Что касается положения z_m и величины E_m максимума профиля поля $E(z)$, то они также определяются потоком энергии. Заметим, что рассматриваемые НПВ не существуют при $E_0 < E_s$.

Список литературы

[1] *Tomlinson W. J.* // Opt. Lett. 1980. Vol. 5. N 7. P. 323—325.
[2] *Maradudin A. A.* // Z. Phys. 1981. Vol. B41. N 4. P. 341—344.
[3] *Kaplan A. E.* // Phys. Rev. 1985. Vol. 55. N 12. P. 1291—1294.
[4] *Enns R. H., Rangnekar S. S., Kaplan A. E.* // Phys. Rev. 1987. Vol. A36. N 3. P. 1270—1279.
[5] *Хаджи П. И., Славов Ю. Д.* // УЖФ. 1988. Т. 33. № 6. С. 824—827.

Институт прикладной физики
АН МССР
Кишинев

Поступило в Редакцию
19 ноября 1989 г.
В окончательной редакции
24 сентября 1990 г.

01; 03

Журнал технической физики, т. 61, в. 5, 1991

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ РАЗВИТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: СКЕЙЛИНГ, ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ, ПАМЯТЬ

С. Р. Богданов

В работе [1] осуществлен расчет параметров развитой изотропной турбулентности за решеткой на основе гипотезы о масштабной инвариантности (скейлинге) длинноволновых флуктуаций поля скорости. Одна из основных трудностей, возникающих при обобщении этого метода на случай турбулентности со сдвигом, заключается в отыскании неизотропной формы спектральных тензоров. Известные попытки их непосредственной параметризации с помощью тензора рейнольдсовых напряжений $\overline{u_i u_j}$, а также тензора средних скоростей деформаций $U_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j$ [2, 3], строго говоря, оправданы лишь для случая слабой анизотропии.

С другой стороны, в работе [4] были сформулированы ослабленные формы гипотезы подобия Колмогорова, учитывающие возможные нарушения локальной изотропии в инерционном интервале. Их использование применительно ко всему диапазону длинноволновых возмущений позволяет в рамках гипотезы скейлинга записать следующее факторизованное представление для спектральных тензоров при $k \ll k_d$:

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = f_{ij}(\mathbf{x}, \theta)\, \varphi(kr_c); \qquad T_{il,j}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = f_{il,j}(\mathbf{x}, \theta)\, t(kr_c). \tag{1}$$

Здесь $k_d = (\bar{\varepsilon}/\eta^3)^{1/4}$ — диссипативное волновое число, $\bar{\varepsilon}$ — средняя скорость диссипации энергии, η — коэффициент кинематической вязкости, r_c — корреляционный радиус турбулентности, $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int \overline{u_i(\mathbf{x})\, u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \exp(-i\mathbf{kr})\, d\mathbf{r}$, $T_{il,j}$ — кубичный по скоростям двухточечный спектральный тензор, $\theta = \mathbf{k}/k$,

Есть основания предполагать [5], что набор секулярных параметров анизотропной турбулентности в общем случае включает помимо $\bar{\varepsilon}$ и r_c лишь небольшое число низших ориентационных моментов функций f_{ij}, определяемых следующим образом:

$$f_{ij}^{(l \ldots m)}(\mathbf{x}) = \int f_{ij}(\mathbf{x}, \theta)\, \theta_l \ldots \theta_m d\theta. \tag{2}$$

Здесь интегрирование осуществляется по поверхности единичной сферы. Момент нулевого порядка $f_{ij}^{(0)}$ определяет среднее по ориентациям значение функции f_{ij}.

