом их рассеяния и торможения в среде), кинетических процессов в среде (прямая и лавинная ионизация, прилипание, рекомбинация и т. п.) и пространственно-временно́й эволюции электромагнитного поля.

Построение моделей указанного типа (см., например, [1-7]) сопряжено не только с преодолением технических трудностей, но и с решением некоторых принципиальных проблем. Одна из таких проблем, связанная с расчетом электромагнитного поля нестационарного РЭП, инжектируемого в объем с непроводящими стенками, и является предметом настоящей работы. Сущность проблемы заключается в необходимости разработки подхода к заданию приближенных краевых условий для численного решения уравнений Максвелла (решается, строго говоря, чисто начальная задача Коши). Другими словами, необходимо «перенести» краевые условия из бесконечности, где все поля и потенциалы равны нулю, как можно ближе к пучку, причем сделать это физически обоснованным способом.

В монографиях по электродинамике и волновым процессам [8-12] указанный вопрос не обсуждался, а в известных работах по исследованию динамики РЭП [1-5, 13, 14] рассматривалась ситуация инжекции пучка в металлический волновод (с очевидным заданием граничных условий) либо все сводилось к этой ситуации. Так, в [4, 13, 14] предполагается, что на некотором расстоянии R от оси (на границе расчетной сетки) потенциалы (либо поля) становятся пренебрежимо малыми, однако отсутствуют критерии выбора R, а также обоснование подхода. Другой известный подход состоит в увеличении с течением времени размера расчетной сетки (со скоростью света c). Этот подход, так же как и первый при очень больших R, требует для своей реализации значительных затрат вычислительных ресурсов.

В данной работе предложен принципиально иной метод, позволяющий вычислить приближенное значение электромагнитного поля на границах основного сечения РЭП, который распространяется в газовой среде. Это значение может быть использовано в качестве физически обоснованного краевого условия для численного решения уравнений Максвелла на компактной расчетной сетке. Предложенный подход применим для осесимметричных параксиальных пучков с достаточно плавной зависимостью тока от времени.

2. В рассматриваемой постановке начальной задачи инжектор электронов (выводное окно ускорителя) расположен в плоскости $z=0$. С момента времени $t=0$ в нейтральный газ (в положительном направлении оси z) начинает инжектироваться электронный пучок. Он инициирует в среде целый ряд процессов плазмохимической кинетики; электрическое поле пучка индуцирует плазменный ток, выносящий из области пучка «избыточные» электроны на периферию и через торец. Все перечисленные процессы протекают в ограниченной по радиусу области около оси пучка. За ее пределами, где плотность тока пучка равна нулю (нет прямой ионизации газа), а электрическое поле РЭП имеет напряженность, недостаточную для пробоя газа, газ остается практически непроводящим (и неполяризованным). По этой причине плотности заряда и тока как пучка, так и среды за пределами указанной области можно считать нулевыми. Везде в дальнейшем это условие считается выполненным для радиусов, превышающих некоторую величину R,

$$\rho(r>R),\ \mathbf{j}(r>R)=0, \tag{1}$$

где ρ — суммарная (пучка и среды) плотность заряда, а $\mathbf{j}$ — суммарная плотность тока.

Именно для радиуса R, естественным образом разделяющего пространство на приосевую и периферийную области, и будут записаны соотношения, определяющие величины полей. Ниже уточнены исходные предположения, необходимые для вывода искомых соотношений.

Параксиальность пучка предполагает, что скорости электронов пучка направлены преимущественно вдоль оси z: $\beta_\perp \ll \beta_z$, где β — нормированная на c скорость электрона. Для релятивистских электронов величина β близка к 1. Из параксиальности траекторий частиц пучка следует соотношение между характерным продольным масштабом L в системе пучок—газ и характерным радиусом пучка a: $L \gg a$ [1, 4, 13, 14]. Данное соотношение позволяет пренебрегать продольными производными по сравнению с поперечными $\partial/\partial z \sim 1/L \ll \ll 1/a \sim \nabla_\perp$ везде вблизи оси пучка, за исключением области около инжектора и головной части РЭП.

