

где  $\beta = (2x(0) - A(0)) / (x(0) + A(0))$ ,  $C = \overline{u^2(0)} / \overline{u_1^2(0)}$  — параметры, определяемые начальными условиями; тильда означает обезразмеривание с использованием соответствующих начальных значений.

При  $U_1 = \text{const}$  из (16) следует обычный закон затухания турбулентности за решеткой  $\overline{u^2}(x_1) \sim (x_1 + \text{const})^{-9/5}$ . Анализ решения системы (15) в общем случае и его сравнение с экспериментом представляют собой самостоятельную задачу, связанную, в частности, с конкретизацией значения параметра  $\beta$  и отбором тех опытных данных, которые удовлетворяют условиям применимости изложенного метода.

### Список литературы

- [1] Богданов С. Р. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 3. С. 949—952.
- [2] Лин А., Вольфштейн М. // Турбулентные сдвиговые течения. I. М.: Машиностроение, 1982. С. 343—360.
- [3] Матъе Ж., Жандель Д. // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 35—102.
- [4] Мьолснесс Р. К. // Турбулентные сдвиговые течения. II. М.: Машиностроение, 1983. С. 30—42.
- [5] Herring J. R. // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17. N 5. P. 859—872.
- [6] Saffman P. G. // Lecture Notes in Phys. 1981. Vol. 136. P. 1—9.
- [7] Lumley J. // Adv. Appl. Mech. 1978. Vol. 18. P. 123—176.

Государственный педагогический  
институт  
Петрозаводск

Поступило в Редакцию  
4 июля 1989 г.  
В окончательной редакции  
22 мая 1990 г.

12

Журнал технической физики, т. 61, в. 5, 1991

© 1991 г.

## ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА МАГНИТНОГО ПОЛЯ МНОГООРБИТНЫХ БЕТАТРОНОВ

А. А. Звонцов, В. А. Романова

Известно, что при выполнении определенных условий магнитное поле бетатрона может обеспечить одновременное ускорение частиц по нескольким равновесным орбитам, расположенным в одном рабочем зазоре [1, 2]. Равновесные орбиты можно расположить как в средней плоскости одного зазора [2], так и в параллельных плоскостях [1]. В последнем случае магнитное поле бетатрона является аксиально-периодическим и его фокусирующие свойства можно исследовать, так как оно относительно просто описывается аналитически [1].

Таким образом, целесообразно изучить особенности фокусировки частиц магнитным полем многоорбитного бетатрона, равновесные орбиты в котором расположены в средней плоскости одного рабочего зазора [2].

Будем считать, что в рабочем зазоре  $N$ -орбитного бетатрона сформировано азимутально-однородное управляющее поле, которое обеспечивает выполнение бетатронного соотношения на  $N$  равновесных радиусах и фокусировку частиц по  $r$  и  $z$  направлениям в окрестности каждого радиуса.

Следовательно, показатель спадания управляющего поля  $n_{0i}$  в окрестности каждой орбиты необходимо выбрать в пределах  $0 \leq n_{0i} \leq 1$ , а вертикальная компонента магнитного поля на равновесных орбитах при равной энергии ускоренных частиц должна удовлетворять равенству

$$H_{r01} \cdot r_{01} = H_{r02} \cdot r_{02} = \dots H_{r0i} \cdot r_{0i}; \quad i = 1 - N. \quad (1)$$

Для изучения фокусирующих свойств управляющего поля многоорбитного бетатрона воспользуемся потенциальной функцией [3]

$$V_m(r, z) = \frac{e}{2mc^2} \left[ A(r, z) + \frac{D}{r} \right]^2, \quad (2)$$

где  $m$ ,  $e$ ,  $c$  — масса, заряд частицы и скорость света;  $D$  — постоянная, характеризующая «начальные» условия ускоряемой частицы;  $A(r, z)$  — векторный потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = 0. \quad (3)$$

Представим решение уравнения (3) в виде ряда

$$A(r, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i(k_i, r) \cdot W_i(k_i, z), \quad (4)$$

где  $k$  — параметр разделения, в общем случае  $k_i$  — любое число, включая нуль;  $U_i(r)$ ,  $W_i(z)$  — функции, вид которых зависит от выбранного значения параметра разделения  $k_i$ .

