

01

© 1991 г.

О МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ ФЕЙГЕНБАУМА

Е. Н. Ерастова, С. П. Кузнецов

Исследуется механизм возникновения квазипериодических колебаний в двух идентичных симметрично связанных системах Фейгенбаума. Предложен метод описания дискретных отображений вблизи точки бифуркации путем перехода от дискретного к непрерывному времени, который позволяет эффективно анализировать динамику связанных систем. Показано, что независимо от вида связи в определенных областях параметров нелинейности и связи должны существовать квазипериодические режимы, причем внутри этих областей частота новой колебательной составляющей является функцией нелинейности и связи. Пороговая частота квазипериодики подчиняется следующим законам подобия: при увеличении временного масштаба основных колебаний в 2 раза она остается неизменной для диссипативной связи и пересчитывается в $|a|/2$ раз в случае инерционной связи, где $a = -2.5029$ — известный масштабный множитель Фейгенбаума.

Введение

Идея использовать простые системы, демонстрирующие хаос, в качестве элементов для конструирования составных моделей более сложных систем получила определенное распространение в литературе. В частности, системы, построенные из подсистем, в которых переход к хаосу осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода, рассматривались в работах [1-4]. В настоящей статье сконцентрируем внимание на ситуации, когда подсистемы находятся у порога бифуркации. При этом описание индивидуальной подсистемы упрощается и путем перехода от дискретного к непрерывному времени сводится к некоторому каноническому дифференциальному уравнению. Соответственно для составной модели возникает система таких уравнений, которые можно анализировать традиционными методами качественной теории. Этот подход может быть распространен на системы различной структуры, в том числе и на распределенные. Здесь в качестве конкретной его иллюстрации будет рассмотрен и объяснен наблюдавшийся в численных и физических экспериментах феномен возникновения квазипериодических колебаний в связанных системах Фейгенбаума.

1. Динамика индивидуальной системы у порога бифуркации удвоения периода

Обратимся сначала к простейшему модельному отображению, демонстрирующему переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода,

$$X_{n+1} = \lambda - X_n^2, \quad (1)$$

где X — динамическая переменная, n — дискретное время, λ — управляющий параметр, и поясним на этом примере идею перехода к описанию динамики в непрерывном времени.

Пусть значение управляющего параметра в (1) близко к λ_n — точке бифуркации удвоения 2^n -цикла, а \bar{X}_0 — один из элементов этого цикла. Рассмотрим поведение малого возмущения динамической переменной вблизи точки \bar{X}_0 в зависимости от надкритичности $\Lambda = \lambda - \lambda_n$. Выполним отображение (1) 2^{n+1} раза с начальным условием $X_0 = \bar{X}_0 + \xi_0$ и будем рассматривать результат этой процедуры как функцию начального элемента X_0 : $X_{2^{n+1}} = f(X_0)$. Разложив полученную функцию в ряд по малым величинам Λ , ξ_0 , приходим к приближенному отображению за 2^{n+1} шага дискретного времени

$$\xi_{2^{n+1}} = \xi_0 + A\Lambda\xi_0 + B\xi_0^3. \quad (2)$$

Здесь

$$A = \frac{\partial^2 X_{2^{n+1}}}{\partial X_0 \partial \lambda}, \quad B = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 X_{2^{n+1}}}{\partial X_0^3}$$

— производные, вычисленные в точке $X_0 = \bar{X}_0$; $\lambda = \lambda_n$. Вблизи бифуркации изменение возмущения за два периода исходного цикла мало. Поэтому от выражения (2) можно перейти к дифференциальному уравнению, в котором время измеряется в единицах 2^{n+1} ,

