

10; 12

© 1991 г.

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА ДОПУСКОВ НА ПАРАМЕТРЫ ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМ

А. П. Дуркин, А. А. Коваленко, Д. А. Овсянников

Задача определения допусков на параметры фокусирующих структур решается путем замены полного приращения функционала его вариацией, для которой получены аналитические выражения в достаточно общем случае. Предлагаемая методика иллюстрируется на примере расчета допусков фокусирующего канала линейного ускорителя Московской мезонной фабрики.

Математические проблемы формирования потоков заряженных частиц уже давно находятся в центре внимания многих научных коллективов. Одной из них является проблема способа расчета допусков на различные параметры систем. Отличие реальных значений различных параметров связано со сложной технологией изготовления, монтажа и настройки электрофизической аппаратуры. Данная работа посвящена разработке методов определения допусков на основе точных аналитических выражений для коэффициентов чувствительности.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом. Задан функционал $I(\alpha)$, характеризующий качество функционирования системы в зависимости от параметров $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Известны номинальные значения параметров $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{m0})$. Требуется по заданному $\Delta > 0$ определить допуски $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие что

$$|\Delta I| = |I(\alpha_0 + \Delta\alpha) - I(\alpha_0)| \leq \Delta$$

при $|\Delta\alpha_i| \leq \Delta_i$, $\Delta\alpha = (\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_m)$. Эта задача называется обратной задачей определения допусков. В прямой задаче по заданным допускам Δ_i , $i = \overline{1, m}$ требуется определить допуск Δ на показатель качества $I(\alpha)$.

Решение этих задач часто основывают на замене полного приращения функционала ΔI его вариацией [1-3]

$$\delta I = \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta\alpha_i,$$

где

$$\beta_i = \left. \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha = \alpha_0}.$$

Далее будем предполагать, что вариации рассматриваемых параметров системы $\Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_m$ являются случайными и для расчета допусков используем математическое ожидание и дисперсию вариации исследуемого функционала

$$M[\delta I] = \sum_{i=1}^m \beta_i M[\Delta\alpha_i], \quad \sigma^2[\delta I] = \sum_{i=1}^m \beta_i^2 \sigma_i^2,$$

где σ_i — среднее квадратическое отклонение величины $\Delta\alpha_i$; здесь и далее для простоты полагаем корреляционный момент равным нулю.

Таким образом, основная трудность при определении допусков заключается в определении производных β_i , которые называют коэффициентами чувствительности первого порядка.

Особо рассмотрим случай, когда динамика частиц описывается линейной системой

$$\dot{x} = A(t, p)x + f(t, q) \equiv F(t, x, p, q). \quad (1)$$

С начальными условиями $x(0) = x_0 t M_0$ — множество ненулевой мерой в R^n . Здесь матрица A размерности $n \times n$, n — мерный вектор f кусочно-непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы соответственно по p и q : $p = p(t)$, $q = q(t)$ — кусочно-непрерывные вектор-функции.

Наряду с системой (1) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} F(t, x, p, q) + \rho(t, x) \text{Sp} A(t, p) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x),$$

описывающее изменение плотности распределения частиц в фазовом пространстве [4].

Рассмотрим функционал

$$I(p, q) = \int_0^T \int_{M_{t,p,q}} (x_t - \bar{x}(t))^* B(t) (x_t - \bar{x}(t)) \rho(t, x_t) dx_t dt +$$

$$+ \int_{M_{T,p,q}} (x_T - \bar{x}(T))^* G (x_T - \bar{x}(T)) \rho(T, x_T) dx_T + \int_0^T \varphi(t, \bar{x}(t)) dt + g(\bar{x}(T)), \quad (2)$$

где матрицы B , G и функции φ , g заданы, T фиксировано, $\bar{x}(t)$ — центр тяжести пучка.