Из определения (2) и представления (1) следует, что моменты нулевого порядка непосредственно связаны с тензором $\overline{u_i u_j}$, а второго — с «быстрой» частью $\Phi_{ij,2}$ тензора корреляций пульсаций давления и скорости деформаций

$$\overline{u_i u_j} = ar_c^{-3} f_{ij}^{(0)}; \quad \Phi_{ij,\,2} = -2U_{lm} f_{mj}^{(li)} ar_c^{-3}. \tag{3}$$

Здесь $a \equiv \int_0^\infty \varphi(x)\, x^2 dx$ — структурная константа спектра. Для конкретизации набора секулярных величин обратимся к уравнению для тензора F_{ij}

$$U_k \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + (U_{il} F_{lj})_s - U_{lm} k_l \frac{\partial F_{ij}}{\partial k_m} - ik_l (T_{il,\,j})_s + 2\eta k^2 F_{ij} + ik_l \theta_m (\theta_i T_{lm,\,j})_s =$$
$$= 2U_{lm} (\theta_i \theta_l F_{mj})_s, \tag{4}$$

где s означает симметризацию по свободным индексам, по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Диффузионные слагаемые в (4) при $u \ll U$ можно не учитывать.

Интегрируя соотношение (4) по всем θ, получаем уравнение Крэйа, которое с учетом (1) запишем в виде

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(0)}}{\partial x_k} \varphi + U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(0)} k \frac{\partial \varphi}{\partial k} + (U_{il} f_{lj}^{(0)})_s \varphi - U_{lm} \varphi \int k_l \frac{\partial f_{ij}}{\partial k_m} d\theta -$$
$$- U_{lm} f_{ij}^{(lm)} k \frac{\partial \varphi}{\partial k} + 2\eta k^2 f_{ij}^{(0)} \varphi + (f_{il,\,j}^{(l)} - f_{lm,\,j}^{(lmi)})_s kt = 2U_{lm} (f_{mj}^{(li)})_s \varphi. \tag{5}$$

При дальнейшем рассмотрении существенную роль играет использование информации о поведении универсальных функций φ и t на малых k. Следуя работе [6], примем следующие условия для $kr_c \to 0$:

$$\varphi(kr_c) \to \text{const}; \quad t(kr_c) \sim kr_c. \tag{6}$$

Из соотношений (6) следует, что спектральные функции F_{ij} и T_{ilj}, вообще говоря, неаналитичны при $k_i \to 0$ (в случае изотропной турбулентности, когда $F_{ij} \sim (\delta_{ij} - \theta_i \theta_j)$, эта неаналитичность дипольного типа).

Переходя в (5) к пределу при $k \to 0$, с учетом условий (6) после некоторых преобразований получаем уравнение для моментов нулевого порядка

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(0)}}{\partial x_k} + (U_{il} f_{lj}^{(0)})_s - 3U_{lm} f_{ij}^{(lm)} = 2U_{lm} (f_{mj}^{(li)})_s. \tag{7}$$

Уравнение (7) можно рассматривать как баланс энергии наиболее крупных вихрей. Оно незамкнуто, так как содержит линейные комбинации моментов второго порядка. Часть этих комбинаций можно найти, преобразуя уравнение (5) с учетом формулы (7). При этом получим

$$\left(U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} f_{ij}^{(0)} - U_{lm} f_{ij}^{(lm)}\right) k \frac{\partial \varphi}{\partial k} + (f_{il,\,j}^{(l)} - f_{lm,\,j}^{(lmi)})_s kt = -2\eta k^2 f_{ij}^{(0)} \varphi. \tag{8}$$

Далее из сравнения (8) с соответствующим уравнением для φ, полученным при изучении изотропной турбулентности, имеем

$$U_{lm} f_{ij}^{(lm)} = A f_{ij}^{(0)}, \tag{9}$$

где

$$A = \tau - \frac{t_d}{2} U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k};$$

$t_d = (\eta/\bar{\varepsilon})^{1/2}$ — колмогоровский временно́й масштаб; τ — параметр, характеризующий степень развитости потока («температура»).