Здесь и в дальнейшем использованы наиболее удобные для рассмотрения задачи переменные (z, τ), где $\tau=t-z/c$, t — время. Это связано с близостью к 1 продольной скорости β_z электронов пучка, определяющих первичные источники в правых частях уравнений электродинамики. Возникновение вторичных источников (индуцированных в среде токов и зарядов) вдоль оси z происходит с такой же скоростью. Записанное выше соотношение выполняется как для первичных, так и для вторичных источников. В работе используется более жесткое условие на параксиальность пучка

$$R/L = 0(\varepsilon^2), \tag{2}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный малый параметр (очевидно, $R \gg a$).

Аналогичное (2) предположение сделано относительно характерного временно́го масштаба T в системе

$$R/cT = 0(\varepsilon^2), \tag{3}$$

что позволяет записать $(1/c)\ \partial/\partial\tau \sim 1/cT \ll 1/R \sim \nabla_\perp$. Как правило, величина T определяется временно́й зависимостью тока пучка на инжекторе, которая, согласно (3), должна быть достаточно плавной. По сути (2) и (3) позволяют ввести еще один пространственный масштаб (l), такой, что $R \ll l \ll cT$, L

$$R/l,\ l/cT,\ l/L = 0(\varepsilon). \tag{4}$$

Кроме (1)—(3) в качестве исходного предположения используется осевая симметрия системы

$$\partial/\partial\theta \equiv 0. \tag{5}$$

Условия (2), (3), (5) позволяют существенно упростить запись уравнений Максвелла в приосевой области. Пренебрегая производными $(\partial^2/\partial t^2)$ и $(\partial^2/\partial z^2)$ по сравнению с поперечными в волновых уравнениях для скалярного φ и векторного **A** потенциалов электромагнитного поля, нетрудно получить приближенные уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -4\pi\rho(r,\ z,\ \tau), \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -4\pi j_z(r,\ z,\ \tau)/c, \tag{7}$$

которые дополняются условием лоренц-калибровки

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\varphi - A_z)}{\partial\tau} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A_r + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_\tau - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}. \tag{8}$$

Конкретный вид правых частей (6), (7) определяется кинетикой среды, так как плотности индуцированных в ней токов и зарядов входят в ρ и j_z. В данной работе, однако, эта конкретизация не требуется.

Уравнения (6), (7) применимы исключительно в приосевой области и не содержат производных по z и τ, однако φ и A_z зависят от z и τ параметрически. Очевидно, $\partial\varphi/\partial r\ (r=0) = \partial A_z/\partial r\ (r=0) = A_r\ (r=0) = 0$. Недостающими краевыми условиями для (6)—(8) являются значения $\varphi\ (r=R,\ z,\ \tau)$ и $A_z\ (r=R,\ z,\ \tau)$ либо соотношения, включающие данные значения. В работе эти соотношения найдены с помощью приближенного решения полных волновых уравнений для φ и A_z.

3. Поиск приближенного решения полного волнового уравнения производится в данной работе для модельной ситуации, когда плоскость $z=0$, в которой расположено выводное окно ускорителя, является идеально проводящей. Так как уравнения для φ и A_z одинаковы, то достаточно проделать вычисления только для одной из этих величин. Для определенности выбран скалярный потенциал φ.

Соотношение, позволяющее определить потенциал $\varphi\ (R,\ z,\ \tau)$ на периферии пучка, получено в работе посредством приближенного вычисления значения $\varphi\ (0,\ z,\ \tau)$ потенциала на оси системы. Выражение для потенциала на оси нетрудно записать в переменных $(r,\ z,\ t)$ с помощью фундаментального решения волнового уравнения [15, с. 199]

$$\varphi(r=0,\ z,\ t) = 2\pi\int r dr du \frac{\tilde\rho\left(r,\ u,\ t - \sqrt{r^2+(z-u)^2}/c\right)}{\sqrt{r^2+(z-u)^2}},\ u < ct - \sqrt{r^2+(z-u)^2}, \tag{9}$$

где $\tilde\rho$ — суммарная плотность заряда в координатах $(r,\ z,\ t)$.