С учетом формул

$$\bar{\rho} = \int_{M_{p,q}} \rho(t, x_t) dx_t, \quad \bar{x}(t) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{M_{p,q}} x_t \rho(t, x_t) dx_t,$$

$$D(t) = \int_{M_{p,q}} (x_t - \bar{x}(t)) (x_t - \bar{x}(t))^* \rho(t, x_t) dx_t$$

функционал (2) можно представить в виде

$$I(p, q) = \int_0^T \{ \text{Sp} (BD) + \varphi(t, \bar{x}(t)) \} dt + \text{Sp} (GD(T)) + g(\bar{x}(T)). \quad (3)$$

При этом

$$\dot{x} = A(t, p)x + f(t, q), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (4)$$

$$\dot{D} = A(t, p)D + DA^*(t, p), \quad D(0) = D_0. \quad (5)$$

Здесь D — матрица вторых моментов. Если под D_0 понимать матрицу, обратную матрице, задающей эллипсоид, ограничивающий множество начальных состояний системы (1), то диагональные элементы $D_{ii}(t)$ матрицы $D(t)$ будут давать квадраты максимальных отклонений $x_i - \bar{x}_i(t)$ на эллипсоиде

$$(x - \bar{x}(t))^* D^{-1}(t) (x - \bar{x}(t)) = 1.$$

С помощью функционала (3) можно оценивать разнообразные динамические характеристики пучка.

Преобразовав функционал (3), получим следующее представление вариации функционала:

$$\delta I = - \int_0^T \{ \psi^*(t) \Delta_p A(t, p) \bar{x}(t) + \psi^*(t) \Delta_q f(t, q) +$$

$$+ \text{Sp} (D \Theta \Delta_p A(t, p) + \Theta D \Delta_p A^*(t, p)) \} dt, \quad (6)$$

где $\Delta_p A(t, p) = A(t, p + \Delta p) - A(t, p)$, $\Delta_q f(t, q) = f(t, q + \Delta q) - f(t, q)$, матрица Θ размерности $n \times n$ и n -мерная вектор-функция ψ удовлетворяют уравнениям и начальным условиям

$$\dot{\theta} = -\Theta A - A^* \Theta - B, \quad \Theta(T) = -G,$$

$$\dot{\psi} = -A^* \psi + \left[\frac{\partial \varphi(t, \bar{x}(t))}{\partial \bar{x}} \right]^*, \quad \psi^*(T) = -\frac{\partial g(\bar{x}(T))}{\partial \bar{x}}.$$

Проиллюстрируем применение формулы (6) несколькими примерами. Рассмотрим поперечное движение заряженной частицы внутри фокусирующей линзы длины ξ с постоянным градиентом фокусирующего поля $-\Lambda^2$. Все рассуждения проведем для плоскости (x, x') . Здесь $x' = dx/d\xi$, $\xi = Z/L$ — безразмерная продольная координата, L — длина периода фокусировки. Аналогичные результаты могут быть показаны и для плоскости (y, y') . Это движение описывается в линейном приближении уравнением $x'' = -\lambda^2 x$. Далее обозначим $x = x_1$, $x' = x_2$. Рассмотрим функционал $I = x_1(\xi/2)$, т. е. координата x в середине линзы. В случае когда градиент фокусирующего поля получает искажение Δ , уравнение (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Lambda^2 & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (6), легко находим вариацию

$$\Delta x_1(\xi/2) = \left[\frac{1}{2\Lambda^2} x_1(\xi/2) \sin^2 \frac{\Lambda \xi}{2} + \frac{1}{4\Lambda^3} (-\Lambda \xi + \sin \Lambda \xi) x_2(\xi/2) \right] \Delta. \quad (7)$$

Здесь $x_1(\xi/2)$ и $x_2(\xi/2)$ — значения x и x' неискаженной системы в точке $\xi/2$.