Соотношение (9) представляет интерес не только в связи с задачей замыкания уравнения (7). Так, интегрируя (8) по всем $\mathbf{k}$, уравнение баланса турбулентной энергии можно с учетом формулы (9) и допущения об изотропности пульсаций скорости в диссипативном интервале привести к виду

$$2\bar{\varepsilon}\delta_{ij}/3 - \Phi_{ij,\,1} = 3ar_c^{-3} \tau t_d^{-1} f_{ij}^{(0)}. \tag{10}$$

Здесь $\Phi_{ij,1}$ — нелинейная часть тензора корреляций «давление—скорость деформаций». Сворачивая в формуле (10) индексы, получаем алгебраическое соотношение для $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = 3t_d^{-1}\tau\overline{u^2}/2. \tag{11}$$

В свою очередь с учетом (11) уравнение (10) можно записать в виде

$$\Phi_{ij,1} = -\frac{2\bar{\varepsilon}}{\overline{u^2}}\left(\overline{u_iu_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{u^2}\right). \tag{12}$$

Формула (12) совпадает с известным соотношением Ротта, которое, таким образом, в рамках рассматриваемого подхода является точным. Константа Ротта, согласно (12), равна 2. Последнее означает [7], что нелинейные взаимодействия фактически не участвуют в процессе «изотропизации», а значит, в некотором смысле развитый турбулентный поток обладает весьма существенной «памятью» о порождающем его сдвиге.

Использование формулы (9) не решает полностью проблемы замыкания уравнения (7): с ее помощью удается найти лишь часть линейных комбинаций моментов $f_{ij}^{(lm)}$. Для отыскания оставшихся комбинаций $P_{ij} \equiv U_{lm}f_{mj}^{(li)}$ естественно обратиться к рассмотрению уравнений для моментов второго порядка. Анализируя эти, хотя и более громоздкие, уравнения аналогично тому, как это было сделано для $f_{ij}^{(0)}$, можно получить дополнительные соотношения для отыскания величин $f_{ij}^{(lm)}$. Одно из них — алгебраическое

$$2U_{lm}^2 f_{ij}^{(lm)} = f_{ij}^{(0)}\left(2A^2 - U_k\frac{\partial A}{\partial x_k}\right) + f_{ij}^{(pq)}U_k\frac{\partial U_{pq}}{\partial x_k}, \tag{13}$$

второе — дифференциальное

$$U_k\frac{\partial \hat{P}\hat{U}}{\partial x_k} + 4\hat{P}\hat{U}^2 - 9A(\hat{P}\hat{U}) - U_k\frac{\partial \hat{U}}{\partial x_k}\hat{P} = U_k f_{ij}^{(pq)}U_{qj}\frac{\partial U_{pi}}{\partial x_k}. \tag{14}$$

Выражение $\hat{P}\hat{U}$ и аналогичные ему используются для обозначения свертки соответствующих тензоров.

Уравнения (7), (9), (11), (13), (14), дополненные уравнениями Рейнольдса для средней скорости и обычным для теории критических явлений представлением $r_ck_d = \tau^{-\nu}$, образуют замкнутую систему для величин $\bar{\varepsilon}$, r_c, $f_{ij}^{(0)}$, $f_{ij}^{(lm)}$. Индекс ν в колмогоровском приближении равен 3/2 [1]. В отличие от моделей замыкания второго поколения связь между тензорами $\Phi_{ij,2}$ и $\overline{u_iu_j}$, U_{ij} в указанной системе в общем случае, как следует из формул (3) и (14), не сводится к алгебраическим соотношениям.

В качестве примера рассмотрим течение за решеткой при осесимметричном поджатии, когда

$$\hat{U} = \varkappa\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}; \qquad \varkappa = \frac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}.$$

Для характеристик на оси потока полученная выше замкнутая система уравнений принимает вид

$$U_1\frac{df_{11}^{(0)}}{dx_1} = 7Af_{11}^{(0)}; \qquad U_1\frac{df_{ii}^{(0)}}{\partial x_1} = (3A + 2\varkappa)f_{ii}^{(0)} - 6\varkappa f_{11}^{(0)};$$

$$U_1\frac{dy}{dx_1} = \left(2U_1\frac{d\ln\varkappa}{dx_1} + 9A - 4\varkappa\right)y; \qquad A = U_1\frac{d\ln r_c}{dx_1} - 2\frac{\tau}{t_d}. \tag{15}$$