Переход к переменным $(r,\ z,\ \tau)$ сопровождается, во-первых, заменой t на $(\tau + z/c)$ и, во-вторых, заменой $\tilde\rho$ на ρ — плотность заряда, выраженную в переменных $(r,\ z,\ \tau)$. Так как $\tilde\rho(r,\ u,\ \hat t) = \rho(r,\ u,\ \hat t - u/c)$ (для любых u и $\hat t$), то в подынтегральном выражении будет стоять величина $\rho\left[r,\ u,\ \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2+(z-u)^2}\right)/c\right]$. Преобразование интеграла (9) в последовательный дает

$$\varphi(0,\ z,\ \tau) = \varphi_+ + \varphi_- = 2\pi\int_0^{u_m} du \int_0^{s_-} \frac{r dr \rho\left[r,\ u,\ \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2+(z-u)^2}\right)/c\right]}{\sqrt{r^2+(z-u)^2}} -$$

$$-2\pi\int_0^{bc\tau/(1+b)} du \int_0^{r_+} \frac{r dr \rho\left[r,\ u,\ \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2+(z+u)^2}\right)/c\right]}{\sqrt{r^2+(z+u)^2}}, \tag{10}$$

$$r_{\mp} = (c\tau + z - u/b)^2 - (z \mp u)^2, \tag{11.1}$$

$$u_m = \begin{cases} 2b(z + c\tau/2)/(1+b), & bc\tau/(1-b) > z, \\ bc\tau/(1-b), & bc\tau/(1-b) < z. \end{cases} \tag{11.2}$$

В (10), (11) и далее для удобства используется обозначение $b=\beta_z$. Второй член (φ_-) в (10) отвечает вкладу в потенциал, вносимому зеркальными отражениями всех зарядов относительно плоскости $z=0$, т. е. областью $u < 0$. Область интегрирования (11) определяется неравенством из (9), а также соотношением $\rho(r,\ u > bc\tau/(1-b),\ \tau) \equiv 0$ (электроны пучка к моменту времени t просто не успевают пройти расстояние, большее $bct = b(c\tau+u) > u$).

Схематически область интегрирования для φ_+ показана на рис. 1. Предполагается, что

$$z > l,\quad c\tau > R + (1-b)z/b. \tag{12}$$

Неравенства (12) исключают из рассмотрения область вблизи инжектора и

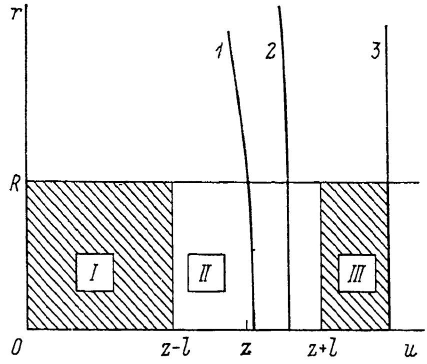

Рис. 1. Область интегрирования (11) для φ_+. 1—3 — $r_-(u)$ для $c\tau = c\tau_{\min} = R+(1-b)z/b$, $c\tau < (1+b)\times l/b+(1-b)z/b$ и $c\tau > (1+b)l/b+(1-b)z/b$; I—III — области интегрирования для φ_1—φ_3 соответственно.

головную часть пучка, для которых величины $\partial/\partial z$ и $(1/c)(\partial/\partial\tau)$ могут иметь тот же порядок, что и $\nabla_\perp$. Из (11.2), (12) следует, что $u_m = (2b/(1+b))(z+c\tau/2)$.

При условиях (12) область интегрирования по u в φ_+ можно разбить на две или три части в зависимости от величины τ

$$\varphi_+(0, z, \tau) = 2\pi\left(\int\limits_0^{z-l} du(\ldots) + \int\limits_{z-l}^{z+\hat{l}} du(\ldots) + \theta(u_m - z - l)\int\limits_{z+l}^{u_m} du(\ldots)\right), \tag{13}$$

где $\hat{l} = \min(l,\ u_m - z)$.