В случае поворота линзы на угол φ вокруг продольной оси уравнения для плоскостей (x, x') и (y, y') рассматриваются совместно [1]. Полагая φ малым, при помощи формулы (6) найдем вариацию

$$\Delta x_1(\xi/2) = \left[\left(\operatorname{ch} \frac{\Lambda \xi}{2} \cos \frac{\Lambda \xi}{2} - \operatorname{sh} \frac{\Lambda \xi}{2} \sin \frac{\Lambda \xi}{2} - 1 \right) y_1'(\xi/2) + \left(\operatorname{ch} \frac{\Lambda \xi}{2} \sin \frac{\Lambda \xi}{2} - \operatorname{sh} \frac{\Lambda \xi}{2} \cos \frac{\Lambda \xi}{2} \right) \frac{y_2(\xi/2)}{\Lambda} \right] \varphi. \quad (8)$$

Здесь $y_1(\xi/2)$ и $y_2(\xi/2)$ — значения y и y' неискаженной системы в точке $\xi/2$.

Пусть теперь Δ_k и Δ_n — малые поперечные смещения концов линзы. В этом случае уравнение (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda^2 \left(\Delta_n + \frac{\Delta_k - \Delta_n}{\xi} (z - z_n) \right) \end{pmatrix}.$$

Принимая параметры Δ_n и $\frac{\Delta_k - \Delta_n}{\xi}$ за независимые при том, что координата начала линзы $z_n = 0$, найдем вариацию

$$\Delta x_1(\xi/2) = \left(1 - \cos \frac{\Lambda \xi}{2} \right) \Delta_n + \left(\xi/2 - \frac{\sin \frac{\Lambda \xi}{2}}{\Lambda} \right) \frac{\Delta_k - \Delta_n}{\xi}. \quad (9)$$

Отметим, что вариационный метод использует только малость искажений, но не длины линз или других постоянных параметров. Это является одним из основных достоинств данного метода.

Все выше изложенные примеры распространяются на систему из N фокусирующих периодов. Покажем это на примере решения задачи о малых поперечных смещениях концов линз. Пусть каждый период фокусировки содержит M фокусирующих и M дефокусирующих линз. Уравнение (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p(z) \left[\Delta_n(z) + \frac{\Delta_k(z) - \Delta_n(z)}{\xi} (z - z_n(z)) \right] \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$p(z) = \begin{cases} +\Lambda^2, & \text{внутри фокусирующей линзы,} \\ -\Lambda^2, & \text{внутри дефокусирующей линзы,} \\ 0, & \text{внутри межлинзовых промежутков,} \end{cases}$$

$$\Delta_{\pi}(z) = \begin{cases} \Delta_{i,k}^{\mu\phi,\pi}, & \text{внутри } k\text{-ой фокусирующей (дефокусирующей)} \\ & \text{линзы } i\text{-го периода,} \\ 0, & \text{внутри межлинзовых промежутков,} \end{cases}$$

$$\Delta_{\kappa}(z) = \begin{cases} \Delta_{i,k}^{\kappa\phi,\pi}, & \text{внутри } k\text{-й фокусирующей (дефокусирующей)} \\ & \text{линзы } i\text{-го периода,} \\ 0, & \text{внутри межлинзовых промежутков,} \end{cases}$$

$$z_{\pi}(z) = \begin{cases} z_{i,k}^{\phi,\pi}, & \text{внутри } k\text{-й фокусирующей (дефокусирующей)} \\ & \text{линзы } i\text{-го периода,} \\ 0, & \text{внутри межфазовых промежутков,} \end{cases}$$

$\Delta_{i,k}^{\mu,\kappa\phi,\pi}$ — смещение начала (конца) k -й фокусирующей (дефокусирующей) линзы i -го периода, $z_{i,k}^{\phi,\pi}$ — координата начала k -й фокусирующей (дефокусирующей) линзы i -го периода.