Для описания магнитного поля  $N$ -орбитного бетатрона из ряда (4) выберем определенное число составляющих, для чего воспользуемся условиями существования «устойчивых» равновесных орбит. Эти условия запишем в виде необходимых условий существования минимума потенциальной функции в окрестности соответствующей орбиты [4]

$$A(r_{0i}, z=0) = A_{i0}; \quad \left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{z=0} r = r_{0i} = 0; \quad \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad n(r_{0i}) = n_{0i}, \quad i = 1 - N, \quad (5)$$

где  $A_{i0}$  — значения векторного потенциала на равновесных радиусах,

$$n_{0i} = r_{0i}^2 \frac{\partial^2 A(r, z)}{\partial z^2}. \quad (6)$$

При равной энергии ускоряемых частиц на всех орбитах нормированное значение  $A_{i0}$  будет равно 1. Изменение значения  $A_{i0}$  на соответствующей орбите эквивалентно изменению конечной энергии частиц, ускоряемых в окрестности этой орбиты.

Из (5) следует, что для определения векторного потенциала и всех характеристик магнитного поля  $N$ -орбитного бетатрона необходимо иметь систему не менее  $3N$  уравнений, так как условие симметрии поля относительно плоскости  $z=0$  выполняется, если в (4) функции  $W_i(z)$  будут содержать  $\cos k_i z$  или  $\text{ch } k_i z$ . Решение такой системы при достаточно большом  $N$  вызывает определенные трудности, но векторный потенциал двух- и трехорбитного бетатронов можно найти, используя простые сочетания нескольких составляющих ряда (4).

Рассмотрим это на примере двухорбитного бетатрона. Векторный потенциал магнитного поля двухорбитного бетатрона представим в виде

$$A(r, z) = A_1 + A_2 + A_3 = B_1 r + \frac{B_2}{r} + [aI_1(\omega r) + bK_1(\omega r)] \cos \omega z + [dJ_1(kr) + fY_1(kr)] \text{ch } kz, \quad (7)$$

где  $I_1(\omega r)$ ,  $K_1(\omega, r)$ ,  $J_1(kr)$ ,  $Y_1(kr)$  — функции Бесселя мнимого и действительного аргументов;  $A_1 = B_1 r + (B_2/r)$  — составляющая ряда (4), соответствующая нулевому значению параметра разделения  $k$ .

Для определения неизвестных коэффициентов  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $\omega$ ,  $k$  из (5) получаем систему из 6 уравнений

$$\begin{aligned} B_1 r_{0i} + \frac{B_2}{r_{0i}} + aI_1(\omega r_{0i}) + bK_1(\omega r_{0i}) + dJ_1(kr_{0i}) + fY_1(kr_{0i}) &= A_{i0}, \\ 2B_1 + \omega [aI_0(\omega r_{0i}) + bK_0(\omega r_{0i})] + k [dJ_0(kr_{0i}) + fY_0(kr_{0i})] &= \frac{A_{i0}}{r_{0i}}, \\ -\omega^2 [aI_1(\omega r_{0i}) + bK_1(\omega r_{0i})] + k^2 [dJ_1(kr_{0i}) + fY_1(kr_{0i})] &= \frac{n_{0i}}{r_{0i}^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) решается как система алгебраических уравнений, достаточно задать  $r_{01}$ ,  $r_{02}$ ,  $A_{10}$ ,  $A_{20}$ ,  $n_{01}$ ,  $n_{02}$  и обозначить

$$\omega = \alpha p, \quad k = \beta p, \quad \text{а} \quad p = \frac{1}{r_{01}} \sqrt{n_{01}}.$$

Фокусирующие свойства магнитного поля двухорбитного бетатрона изучались путем просчета различных вариантов на ЭВМ. В процессе расчетов в достаточно широком диапазоне менялись значения равновесных радиусов, показателей спадания поля и коэффициентов  $\alpha$

и  $\beta$ . Энергия ускоренных частиц принималась равной на обеих орбитах, а также исследовались фокусирующие возможности поля, если на одной из орбит энергия частиц отличалась от номинальной, условно принятой за единицу. Оценка фокусирующих свойств поля осуществлялась по его потенциальной функции  $V_m(r, z)$ . В некоторых случаях рассчитывались все характеристики магнитного поля.

Типичное изменение  $V_m(r, z)$  представлено на рис. 1, а, конфигурация области устойчивого движения частиц со следами нескольких эквипотенциальных поверхностей силового поля — на рис. 1, б, а характеристики магнитного поля — на рис. 2. Согласно рис. 1, частицы могут заполнять весь объем области действия фокусирующих сил, но в процессе ускорения магнитным полем они «разбиваются» на два пучка. Затем каждый пучок ускоряется по «собственной» орбите.