Эти слагаемые будут ниже обозначаться как φ_1, φ_2 и φ_3 соответственно (рис. 1). Если $u_m - z < l$, то φ_3 в сумме отсутствует. Смысл разбиения области интегрирования по u состоит в следующем. Для φ_1 и φ_3 дальнейшие преобразования и упрощения могут быть осуществлены благодаря наличию малого параметра $r/(z-u) = O(\varepsilon)$ (см. (4), (12)). Аналогично, в φ_- $r/(z+u) = O(\varepsilon)$. Для интеграла φ_2 величины r и $(z-u)$ имеют один порядок, однако можно воспользоваться ограниченностью области интегрирования по u и произвести разложение ρ в ряд по z и τ около точки (r, z, τ) (см. (4)), сохранив только первые члены этого разложения. Ниже φ_1, φ_2, φ_3 и φ_- будут рассмотрены по отдельности.

Так как интегрирование по r в φ_1 ведется в пределах $(0, R)$ (см. (1)), а $(z-u) > l \gg R$, то подынтегральное выражение существенно упрощается (отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$)

$$\rho\left[r, u, \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2 + (z-u)^2}\right)/c\right]/\sqrt{r^2 + (z-u)^2} \approx \rho(r, u, \tau)/(z-u). \tag{14}$$

Из (14) следует, что

$$\varphi_1(0, z, \tau) \approx \int\limits_0^{z-l} du\,\frac{Q(r, u, \tau)}{(z-u)}, \tag{15}$$

$$Q(r, u, \tau) = 2\pi\int\limits_0^r \hat{r}\,d\hat{r}\,\rho(\hat{r}, u, \tau), \tag{16}$$

где $Q(r, u, \tau)$ обозначает погонный заряд в пределах радиуса r.

Аналогичным образом определяется φ_-

$$\varphi_-(0, z, \tau) \approx -\int\limits_0^{bc\tau/(1+b)} du\, \frac{Q(R, u, \tau - 2u/c)}{(z+u)}, \tag{17}$$

а также φ_3 для случая $u_m - z > l$

$$\varphi_3(0, z, \tau) \approx \int\limits_{z+l}^{u_m} du\, \frac{Q(R, u, \tau - 2(u-z)/c)}{(u-z)}. \tag{18}$$

При выводе (18) учтено, что головная часть импульса, для которой $r_- < R$, имеет длину порядка R и дает вклад $O(\varepsilon)$.

Для интеграла φ_2 пространственный аргумент u относительно близок к z и может варьироваться в пределах $-\hat{l} < z - u < l$, а временно́й $\hat{\tau} = \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2 + (z-u)^2}\right)/c$ относительно близок к τ: $-\left(\hat{l} + \sqrt{\hat{l}^2 + R^2}\right)/c < (\hat{\tau} - \tau) < 0$. Неравенства (4) позволяют записать

$$\rho\left[r, u, \tau + \left(z - u - \sqrt{r^2 + (z-u)^2}\right)/c\right] \approx \rho(r, z, \tau) + \frac{\left(z - u - \sqrt{r^2 + (z-u)^2}\right)}{c} \times \\ \times \frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial \tau} + (u - z)\frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial z}. \tag{19}$$

Причина, по которой в (19) сохранены члены порядка $O(\varepsilon)$, состоит в том, что величина $\hat{\tau}$ может приближаться к $(1-b)\,z/bc$, а $\rho(r, z, \tau < (1-b)\,z/bc) = 0$. Разложение в ряд благодаря (4) при этом вполне оправдано, однако изменение ρ при вариации $\hat{\tau}$ может иметь тот же порядок, что и сама величина $\rho(r, z, \tau)$. Вариации $\hat{\tau}$ при выводе (15)—(18) существенно меньше, так что подобная возможность для этих выражений исключена. Третьим членом справа в (19), содержащим $\partial\rho/\partial z$, можно, как правило, пренебречь, так как при достаточно малых изменениях z (порядка l) величина ρ в нуль не обращается.