Вычислим дисперсию приращения координаты $x_1(z)$ в конце N -го периода фокусировки, т. е. $\text{Disp}[\Delta x_1(N)]$. Полагаем длины всех линз равными ξ (в безразмерных единицах по отношению к длине одного периода). Для независимых случайных смещений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 будем иметь

$$\text{Disp}[\Delta x_1(N)] = \sigma^2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \left[\left(\frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\mu\phi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\kappa\phi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\pi\phi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\pi\kappa}} \right)^2 \right], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\mu\phi}} &= \psi_{i,k}^{\phi,1} \left(\frac{\sin \Lambda \xi}{\Lambda \xi} - \cos \Lambda \xi \right) - \psi_{i,k}^{\phi,2} \left(\frac{\cos \Lambda \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi} + \Lambda \sin \Lambda \xi \right), \\ \frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\kappa\phi}} &= \psi_{i,k}^{\phi,1} \left(1 - \frac{\sin \Lambda \xi}{\Lambda \xi} \right) - \frac{\psi_{i,k}^{\phi,2}}{\Lambda \xi} (1 - \cos \Lambda \xi), \\ \frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\pi\phi}} &= \psi_{i,k}^{\pi,1} \left(\text{ch } \Lambda \xi - \frac{\text{sh } \Lambda \xi}{\Lambda \xi} \right) - \psi_{i,k}^{\pi,2} \left(\Lambda \text{ sh } \Lambda \xi + \frac{1}{\xi} - \frac{\text{ch } \Lambda \xi}{\xi} \right), \\ \frac{\partial x_1(N)}{\partial \Delta_{i,k}^{\pi\kappa}} &= \psi_{i,k}^{\pi,1} \left(\frac{\text{sh } \Lambda \xi}{\Lambda \xi} - 1 \right) - \frac{\psi_{i,k}^{\pi,2}}{\xi} (\text{ch } \Lambda \xi - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\psi_{i,k}^{\phi,1}$ и $\psi_{i,k}^{\phi,2}$ — значения координат вектора, сопряженного к невозможной системе (4) в начале k -й линзы i -го периода, которые легко вычисляются из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(z) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi^1(N) \\ \psi^2(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для уравнения (5). В качестве примера рассмотрим фокусирующий канал линейного ускорителя Московской мезонной фабрики. Данный канал состоит из фокусирующих периодов, каждый из которых имеет вид, приведенный на рисунке.

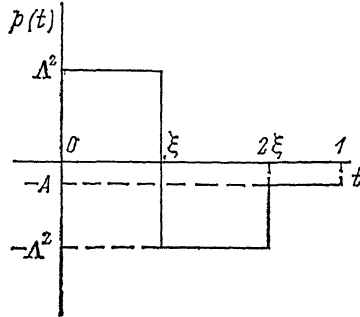
Исследовалась динамика частиц в плоскости (x, x') . Если записать матрицу, описывающую преобразование координат частицы за период фокусировки в силу системы вида (1), в виде [1. 5]

$$W = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \frac{1}{\nu} \sin \mu \\ -\nu(1 + \alpha^2) \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix},$$

то начальный эллипс, согласованный с каналом, для системы (5) будет иметь вид [5]

$$D_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \alpha \\ \alpha & \nu(1 + \alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Аналогичные рассуждения могут быть приведены и для плоскости (y, y') . Будем предполагать, что внутри фокусирующих и дефокусирующих линз могут



иметь место случайные искажения градиента фокусирующего поля $\Delta p_{i\phi, x}$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 , которая задается в виде

$$\sqrt{\text{Disp} \left[\frac{\Delta p}{p} \right]} = a \% [6].$$

Рассматривается динамика эллипсоида D_0 вдоль системы фокусировки, описываемая в данном случае системой вида (5). Обозначим через $D(N)$ матрицу, описывающую эллипс на выходе фокусирующего канала линейного ускорителя. В качестве функционала рассматриваются элементы выходного эллипса $D(N)$

$$D(N) = \begin{pmatrix} \text{Sp}(D(N)G_{11}) & \text{Sp}(D(N)G_{12}) \\ \text{Sp}(D(N)G_{21}) & \text{Sp}(D(N)G_{22}) \end{pmatrix},$$

где G_{ij} — матрица, такая что

$$G_{ij} = \{g_{ij}^{mn}\}_{m, n=1}^2, \quad g_{ij}^{mn} = \begin{cases} 1, & m = i \wedge n = j, \\ 0, & m \neq i \vee n \neq j. \end{cases}$$