$$\dot{\xi} = A\Lambda\xi + B\xi^3. \quad (3)$$

Коэффициенты A , B можно найти численно с помощью простого алгоритма. Дифференцируя отображение (1), приходим к цепочке рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda_n - X^2, & [X]_{2^n} &= [X]_0; \\ \dot{X}_{X_0} &= -2XX_{X_0}, & [X_{X_0}] &= 1; \\ \dot{X}_\lambda &= 1 - 2XX_\lambda, & [X_\lambda]_{2^n} &= [X_\lambda]_0; \\ \dot{X}_{\lambda X_0} &= -2XX_{\lambda X_0} - 2X_\lambda X_{X_0}, & [X_{\lambda X_0}]_0 &= 0; \\ \dot{X}_{X_0 X_0} &= -2XX_{X_0 X_0} - 2X_{X_0}^2, & [X_{X_0 X_0}]_0 &= 0; \\ \dot{X}_{X_0 X_0 X_0} &= -2XX_{X_0 X_0 X_0} - 6X_{X_0} X_{X_0 X_0}, & [X_{X_0 X_0 X_0}]_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь рядом с отображением для каждой переменной приведены начальные или краевые условия, которым она должна удовлетворять. Отметим, что коэффициент B зависит от того, какой из элементов цикла взят за исходный. В таблице

n	A	B	B ₁	Диссипативная связь		
				F=F ₁	H	H ₁
1	8.0	-11.716	-68.284	-28.0	-9.657	1.657
2	35.793	-72.028	-347.503	-52.495	-17.572	3.642
3	165.756	-449.477	-2254.23	-105.288	-34.343	6.848
4	772.507	-2813.25	-14093.97	-210.629	-69.431	13.859
5	3605.60	-17620.41	-88334.22	-421.213	-138.667	27.661
6	16833.83	-110379.3	-553353.9	-842.445	-277.411	55.336
7	78599.14	-691470.1	-3466526	-1684.88	-554.804	110.667

Продолжение

n	Инерционная связь		
	F=F ₁	H	H ₁
1	-17.536	-8.807	1.511
2	40.782	19.940	-4.133
3	-102.900	-51.260	10.221
4	257.066	127.950	-25.540
5	-643.592	-320.337	63.899
6	1610.40	801.598	-159.897
7	-4031.43	-2006.57	400.252

в двух левых столбцах приведены значения A, B для всех n от 1 до 7 для случая, когда в качестве начального выбран ближайший к экстремуму элемент цикла.

Обсудим теперь свойства уравнения (3). При $\Lambda < 0$ оно имеет единственную неподвижную точку $\xi=0$, которая теряет устойчивость при $\Lambda=0$, после чего возникает два устойчивых симметричных положения равновесия $\xi = \pm\sqrt{-A\Lambda/B}$. Эта бифуркация соответствует удвоению периода 2^n -цикла исходного отображения (1). На рис. 1, а представлен график зависимости положений равновесия ξ от величины надкритичности Λ . Это кусочек известного «дерева Фейгенбаума» [5] в окрестности точки бифуркации. Временная динамика уравнения (3) при

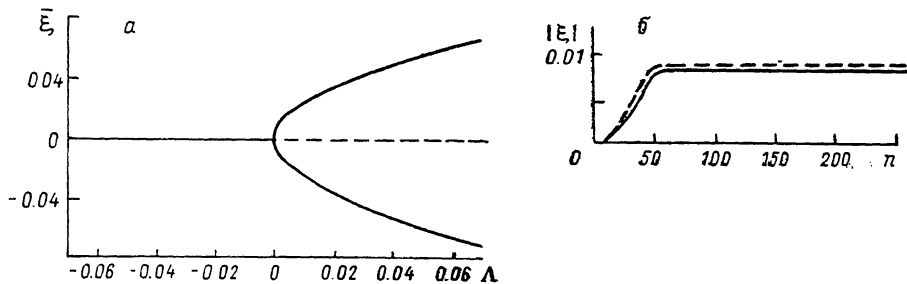


Рис. 1. Зависимость положений равновесия уравнения (3) от величины надкритичности (а) и временная динамика возмущения 2-цикла (б) для квадратичного отображения.