Замена переменных $w = u - z$, смена порядка интегрирования и подстановка (19) в выражение для φ_2 дает

$$\varphi_2(0, z, \tau) \approx 2\pi \int\limits_0^R r dr \int\limits_{-l}^{\min(l, \hat{w})} dw \left\{\rho(r, z, \tau) - \frac{\left(w + \sqrt{w^2 + r^2}\right)}{c}\frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + w\frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial z}\right\}\frac{1}{\sqrt{w^2 + r^2}}, \tag{20}$$

где

$$\hat{w} = \frac{1}{(1+b)}\left(\frac{bc\tau}{(1-b)} - z\right) - b\sqrt{\left(\frac{bc\tau}{(1-b)} - z\right)^2\frac{1}{(1+b)^2} + \frac{r^2}{(1-b^2)}}.$$

Интегрирование по w в (20) проводится в явном виде; выражение упрощается с помощью (4), (12)

$$\varphi_2(0, z, \tau) \approx -2\pi \int\limits_0^R r dr \left\{\rho(r, z, \tau)\ln\left(\frac{r^2}{4l\hat{l}}\right) + \frac{2\hat{l}}{c}\frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + (l - l_1)\,\theta(l - l_1)\frac{\partial \rho(r, z, \tau)}{\partial z}\right\}, \tag{21}$$

$$\hat{l} = \min(l_1, l), \quad l_1 = b\left(c\tau - (1-b)\,z/b\right)/(1+b) = (bct - z)/(1+b). \tag{22}$$

Подстановка (16) и интегрирование по частям (для первого слагаемого в скобках) позволяют преобразовать (21) к виду

$$\varphi_2(0, z, \tau) \approx Q(R, z, \tau)\ln\left(\frac{4l\hat{l}}{R^2}\right) + \int\limits_0^R \frac{2Q(r, z, \tau)}{r} dr - \frac{2\hat{l}}{c}\frac{\partial Q(R, z, \tau)}{\partial \tau} - \\ - (l - l_1)\,\theta(l - l_1)\frac{\partial Q(R, z, \tau)}{\partial z}. \tag{23}$$

Из (6), (7) следует приближенное уравнение

$$-\frac{\partial\varphi(r,\ z,\ \tau)}{\partial r}=\frac{2Q(r,\ z,\ \tau)}{r},\tag{24}$$

с помощью которого берется интеграл в правой части (23); он равен $(\varphi(0,\ z,\ \tau)-\varphi(R,\ z,\ \tau))$.

Подстановка выражений для φ_1, φ_2, φ_3 и φ_- в (13) и (10) дает искомое приближенное краевое условие на $\varphi(R,\ z,\ \tau)$

$$\varphi(R,\ z,\ \tau)+\frac{R}{2}\ln\left(\frac{4l\hat{l}}{R^2}\right)\frac{\partial\varphi(R,\ z,\ \tau)}{\partial r}-\frac{R\hat{l}}{c}\frac{\partial^2\varphi(R,\ z,\ \tau)}{\partial r\partial\tau}-$$

$$-(l-l_1)\theta(l-l_1)\frac{R}{2}\frac{\partial^2\varphi(R,\ z,\ \tau)}{\partial r\partial z}\approx-\int\limits_0^{bc\tau/(1+b)}du\frac{Q(R,\ u,\ \tau-2u/c)}{(z+u)}+$$

$$+\int\limits_0^{z-l}\frac{duQ(R,\ u,\ \tau)}{(z-u)}+\theta(l_1-l)\int\limits_l^{l_1}\frac{duQ(R,\ z+u,\ \tau-2u/c)}{u}.\tag{25}$$

Выражение (25) получено с точностью О (ε) и представляет собой итоговый результат. Несмотря на несколько громоздкий вид, его вычисление не представляет на практике принципиальных затруднений. В левой части стоит обычное дифференциальное условие первого порядка по r, а справа — сумма трех несложных однократных интегралов от гладких функций.

Следует отметить, что, хотя в (25) содержатся два произвольных параметра R и l, выбор которых должен удовлетворять (2)—(4), результат от них не зависит (их изменение вносит поправку O (ε)). Для любой величины $R_1>R$, удовлетворяющей (2)—(4), приближенное уравнение (24) можно записать в виде $(R_1/2)\ (\partial\varphi\ (R_1,\ z,\ \tau)/\partial r)=-Q\ (R,\ z,\ \tau)$, так как $Q\ (R_1,\ z,\ \tau)=Q\ (R,\ z,\ \tau)$, согласно (1). Следовательно, правая часть и два последних члена в левой части (25) от R не зависят. Первые же два члена в левой части (25) при дифференцировании по R взаимно сокращаются. Аналогично непосредственным дифференцированием (25) по l и разложением Q в ряд около точки $(R,\ z,\ \tau)$ проверяется слабая зависимость (25) от величины l.

