1991 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 61, в. 6
1991 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 61, N 6

09; 12

ВЛИЯНИЕ ПРОЗРАЧНОСТИ АНОДА НА СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ТРИОДЕ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ

В. П. Григорьев, А. В. Захаров

Аналитически исследовано влияние взаимодействия электронов с анодом на стационарное состояние электронного потока в триоде с виртуальным катодом. Показано, что распределение электронов по импульсам, определяющее параметры излучения, в значительной степени зависит от геометрии анода, его прозрачности и напряжения на аноде.

Введение

Широкое использование триодов с виртуальным катодом (ВК) для получения мощных потоков заряженных частиц и электромагнитного излучения [1] требует учета всех факторов, влияющих на параметры электронного потока. Одним из них является прозрачность анода (сетка или фольга), влияние которой на спектральный состав и мощность электромагнитного излучения отмечено в работах [2, 3]. В связи с этим представляет интерес исследование стационарных состояний потоков осциллирующих электронов в указанной системе с учетом их взаимодействия с прозрачным анодом.

В данной работе исследованы стационарные состояния электронного потока без пролетных электронов на примере неограниченной в поперечном направлении системы, что справедливо для таких реальных систем, поперечные размеры которых много больше расстояния между катодом и анодом z_a. При этом потенциал φ самосогласованного электрического поля и плотность электронов n зависят только от координаты z.

Основные уравнения

Состояние электронов системы будем описывать функцией распределения $f(\mathbf{p}, z)$, которая определяется из решения стационарного бесстолкновительного кинетического уравнения с самосогласованным электромагнитным полем $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{1}$$

и из граничных условий на катоде, аноде и виртуальном катоде.

В различных областях изменения переменных $\mathbf{p}$, z функция распределения f имеет разный вид, поэтому введем следующие обозначения:

$$f = \begin{cases} f_L^{(+)}, & p_z > 0, \ 0 < z < z_a, \\ f_L^{(-)}, & p_z < 0, \ 0 < z < z_a, \\ f_R^{(+)}, & p_z > 0, \ z_a < z < z_{bk}, \\ f_R^{(-)}, & p_z < 0, \ z_a < z < z_{bk}. \end{cases} \tag{2}$$

Кроме того, полагая, что ток катода, компенсирующий потери электронов на аноде, мал, будем пренебрегать собственным магнитным полем системы электронов. В этих условиях интегралами движения будут квадрат поперечного импульса $p_\perp^2$ и полная энергия

$$\varepsilon = mc^2\gamma(p) - e\varphi(z), \tag{3}$$

где $\gamma = \sqrt{1+\mathbf{p}^2/m^2c^2}$ — релятивистский фактор; φ — потенциал самосогласованного электрического поля; e, m — элементарный заряд и масса покоя электрона; c — скорость света.

Для определения граничных условий будем считать, что катод работает в режиме ограничения тока пространственным зарядом и испускает «холодные» электроны с функцией распределения, пропорциональной произведению дельта-функций $\delta(\varepsilon - mc^2)\delta(p_\perp^2)$. Отсюда следует, что $f_L^{(+)}$ и $f_L^{(-)}$ связаны соотношением

$$f_L^{(+)}(p_z, \mathbf{p}_\perp, z) = f_L^{(-)}(-p_z, \mathbf{p}_\perp, z) + \frac{|j_k|}{\pi e}\delta(\varepsilon - mc^2)\delta(p_\perp^2), \tag{4}$$

где j_k — плотность тока катода.