$\Lambda=0.01$ для случая 2-цикла иллюстрируется рис. 1, б (сплошная линия). Там же штриховой линией показана зависимость решения исходного отображения (1) от дискретного времени n . Сопоставление этих двух графиков показывает, что полученное приближенное каноническое уравнение (3) адекватно описывает динамику квадратичного отображения, а значит, и характерную универсальную динамику вблизи точки бифуркации удвоения периода. Универсальные свойства перехода к хаосу проявляются для уравнения (3) в скейлинговых свойствах коэффициентов: как видно из таблицы, коэффициент A при переходе к циклу удвоенного периода пересчитывается в $\delta=4.6692$ раза, а B — в a^2 раз, $a=-2.5029$, где δ и a — известные константы Фейгенбаума.

2. Исходные уравнения связанных систем Фейгенбаума

Перейдем теперь к анализу двух связанных систем. В работе [4] с помощью ренормгруппового анализа было показано, что в качестве универсальной модели для рассматриваемой задачи можно использовать систему двух логистических отображений

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \lambda - X_n^2 + \varepsilon(K_1(X_n - Y_n) + K_2(X_n^2 - Y_n^2)), \\ Y_{n+1} &= \lambda - Y_n^2 + \varepsilon(K_1(Y_n - X_n) + K_2(Y_n^2 - X_n^2)), \end{aligned} \quad (5)$$

где X, Y — динамические переменные первой и второй подсистем; λ, ε — параметры нелинейности и связи; $K_{1,2}$ — коэффициенты, определяющие характер связи.

При значениях параметров $K_1=0, K_2=1$ реализуется диссипативная связь, а при $K_1=1, K_2=-0.088$ — инерционная. Согласно результатам ренормгруппового анализа, других существенных типов связи нет.

В отсутствие связи ($\varepsilon=0$) система (5) демонстрирует обычный каскад бифуркаций удвоения периода, заканчивающийся переходом к хаосу. Отличие от одиночного квадратичного отображения состоит в том, что для составной системы каждое состояние периода 2^n может быть реализовано 2^n различными способами, отличающимися сдвигом фаз колебаний в подсистемах на один шаг дискретного времени. Введение связи модифицирует эти режимы, но сохраняет возможность их классификации по величине сдвига колебаний несвязанных подсистем [4, 6]. В работах [4, 6, 7] показано, что для режимов, характеризующих

щихся сдвигом фаз колебаний подсистем на половину периода, в определенных областях параметров λ, ϵ возможно возникновение квазипериодических движений.

3. Динамика связанных систем вблизи точки бифуркации индивидуальной подсистемы

Распространив рассуждения раздела 1 на случай связанных систем Фейгенбаума (5), нетрудно получить систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику составной системы в окрестности точки бифуркации,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\Lambda\xi + B\xi^3 + F\epsilon\xi + H\epsilon\eta, \\ \dot{\eta} &= A_1\Lambda\eta + B_1\eta^3 + F_1\epsilon\eta + H_1\epsilon\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

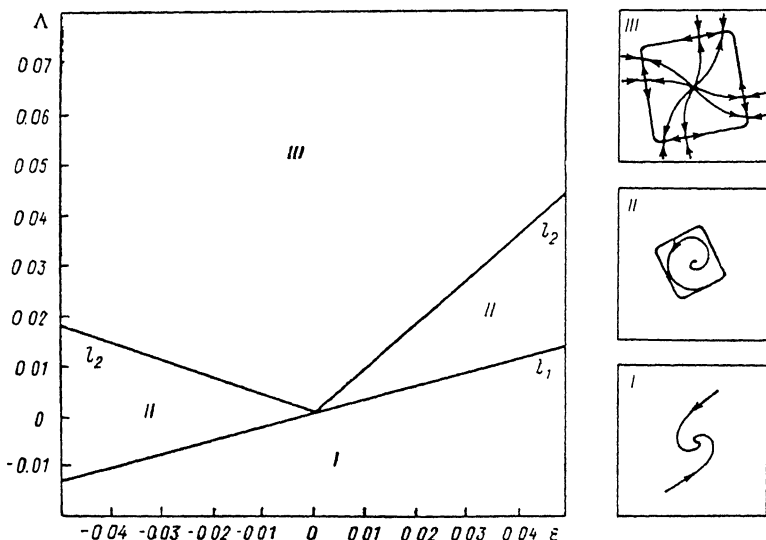


Рис. 2. Карта динамических режимов приближенных канонических уравнений для двух связанных систем Фейгенбаума.