Из полной эквивалентности уравнений для φ и A_z следует, что (25) является также и краевым условием для A_z при подстановке этой величины вместо φ, а вместо Q (I/c) в последних двух членах правой части и $(-I/c)$ в первом (зеркальные заряды движутся в сторону, противоположную своим оригиналам). Здесь I — полный ток в направлении z.

Нетрудно по аналогии рассмотреть другую модельную ситуацию, когда ускоритель является компактным, его металлические части не оказывают существенного влияния на электромагнитные процессы в окружающей среде, а вытекающий через торец плазменный заряд просто нейтрализуется. В этом случае из (25) надо убрать первый член в правой части.

4. Решение уравнений Максвелла с краевыми условиями (25), (26) требует знания величин Q и I в предыдущие по отношению к рассматриваемому моменты времени. При численном исследовании задачи о распространении РЭП с помощью математической модели определение Q и I не представляет затруднений. Аналитическое решение, которое позволило бы проиллюстрировать использование предложенных краевых условий, возможно только для простейшего случая распространения «жесткого» пучка в вакууме. При этом I и Q определяются исключительно током и погонным зарядом пучка, которые заданы извне.

В качестве примера ниже вычислены приближенные значения потенциалов и полей импульса РЭП длительности T, имеющего постоянный радиус R, плотность заряда ρ и продольную скорость $\beta_z=b$. Величина погонного заряда такого пучка равна

$$Q(r,\ z,\ \tau)=\pi\rho r^2,\ z>0,\ \tau_1<\tau<\tau_1+T,\ \tau_1=(1-b)z/bc,\tag{26}$$

а $I(r,\ z,\ \tau)=bcQ(r,\ z,\ \tau)$. Из (24) следует, что

$$\varphi(r, z, \tau) \approx \varphi(R, z, \tau) + \pi\rho(R^2 - r^2),$$
$$A_z(r, z, \tau) \approx A_z(R, z, \tau) + b\pi\rho(R^2 - r^2). \tag{27}$$

Приближенное вычисление φ по формуле (25) дает результат

$$\varphi(0, z, t) \approx \pi\rho R^2 \begin{Bmatrix} 1 + \ln\left(\frac{4f_1 z^2}{R^2 f_2}\right), & t < T + z/c \\ 1 + \ln\left(\frac{4f_1 \hat{f}_1 \hat{f}_2}{R^2 f_2 (1 - b^2)}\right), & t > T + z/c \end{Bmatrix}, \tag{28}$$

$$E_z(0, z, t) \approx 2\pi\rho R^2 \begin{Bmatrix} (1 - b^2)\frac{bct}{f_1 f_2} - \frac{1}{z}, & t < T + z/c \\ (1 - b^2)\left(\frac{bct}{f_1 f_2} - \frac{z}{\hat{f}_1 \hat{f}_2}\right), & t > T + z/c \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

где

$$f_1 = bct - z, \; f_2 = bct + z, \; \hat{f}_1 = z - bc(t - T), \; \hat{f}_2 = z + bc(t + T), \tag{30}$$

а $E_z(r, z, t) = (-1/c)(\partial A_z/\partial t) - \partial\varphi/\partial z$ — величина продольного электрического поля.

Область применимости (28), (29) определяется неравенствами

$$c(t - T) + R < z/b < ct - R, \; z \gg R, \; 1 - b \ll 1. \tag{31}$$

Здесь и далее для удобства восприятия использованы переменные (r, z, t). Точное аналитическое решение задачи можно получить только для $r=0$ (с помощью (9)). Соответствующие выражения опущены по причине громоздкости. При условиях (31) они переходят в (28), (29) соответственно. Сравнение приближенного и точного решений произведено на рис. 2. Величина z при этом нормирована на R, t и T — на R/c, φ — на $\pi R^2\rho$, E_z — на $2\pi R\rho$. Ситуация на рис. 2, *а* соответствует моменту $t=15=T/2$, когда импульс РЭП инжектирован лишь наполовину, а на рис. 2, *б* — моменту $t=45=3T/2$, когда импульс инжектирован целиком, а его задний фронт находится на расстоянии $z=b\,(t-T)=12$ от торца ускорителя ($b=0.8$). Для обоих моментов времени наблюдается хорошее согласие между точным и приближенным решениями в пределах области применимости последнего.