Если под $\delta D(N)$ понимать матрицу, элементами которой являются вариации элементов эллипса $D(N)$, то формула (6) будет иметь вид

$$\delta D(N) = W^N \left(\sum_{i=1}^N \Delta p_{i\phi} (L_{i\phi} D_0 + D_0 L_{i\phi}^*) + \Delta p_{ix} (L_{ix} D_0 + D_0 L_{ix}^*) \right) W^{*N}. \quad (12)$$

Здесь $L_{i\phi} = C_{i\phi}^{-1} L_\phi C_{i\phi}$; $L_{ix} = C_{ix}^{-1} L_x C_{ix}$, $C_{i\phi} = W^{i-1}$,

$$C_{ix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta \xi & \frac{\Lambda}{\Lambda} \sin \Delta \xi \\ -\Lambda \sin \Delta \xi & \cos \Delta \xi \end{pmatrix} W^{i-1},$$

$$L_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\cos 2\Delta \xi - 1}{4\Lambda^2} & -\frac{1}{2\Lambda^2} \left(\xi - \frac{\sin 2\Delta \xi}{2\Lambda} \right) \\ \frac{\xi}{2} + \frac{\sin 2\Delta \xi}{4\Lambda} & \frac{1 - \cos 2\Delta \xi}{4\Lambda^2} \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} \frac{1 - \text{ch } 2\Delta \xi}{4\Lambda^2} & \frac{1}{2\Lambda^2} \left(\xi - \frac{\text{sh } 2\Delta \xi}{2\Lambda} \right) \\ \frac{\xi}{2} + \frac{\text{sh } 2\Delta \xi}{4\Lambda} & \frac{\text{ch } 2\Delta \xi - 1}{4\Lambda^2} \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (12), легко оценить дисперсию для элементов матрицы $\delta D(N)$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \text{Disp} [\delta D_{11}(N)] & \text{Disp} [\delta D_{12}(N)] \\ \text{Disp} [\delta D_{21}(N)] & \text{Disp} [\delta D_{22}(N)] \end{pmatrix}.$$

Указанная методика была реализована на ЭВМ. В таблице приведены дисперсии элементов матрицы $\delta D(N)$, полученные вариационным методом и при помощи статистического моделирования.

Значения дисперсии	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 0.5\%$		$\alpha = 0.2\%$	
	вариационный результат	статистический результат	вариационный результат	статистический результат	вариационный результат	статистический результат
Disp $[\delta D_{11}(N)]$	0.7228	1.42	0.1807	0.212	0.02891	0.0258
Disp $[\delta D_{12}(N)]$	1.067	2.05	0.2667	0.287	0.04267	0.0397
Disp $[\delta D_{22}(N)]$	1.598	3.69	0.3996	0.459	0.06394	0.0650

Таким образом, получены единообразные легко алгоритмизуемые формулы для определения коэффициентов чувствительности, а следовательно, и допусков на параметры систем фокусировки. Отметим, что во многих случаях могут быть получены аналитические формулы (7)—(9), (11), (12) для определения коэффициентов чувствительности. В общем случае реализация данных формул требует малых затрат машинного времени и объема памяти. Эти формулы могут быть использованы при расчете на параметры различных систем фокусировки динамики частиц, которые описываются линейными системами. Для нелинейных систем может быть использована аналогичная методика с использованием аналитических выражений для градиентов функционалов, полученных в работах [2, 4].

Список литературы

- [1] Власов А. Д. Теория линейных ускорителей. М., 1965.
- [2] Овсянников Д. А. Математические методы оптимизации динамики пучков. Л., 1986.
- [3] Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М., 1981.
- [4] Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л., 1980.
- [5] Муриш Б. П., Бондарев Б. И., Гущин В. В. и др. Линейные ускорители ионов. Т. 1. Проблемы и теория. М., 1978.
- [6] Дуркин А. П. Канд. дис. М., 1978.

Ленинградский
государственный университет

Поступило в Редакцию
22 ноября 1989 г.