Поскольку в стационарном состоянии количество падающих и отраженных от виртуального катода электронов одинаково, то функция f_R симметрична относительно знака p_z

$$f_R^{(+)}(p_z, \mathbf{p}_\perp, z) = f_R^{(-)}(-p_z, \mathbf{p}_\perp, z). \tag{5}$$

При пролете через анод вследствие рассеяния и поглощения меняется энергетический спектр и количество электронов. В общем виде взаимодействие электронов с анодом можно описать, вводя для электронов с импульсом $\mathbf{p}'$ «прозрачность» анода $\varkappa$ и функцию $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ плотности вероятности рассеяния электрона в интервал $d\mathbf{p}$ в окрестности импульса $\mathbf{p}$. Из условия равенства единице суммы вероятностей поглощения и пролета электрона через анод находим условие нормировки функции w

$$\int w(\mathbf{p}', \mathbf{p})\,d\mathbf{p} = \varkappa(\mathbf{p}'). \tag{6}$$

Отметим, что функции $\varkappa$ и w полностью определяются геометрией анода и сечением взаимодействия электронов с атомами материала анода.

Для установления связи между функциями f_L и f_R рассмотрим связь потоков электронов, падающих и прошедших через анод. Например, слева на анод за единицу времени в интервале импульсов $d\mathbf{p}'$ поступает $v_z' f_L^{(+)} d\mathbf{p}'$ электронов. Из этого числа проходит через анод и попадает в интервал импульсов $d\mathbf{p}$ количество электронов, равное $v_z' f_L^{(+)}(\mathbf{p}', z_a) w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}' d\mathbf{p}$. Полный поток электронов, имеющих справа от анода импульс $\mathbf{p}$, определяется выражением

$$d\mathbf{p}\int d\mathbf{p}' v_z' f_L^{(+)}(\mathbf{p}', z_a)\, w(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \tag{7}$$

Но этот поток, по определению функции $f_R^{(+)}$, можно вычислить также из соотношения

$$v_z f_R^{(+)}(\mathbf{p}, z_a)\, d\mathbf{p}. \tag{8}$$

Приравняв выражения (7) и (8), получим интегральное уравнение, связывающее функции $f_L^{(+)}$, $f_R^{(+)}$,

$$v_z f_R^{(+)}(\mathbf{p}, z_a) = \int d\mathbf{p}' v_z' f_L^{(+)}(\mathbf{p}', z_a)\, w(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \tag{9}$$

Аналогично, рассматривая поток электронов, падающих на анод справа, получим

$$|v_z|\, f_L^{(-)}(\mathbf{p}, z_a) = \int d\mathbf{p}' |v_z'|\, f_R^{(-)}(\mathbf{p}', z_a)\, w(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \tag{10}$$

Выражения (4), (5), (9), (10) полностью определяют граничные условия для функций распределения и позволяют совместно с уравнением (1) и уравнением Пуассона для потенциала

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 4\pi e \int f(\mathbf{p},\ z)\, d\mathbf{p} \tag{11}$$

решить самосогласованную задачу о нахождении стационарного распределения осциллирующих электронов и электростатического поля в системе с виртуальным катодом.

Модель взаимодействия электронов с сеточным анодом

Для определения вероятности рассеяния w и прозрачности $\varkappa$ рассмотрим взаимодействие электронов с анодом, представляющим бесконечную систему проводников диаметра d, ориентированных вдоль осей x и y прямоугольной системы координат x, y, z. Проводники заряжены с линейной плотностью σ, расстояние между центрами соседних проводников равно $2a$. Начало координат выберем в центре какого-либо квадрата, образованного соседними проводниками. Тогда изменение поперечного к оси z импульса электрона определяется выражением

$$\Delta\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}_\perp = -e \int \mathbf{E}_\perp dt, \tag{12}$$

где поперечная к оси z напряженность электрического поля сетки $\mathbf{E}_\perp$ вычисляется на траектории электрона.