Величина внутренних барьеров потенциальной функции, которым пучок в процессе ускорения разбивается на два или несколько, зависит в основном от расстояния между равновесными орбитами. Например, при уменьшении  $r_{02}$  с  $8 \cdot 10^{-2}$  до  $6 \cdot 10^{-2}$  м величина этого барьера при одних и тех же значениях  $n_{01}$  и  $n_{02}$  уменьшается с 1.007 до 1.001. В последнем случае в зоне между  $r_{01}$  и  $r_{02}$  радиальная фокусировка очень мала.

Энергию частиц, ускоряемых по одной из орбит, можно менять в некоторых пределах. В случае двухорбитного бетатрона наиболее удобно менять энергию частиц, ускоряемых по орбите с большим равновесным радиусом. Параметры магнитного поля такого бетатрона легко определить по вышеописанной схеме, достаточно изменить, например, значение  $A_{20}$ . Поведение потенциальной функции  $V_m(r, z=0)$  при различных значениях  $A_{20}$  для двух-

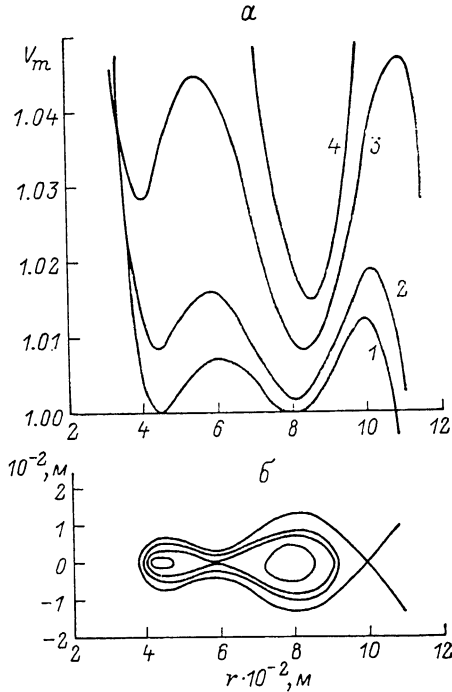


Рис. 1. Типичное изменение потенциальной функции магнитного поля  $V_m(r, z)$  и область действия фокусирующих сил (б) двухорбитного бетатрона.

$r_{01}=4.5 \cdot 10^{-2}$  м,  $r_{02}=8 \cdot 10^{-2}$  м,  $A_{10}=A_{20}=1$ ,  $n_{01}=n_{02}=0.66$ ;  $z, m: 1-0, 2-0.5 \cdot 10^{-2}, 3-1 \cdot 10^{-2}, 4-1.5 \cdot 10^{-2}$ .

орбитного бетатрона показано на рис. 3. Согласно рис. 3, азимутально-однородное магнитное поле может обеспечить ускорение и фокусировку частиц по двум орбитам, если отклонение энергии на одной из орбит не превышает некоторой допустимой величины. Для рассмотренного примера допустимое отклонение энергии частиц составляет 6—8 %.

Расчеты показали, что сечение локальной области устойчивого движения частиц, существующей в окрестности каждой равновесной орбиты, увеличивается с ростом номера орбиты. Соотношения между линейными размерами этих областей достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными из условия равенства фокусирующих сил на границе каждой области. Если впуск частиц осуществлен от одного источника и в процессе ускорения частицы получают равное приращение энергии, то можно принять

$$F_{x1} = F_{x2} = \dots F_{xi}; \quad F_{x1} = E_{x2} = \dots F_{xi}; \quad i = 1 - N, \quad (9)$$

где  $F_{xi}, F_{xi}$  — фокусирующие силы, действующие на частицы на границе каждой локальной области.

Не учитывая влияние пространственного заряда ускоряемых частиц, из (9) получаем следующие соотношения:

$$\frac{n_{01} \cdot \delta_1}{r_{01}^2} = \frac{n_{02} \cdot \delta_2}{r_{02}^2} = \dots = \frac{n_{0N} \delta_N}{r_{0N}^2},$$

$$\frac{(1 - n_{01}) x_1}{r_{01}^2} = \frac{(1 - n_{02}) x_2}{r_{02}^2} = \dots = \frac{(1 - n_{0N}) x_N}{r_{0N}^2}, \quad (10)$$

где  $\delta_i$ ,  $x_i$  — вертикальные и радиальные размеры соответствующей локальной области.