В рассматриваемом приближении поле E_z однородно по r в пределах сечения пучка, а по величине вблизи фронтов сравнимо с поперечным $E_r \approx 2\pi r\rho$. При наличии на радиусе R металлической стенки ($\varphi\,(R, z, t) = A_z\,(R, z, t) \equiv 0$) величина E_z была бы в параксиальном приближении равна нулю.

Нетрудно проверить наличие у приближенного решения (28), (29) верной асимптотики в пределе $t \to \infty$ для бесконечно длинного пучка ($T \to \infty$), соответствующем электростатической задаче о нахождении поля бесконечного однородно заряженного стержня, упирающегося торцом в идеально проводящую плоскость ($z \gg R$),

$$\varphi(r = 0, z) \approx \pi R^2\rho\,(1 + \ln(4z^2/R^2)), \; E_z(r = 0, z) \approx -2\pi R^2\rho/z. \tag{32}$$

5. Для практического пользования предложенным краевым условием (25) необходимо выбрать величины R и l, удовлетворяющие соотношениям (1)—(4). Целесообразно взять максимально возможную величину R, удовлетворяющую соотношениям $\sqrt{R/L}$, $\sqrt{R/cT} \ll 1$, так как по мере распространения пучка в газе (с ростом z) радиус самого пучка и наработанного им плазменного канала, как правило, увеличивается из-за дефокусировки и рассеяния. Предложенные краевые условия применимы до тех пор, пока радиус плазменного канала меньше R. Выбор l при выполнении (4) произволен. Можно, к примеру, взять $l = \sqrt{R \min\,(cT, L)}$.

Сами характерные временно́й и продольный масштабы зависят от постановки задачи. Для недалекой от равновесия инжекции РЭП в плотный газ роль характерного продольного масштаба L играет бетатронная длина или длина рассеяния [6], а временно́го T — длительность импульса РЭП или его фронтов.

Для малых расстояний от инжектора $z \leqslant R$ или от фронтов импульса $(bct-z) \leqslant R$, $(z-bc\,(t-T)) \leqslant R$ предложенные краевые условия неприменимы. Указанные участки не оказывают, однако, существенного влияния на динамику РЭП в целом, так что для них можно использовать какие-либо интерполяционные формулы, гладко переходящие в (25).

6. Предложен физически обоснованный метод, позволяющий свести решение задачи Коши для уравнений Максвелла, возникающей при исследовании распространения РЭП в неограниченной среде или объеме с непроводящими стенками, к решению краевой задачи. Метод, пригодный для импульсных парак-