Здесь ξ, η — возмущения элементов X, Y цикла периода 2^n , коэффициенты F, H даются выражениями

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial^2 X_{2^{n+1}}}{\partial X_0 \partial \epsilon}, & H &= \frac{\partial^2 X_{2^{n+1}}}{\partial Y_0 \partial \epsilon}, \\ F_1 &= \frac{\partial^2 Y_{2^{n+1}}}{\partial Y_0 \partial \epsilon}, & H_1 &= \frac{\partial^2 Y_{2^{n+1}}}{\partial X_0 \partial \epsilon}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем производные вычисляются в точке $\epsilon=0, \lambda=\lambda_n, X_0=X, Y_0=Y$. Численная процедура определения коэффициентов F, H аналогична описанной в разделе 1, следует лишь учесть дополнительные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} 'X_n &= -2XX_n + K_1(X - Y) + K_2(X^2 - Y^2), & [X_n]_{2^n} &= [X_n]_0; \\ 'Y_n &= -2YY_n + K_1(Y - X) + K_2(Y^2 - X^2), & [Y_n]_{2^n} &= [Y_n]_0; \\ 'X_{X_0\epsilon} &= -2XX_{X_0\epsilon} - 2X_{X_0}X_n + K_1X_{X_0} + 2K_2XX_{X_0}, & [X_{X_0\epsilon}]_0 &= 0; \\ 'X_{Y_0\epsilon} &= -2XX_{Y_0\epsilon} - K_1Y_{Y_0} - 2K_2YY_{Y_0}, & [X_{Y_0\epsilon}]_0 &= 0; \\ 'Y_{Y_0\epsilon} &= -2YY_{Y_0\epsilon} - 2Y_{Y_0}Y_n + K_1Y_{Y_0} + 2K_2YY_{Y_0}, & [Y_{Y_0\epsilon}]_0 &= 0; \\ 'Y_{X_0\epsilon} &= -2YY_{X_0\epsilon} - K_1X_{X_0} - 2K_2XX_{X_0}, & [Y_{X_0\epsilon}]_0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем рассматривать здесь именно противофазные режимы, порождающие квазипериодические аттракторы. В таблице приведены значения всех коэффициентов F, H для $n=1-7$ для случаев инерционной и диссипативной связи.

Для первой подсистемы в качестве X_0 взят ближайший к экстремуму элемент, для второй — сдвинутый по фазе на половину периода цикла Y_0 .

Скажем несколько слов о структуре уравнений (6). Можно показать, что для противофазных движений выполняются соотношения $F=F_1$, $BH=-B_1H_1$, что позволяет упростить систему (6):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= C\xi - \xi^3 - D\theta; \\ \dot{\theta} &= C\theta - \theta^3 + D\xi,\end{aligned}\quad (9)$$

где $\theta = \sqrt{B_1/B} \eta$, $C = -(A\Lambda + F\epsilon)/B$, $D = -\sqrt{|H_1H|} \epsilon/B$.

Эта система уравнений содержит всего два существенных параметра C и D , которым можно придать смысл нормированных надкритичности и связи. Таким образом, анализ динамики связанных отображений в окрестности точек бифуркации индивидуальной подсистемы сводится к двухпараметрическому, причем к однотипному для различных типов связи и для всех бифуркационных точек.