Здесь x_1 — расстояние до начала участка искажения, $y = (A+\varkappa)\varkappa f_{11}^{(0)}$. Решение системы (15) сводится к квадратурам. При этом, в частности, для интенсивности турбулентности $\overline{u^2}(x_1)$ получаем

$$\tilde{\overline{u^2}} = \frac{\tilde{U}_1((C\beta - \beta - 1)\tilde{U}_1^3 + (C + \beta + 1))}{(1 + \beta\tilde{U}_1^3)^{1/2}} \times$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{C\beta - \beta - 1}{\beta + 1}\right)^{1/2}\frac{(\bar{u}^2(0))^{1/2}}{r_c(0)\,U_1(0)}\int_0^{x_1}\left(1 + \frac{C + \beta + 1}{C\beta - \beta - 1}\tilde{U}_1^{-3}\right)^{1/2}dx_1\right]^{-6/5}, \tag{16}$$

где $\beta=(2\varkappa(0)-A(0))/(\varkappa(0)+A(0))$, $C=\overline{u^2}(0)/\overline{u_1^2}(0)$ — параметры, определяемые начальными условиями; тильда означает обезразмеривание с использованием соответствующих начальных значений.

При $U_1=\text{const}$ из (16) следует обычный закон затухания турбулентности за решеткой $\overline{u^2}(x_1)\sim(x_1+\text{const})^{-6/5}$. Анализ решения системы (15) в общем случае и его сравнение с экспериментом представляют собой самостоятельную задачу, связанную, в частности, с конкретизацией значения параметра β и отбором тех опытных данных, которые удовлетворяют условиям применимости изложенного метода.

Список литературы

[1] *Богданов С. Р.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 3. С. 949—952.
[2] *Лин А., Вольфштейн М.* // Турбулентные сдвиговые течения. I. М.: Машиностроение, 1982. С. 343—360.
[3] *Матье Ж., Жандель Д.* // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 35—102.
[4] *Мьолснесс Р. К.* // Турбулентные сдвиговые течения. II. М.: Машиностроение, 1983. С. 30—42.
[5] *Herring J. R.* // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17. N 5. P. 859—872.
[6] *Saffman P. G.* // Lecture Notes in Phys. 1981. Vol. 136. P. 1—9.
[7] *Lumley J.* // Adv. Appl. Mech. 1978. Vol. 18. P. 123—176.

Государственный педагогический институт
Петрозаводск

Поступило в Редакцию
4 июля 1989 г.
В окончательной редакции
22 мая 1990 г.

---

12 *Журнал технической физики, т. 61, в. 5, 1991*

ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА МАГНИТНОГО ПОЛЯ МНОГООРБИТНЫХ БЕТАТРОНОВ

А. А. Звонцов, В. А. Романова

Известно, что при выполнении определенных условий магнитное поле бетатрона может обеспечить одновременное ускорение частиц по нескольким равновесным орбитам, расположенным в одном рабочем зазоре [1, 2]. Равновесные орбиты можно расположить как в средней плоскости одного зазора [2], так и в параллельных плоскостях [1]. В последнем случае магнитное поле бетатрона является аксиально-периодическим и его фокусирующие свойства можно исследовать, так как оно относительно просто описывается аналитически [1].

Таким образом, целесообразно изучить особенности фокусировки частиц магнитным полем многоорбитного бетатрона, равновесные орбиты в котором расположены в средней плоскости одного рабочего зазора [2].

Будем считать, что в рабочем зазоре N-орбитного бетатрона сформировано азимутально-однородное управляющее поле, которое обеспечивает выполнение бетатронного соотношения на N равновесных радиусах и фокусировку частиц по r и z направлениям в окрестности каждого радиуса.

Следовательно, показатель спадания управляющего поля n_{0i} в окрестности каждой орбиты необходимо выбрать в пределах $0\leqslant n_{0i}\leqslant 1$, а вертикальная компонента магнитного поля на равновесных орбитах при равной энергии ускоренных частиц должна удовлетворять равенству

$$H_{z01}\cdot r_{01}=H_{z02}\cdot r_{02}=\ldots H_{z0i}\cdot r_{0i};\quad i=1-N. \tag{1}$$

Для изучения фокусирующих свойств управляющего поля многоорбитного бетатрона воспользуемся потенциальной функцией [3]

$$V_m(r,z)=\frac{e}{2mc^2}\left[A(r,z)+\frac{D}{r}\right]^2, \tag{2}$$