Так как $\mathbf{E}_\perp$ оказывает заметное влияние на изменение импульса только в непосредственной близости от сетки $|z - z_a| \leqslant a$, то в этой области траекторию можно представить отрезком прямой

$$z(t) = z_a + v_z t,\ x(t) = \rho_x + v_x t,\ y(t) = \rho_y + v_y t. \tag{13}$$

Здесь ρ_x, ρ_y — прицельные параметры. Подставляя в выражение (12) $\mathbf{E}_\perp$ как сумму напряженностей, создаваемых отдельными проводниками, и вычисляя интеграл по времени на траектории (13), получим выражение для поперечного импульса $\mathbf{p}'_\perp$ после пролета сетки в зависимости от начального состояния электрона и параметров сетки

$$p'_\alpha = p_\alpha + \rho_\alpha \delta p_c / a \quad \alpha = x,\ y, \tag{14}$$

$$\delta p_c = 2\pi e\sigma / v_z. \tag{15}$$

Так как все значения параметра ρ_α из промежутка $|\rho_\alpha| < a$ равновероятны, то вероятность попасть в интервал $d\boldsymbol{\rho} = d\rho_x d\rho_y$ равна

$$dW \doteq d\boldsymbol{\rho}/4a^2 = d\mathbf{p}/4\delta p_c^2. \tag{16}$$

В выражении (16) сделан переход от прицельного параметра к импульсу электрона, учитывая, что они связаны соотношением (14). Считая, что при значениях прицельного параметра, лежащих вне интервала $|\rho_\alpha| < a - d/2$, электрон застревает в проводнике, получим, что плотность вероятности $w = dW/d\mathbf{p}$ имеет форму ступеньки в интервале $|\Delta p_\alpha| < a - d/2$ и правильно нормирована на геометрическую прозрачность сетки $\varkappa = (1 - d/2a)^2$. Для дальнейших вычислений ступенчатая форма функции w неудобна, поэтому приближенно представим ее в виде гауссова распределения с тем же среднеквадратным разбросом. Учитывая также, что при движении в электростатическом поле сохраняется полная энергия электрона, окончательное выражение для плотности вероятности рассеяния электрона сеткой анода запишем в виде

$$w(\mathbf{p}',\ \mathbf{p}) = \frac{3\varkappa v_z}{2\pi\delta p_c^2} \exp\left[-\frac{3(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}_\perp)^2}{2\delta p_c^2}\right] \delta(\varepsilon' - \varepsilon). \tag{17}$$

Выбор приближенного представления функции w в форме (17) удобен так же тем, что, как нетрудно показать, для фольгового анода в приближении многократного упругого рассеяния функция плотности вероятности имеет аналогичный вид с заменой $2\delta p_c^2/3$ на $\Delta p_\perp^2$ — среднеквадратичный поперечный импульс, приобретаемый электроном при прохождении фольги. Поэтому полученные ниже результаты справедливы и для фольгового анода.

Величину δp_c, определяющую ширину распределения электронов по поперечному импульсу, можно определить, используя тот факт, что на расстояниях $|z-z_a| > a$ напряженность $E_z = \pi\sigma/a$. Подставив это выражение в (15), получим

$$\frac{\delta p_c}{p_z} = \frac{2eaE_z}{mc^2} \frac{\gamma}{\gamma^2-1}. \tag{18}$$

Точное значение E_z можно получить только после решения самосогласованной задачи для распределения поля и электронов. Воспользовавшись для оценки значением $E_z \sim U_a/z_a$ и тем, что на аноде $eU_a/mc^2 = \gamma - 1$, получим $\delta p_c/p_z \sim a/z_a$ для γ порядка нескольких единиц. Полученное соотношение показывает, что угловой разброс пучка при однократном прохождении сетки будет малым, если размер ячейки много меньше расстояния катод—анод.

Решение системы граничных условий

Последовательно исключая неизвестные, сведем систему (4), (5), (9), (10) к интегральному уравнению для функции $f_L^{(-)}$

$$|v_z| f_L^{(-)}(p, z_a) = (|j_k|/\pi e)\int d\mathbf{p}' |v_z'| \delta(\varepsilon' - mc^2) w_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) +$$

$$+ \int d\mathbf{p}' |v_z'| f_L^{(-)}(\mathbf{p}', z_a) w_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \tag{19}$$

Функция w_2 в выражении (19) представляет плотность вероятности рассеяния при двукратном прохождении анода

$$w_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}'' w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') w(\mathbf{p}'', \mathbf{p}). \tag{20}$$