Из последнего выражения при  $n_{01}=n_{02}=\dots n_{0i}$  получаем, что линейные размеры области действия фокусирующих сил, а значит, и размеры пучка ускоряемых частиц увеличиваются с ростом номера орбиты как отношение квадратов радиусов равновесных орбит. Следовательно, обеспечить равные сечения области действия фокусирующих сил при рав-

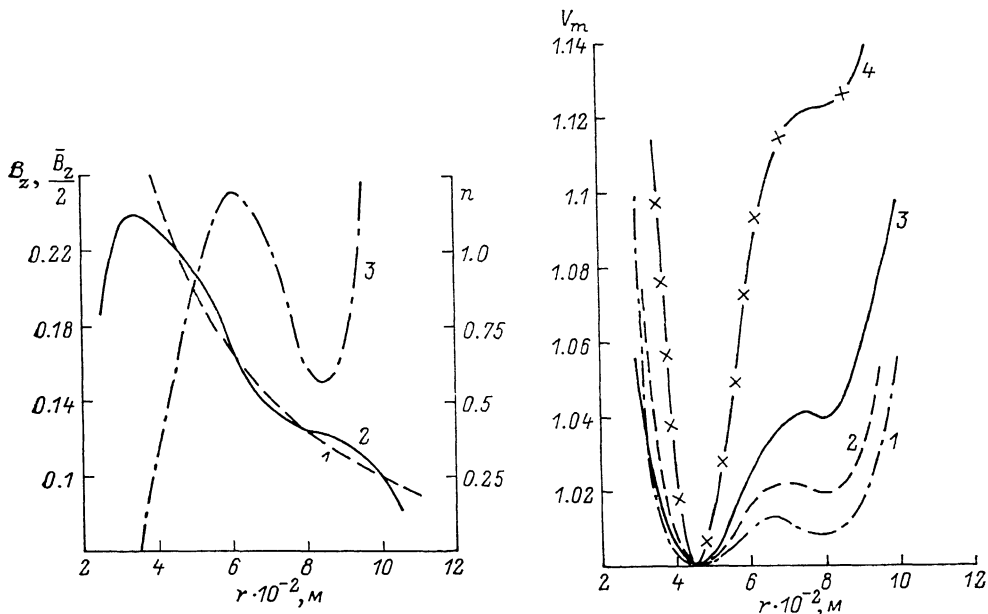


Рис. 2. Изменение характеристик магнитного поля двухорбитного бетатрона в плоскости  $z=0$ .

$r_{01}=4.5 \cdot 10^{-2}$  м,  $r_{02}=8 \cdot 10^{-2}$  м,  $A_{10}=A_{20}=1$ ,  $n_{01}=n_{02}=0.66$ ; 1 — средняя по площади индукция  $B_z$  магнитного поля, 2 — индукция  $B_z$  управляющего поля; 3 — показатель спадания  $n$  управляющего поля.

Рис. 3. Изменение потенциальной функции двухорбитного бетатрона  $V_m(r, z=0)$  в зависимости от энергии ускоренных частиц на второй равновесной орбите.

$r_{01}=4.5 \cdot 10^{-2}$  м,  $r_{02}=8 \cdot 10^{-2}$  м,  $n_{01}=n_{02}=0.66$ ,  $A_{10}=1$ ;  $A_{20}$ : 1 — 1.005, 2 — 1.01, 3 — 1.02, 4 — 1.06.

ных их величинах в окрестности всех равновесных орбит практически невозможно. Поэтому в окрестности некоторых орбит целесообразно использовать элементы «сильной» фокусировки. Так, в двухорбитном бетатроне в окрестности второй орбиты целесообразно использовать управляющее поле с азимутальной вариацией. Эти замечания необходимо учитывать при проектировании электромагнита и ускорительной камеры многоорбитных бетатронов.

Рассмотренное представление векторного потенциала позволяет рассчитать все характеристики управляющего магнитного поля и, следовательно, сократить объем физического моделирования необходимого при разработке электромагнитов как многоорбитных, так и одноорбитных бетатронов.

### Список литературы

[1] Звонцов А. А., Филипова В. А., Чахлово В. Л. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 7. С. 1300—1302.  
 [2] Звонцов А. А., Касьянов В. А., Чахлово В. Л. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 9. С. 1818—1824.  
 [3] Родимов Б. Н. // Изв. ТПИ. Томск, 1957. Т. 87. С. 3—7.  
 [4] Звонцов А. А., Касьянов В. А., Романова В. А., Чахлово В. Л. // Тр. X Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1987. Т. 2. С. 121—123.

Научно-исследовательский институт интроскопии  
 Томского политехнического института  
 им. С. М. Кирова

Поступило в Редакцию  
 26 января 1990 г.