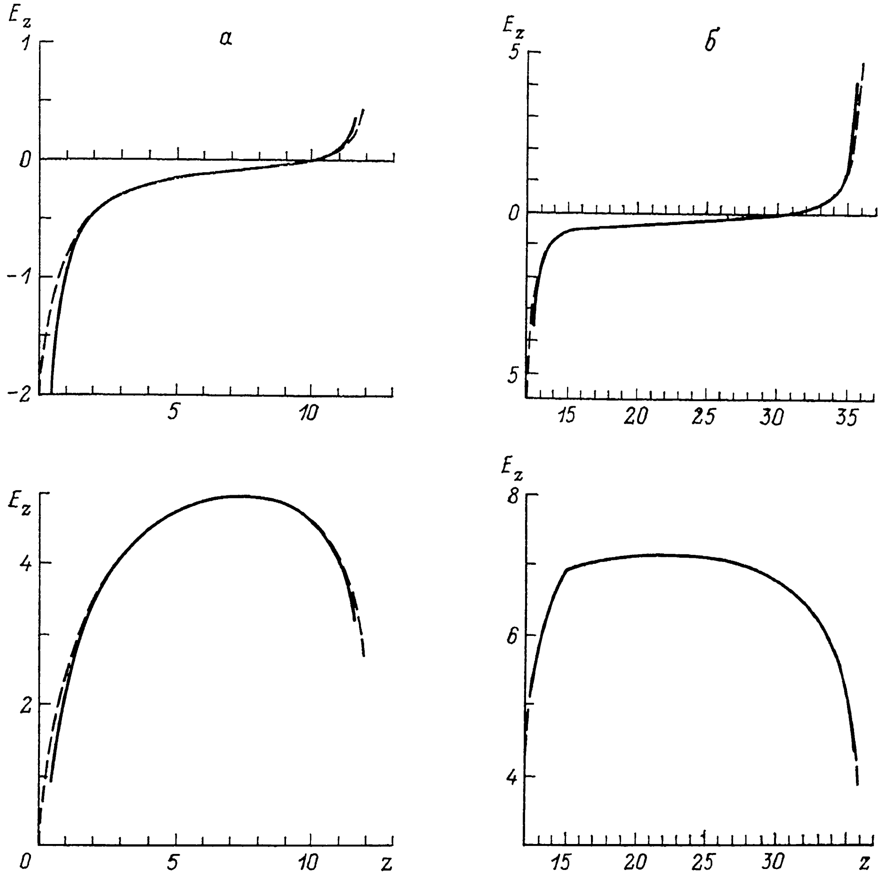

Рис. 2. Зависимости продольного электрического поля E_z и потенциала φ на оси пучка от z при $t=15$ (*а*) и 45 (*б*).

Сплошные линии — приближенное решение, штриховые — точное. $T=30$, $b=0.8$.

сиальных осесимметричных РЭП с плавной зависимостью тока от времени, базируется на приближенном вычислении потенциалов на периферии пучка (плазменного канала) с помощью фундаментального решения волнового уравнения. Потенциалы выражены через значения полного тока и погонного заряда, относящиеся к предыдущим состояниям системы.

Полученные соотношения имеют достаточно простой вид и могут быть использованы для приближенного аналитического определения потенциалов и полей в системе пучок—среда, если известны пространственно-временные зависимости суммарных плотностей тока и заряда.

В более общем случае эти соотношения могут применяться для модификации численных моделей динамики РЭП в среде, заменяя традиционные краевые условия для полей. Преобразованные таким образом модели позволят адекватно описывать многочисленные эксперименты по инжекции РЭП в камеры дрейфа с непроводящими стенками, металлические камеры большого диаметра, а также в неограниченное пространство.

Автор выражает благодарность Г. А. Сорокину и Л. А. Юдину за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Joyce G.*, *Lampe M.* // Phys. of Fluids. 1983. Vol. 26. N 11. P. 3377—3386.
[2] *Григорьев В. П.*, *Корякин А. И.*, *Поташев А. Г.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. № 4. С. 783—791.
[3] *Ходатаев К. В.*, *Гинзбург С. Л.*, *Дьяченко В. Ф.* // Физика плазмы. 1985. Т. 11. № 9. С. 1062—1070.
[4] *Fernsler R. F.*, *Hubbard R. F.*, *Hui B.* et al. // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 9. P. 3056—3073.
[5] *Godfrey B. B.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 2. P. 570—578.
[6] *Глазычев Л. В.*, *Сорокин Г. А.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. № 3. С. 370—375.
[7] *Глазычев Л. В.*, *Сорокин Г. А.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. № 5. С. 592—598.
[8] *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
[9] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
[10] *Де Гроот С. Р.*, *Сатторп Л. Г.* Электродинамика. М.: Наука, 1982. 560 с.
[11] *Бредов М. М.*, *Румянцев В. В.*, *Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.
[12] *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
[13] *Sharp W.*, *Lampe M.* // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. N 12. P. 2383—2395.
[14] *Lee E. P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60—69.
[15] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Московский
радиотехнический институт
АН СССР

Поступило в Редакцию
20 апреля 1989 г.
В окончательной редакции
9 октября 1990 г.