Используя в качестве w функцию плотности вероятности при рассеянии на сетке анода, уравнение (19) с учетом соотношений (17), (20) приведем к виду

$$F(\mathbf{p}_\perp) = \exp[-3p_\perp^2/4\delta p_c^2] + (3\varkappa^2/4\pi\delta p_c^2) \times$$

$$\times \int d\mathbf{p}' |v_z'| F(\mathbf{p}_\perp') \delta(\varepsilon' - \varepsilon) \exp[-3(\mathbf{p}_\perp' - \mathbf{p}_\perp)^2/4\delta p_c^2]. \tag{21}$$

Функция $F(p_\perp)$ определяется выражением

$$f_L^{(-)}(\mathbf{p}, z) = \frac{3\varkappa^2}{4\pi\delta p_c^2} \frac{|j_k|}{e} \delta(\varepsilon - mc^2) F(\mathbf{p}_\perp). \tag{22}$$

Проводя интегрирование по p_z' с помощью замены $|v_z'| dp_z' = d\varepsilon'$ и замечая, что формальное преобразование Фурье $\Phi(\mathbf{x}_\perp) = \int d\mathbf{p}_\perp' F(\mathbf{p}_\perp') \exp(i\mathbf{p}_\perp \mathbf{x}_\perp)$ сводит интегральное уравнение (21) к алгебраическому, получим явное решение для $\Phi(\mathbf{x}_\perp)$ в виде

$$\Phi(\mathbf{x}_\perp) = \frac{4\pi\delta p_c^2}{3}[\exp(\delta p_c^2 x_\perp^2/3) - \varkappa^2]^{-1}. \tag{23}$$

Распределение F получается из выражения (23) с помощью обратного преобразования Фурье

$$F(\mathbf{p}_\perp) = \int \frac{d\mathbf{x}_\perp}{4\pi^2} \Phi(\mathbf{x}_\perp) \exp(-i\mathbf{p}_\perp \mathbf{x}_\perp). \tag{24}$$

Анализ соотношений (4), (5), (9), (10), (22) показывает, что разброс по импульсам осциллирующих в промежутке катод—виртуальный катод электронов определяется функцией F. Ширину распределения F удобно характеризовать параметром среднеквадратичного разброса

$$\langle p_\perp^2 \rangle = \int p_\perp^2 F(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp \Big/ \int F(\mathbf{p}_\perp) d\mathbf{p}_\perp.$$

Используя для вычисления интегралов соотношения типа $\int F d\mathbf{p}_\perp = \Phi\ (\mathbf{x}_\perp = 0)$ получим, что

$$\langle p_\perp^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{\delta p_c^2}{1 - \varkappa^2}. \tag{25}$$

Из выражения (25) следует, что при высокой прозрачности сетки $\varkappa \simeq 1$, когда электрон совершает много колебаний до попадания на анод, ширина распределения F по поперечным импульсам становится большой и определяется прозрачностью сетки. В обратном случае малой прозрачности $\varkappa \ll 1$ ширина распределения $\sim 2\delta p_c^2/3$ определяется разбросом пучка, возникающим при однократном прохождении сетки.

Для получения значений функций распределения электронов в любой точке z нужно в полученных граничных значениях функций перейти к переменным полной энергии ε и квадрату поперечного импульса $p_\perp^2$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям и бесстолкновительному уравнению (1) и решают в общем виде поставленную задачу о нахождении распределения электронов системы.

Как показано в работах [2, 3], характеристики излучения системы в триодах с ВК в значительной мере определяются энергетической зависимостью частот колебания осциллирующих электронов и их распределением по амплитудам колебаний. Определение этих параметров требует решения уравнения (11) для самосогласованного потенциала. Аналитическое решение этого уравнения возможно только в случае отсутствия рассеяния на сетке, когда $\delta p_c = 0$.

В этом случае распределение электронов будет моноэнергетическим с $p_\perp = 0$ и решение φ_R уравнения (11) в области анод—виртуальный катод отличается от выражения, полученного в [4] только коэффициентом, учитывающим прозрачность сетки. При этом можно получить следующие соотношения, связывающие параметры системы.

Плотность тока катода, компенсирующая потери электронов на сетке, равна

$$j_k = j_0 \frac{1 - \varkappa^2}{1 + \varkappa^2}, \tag{26}$$

где j_0 — плотность тока диода, определяемая по закону Чайлда—Лэнгмюра.

Отношения времен полета T_L/T_R промежутков катод—анод и анод—виртуальный катод, размеров этих промежутков $z_a/(z_{bk} - z_a)$ и плотностей электронов n_L/n_R вблизи анода также выражаются через прозрачность анода

$$\frac{T_R}{T_L} = \frac{z_{bk} - z_a}{z_a} = \sqrt{\frac{n_L}{n_R}} = \sqrt{\frac{1 + \varkappa^2}{2\varkappa}}. \tag{27}$$

Для системы с конечным разбросом электронов по импульсам можно сделать некоторые выводы о влиянии взаимодействия электронов с анодом, используя для оценок распределение потенциала, взятое при $\delta p_c = 0$.

1. Как видно из соотношений (27), время пролета промежутка анод—виртуальный катод и плотность электронов, определяющие частоту и пороговые свойства излучения, существенно зависят от прозрачности анода. С уменьшением $\varkappa$ время пролета увеличивается, а плотность электронов падает.

2. Разброс электронов по амплитудам колебаний $\Delta a/a$ пропорционален величине $\delta p_c^2/[m^2c^2(1 - \varkappa^2)]$, а число электронов в промежутке анод—виртуальный катод $N_R \sim \varkappa/(1 + \varkappa^2)$. Эти зависимости позволяют объяснить наблюдавшееся в эксперименте [2, 3] влияние прозрачности сетки на уровень мощности излучения, пороговый ток и существование оптимального значения коэффициента прозрачности. Как показано в этих же работах, пороговое число электронов $N_\text{п}$ в промежутке анод—виртуальный катод пропорционально $(\Delta a/a)^{5/2}$, т. е. $N_\text{п} \sim [\delta p_c^2/m^2c^2(1 - \varkappa^2)]^{5/2}$, поэтому условие излучения $N_R > N_\text{п}$ не выполняется при малых $\varkappa$ вследствие того, что $N_R \to 0$, а при $\varkappa \sim 1$ — вследствие резкого увеличения $N_\text{п}$.

3. Оценим время установления полученного выше стационарного состояния с разбросом по поперечным импульсам $p_\perp^2 \sim \delta p_c^2/(1 - \varkappa^2)$, рассматривая процесс приближения к стационарному состоянию как диффузию в импульсном про-

странстве с коэффициентом диффузии $D \sim \delta p_c^2/\tau_п$, где $\tau_п$ — пролетное время. Тогда время выхода распределения на стационар можно оценить как

$$t \sim p_{\perp}^2/D \sim \tau_п/(1-\varkappa^2).$$

Отсюда следует, что даже при очень высоких значениях прозрачности сетки $\varkappa \sim 0.9$ время установления стационарного состояния не превышает нескольких пролетных времен.

Авторы выражают благодарность Т. В. Коваль и Н. С. Шулаеву за полезное обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. Гл. 2.

[2] *Григорьев В. П., Жерлицын А. Г., Кузнецов А. И., Мельников Г. В.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1863—1865.

[3] *Диденко А. Н., Григорьев В. П., Жерлицын А. Г.* // Плазменная электроника / Под ред. В. И. Курилко. Киев: Наукова думка, 1989. С. 112—131.

[4] *Воронин В. С., Зозуля Ю. Т., Лебедев А. Н.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 546—552.

Стерлитамакский филиал
Уфимского нефтяного института

Поступило в Редакцию
27 июня 1990 г.