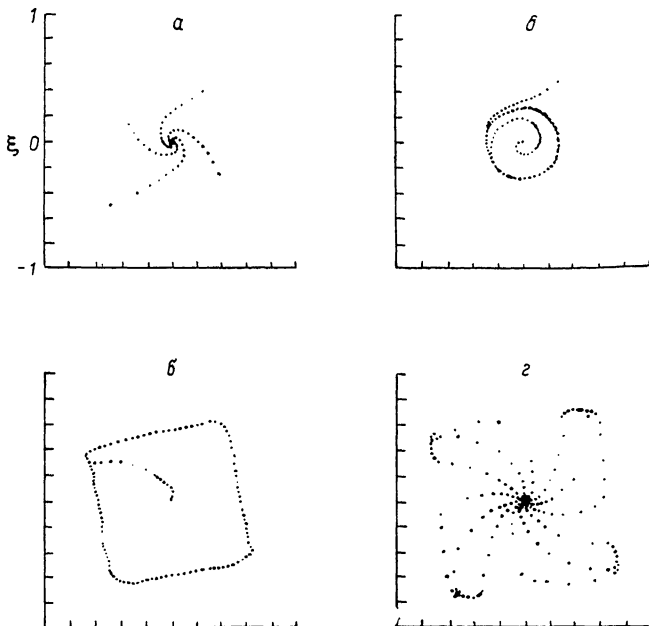


Рис. 3. Фазовые портреты системы (9).

C : а — 0.1, б — 0.3, в — 0.05, г — 0.43.

На рис. 2 приведена карта динамических режимов системы (9) на плоскости надкритичность—параметр связи. Она разбивается прямой $\Lambda = -F\epsilon/A$ (l_1) и ломаной линиями $\Lambda = (2\sqrt{2} |HH_1| |\epsilon| - F\epsilon)/A$ (l_2) на три характерные области, внутри которых реализуются однотипные режимы, а при переходе через линии происходят бифуркации. При движении снизу вверх по этой плоскости мы будем наблюдать сначала единственную неподвижную точку — устойчивый фокус с координатами $\xi=0$, $\theta=0$. На линии l_1 он теряет устойчивость вследствие бифуркации Андронова—Хопфа, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл с частотой $\omega_0=D$. При дальнейшем увеличении надкритичности период колебаний растет, на предельном цикле формируются четыре области сгущения изображающих точек. На бифуркационной линии l_2 период колебаний обращается в бесконечность и в результате бифуркации седло—узел на цикле появляются еще четыре пары неподвижных точек, являющихся либо устойчивыми узлами, либо седлами. Координаты этих точек даются выражениями

$$\begin{aligned}\xi &= \pm \sqrt{C - (x \pm \sqrt{x^2 + D^2})/2}, \\ \theta &= \pm \sqrt{C - (x \mp \sqrt{x^2 + D^2})/2},\end{aligned}\quad (10)$$

$x = (C + \sqrt{C^2 - 8D^2})/2$ для седел и $(C - \sqrt{C^2 - 8D^2})/2$ для узлов. Качественные фазовые портреты системы помещены рядом с плоскостью параметров на рис. 2. Фазовые портреты, полученные при численном интегрировании системы (9) с различными значениями C ($D=0.15$), приведены на рис. 3. График зависимости одной из координат положения равновесия от величины надкритичности при фиксированном ϵ для $n=1$ приведен на рис. 4. Сплошные линии соответствуют устойчивым, штриховые — неустойчивым режимам; в области существования предельного цикла по вертикальной оси отложена амплитуда колебаний. Для исходного отображения (5) из сказанного следует, что на границе l_1 2^n -цикл сменяется квазипериодическим аттрактором, который в свою очередь теряет устойчивость на линии l_2 , порождая два симметричных цикла удвоенного по сравнению с первоначальным периода.

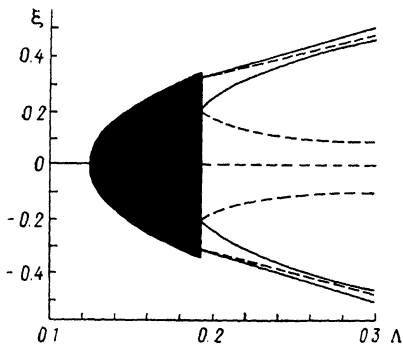


Рис. 4. Зависимость координаты положения равновесия от надкритичности для приближенных канонических уравнений двух связанных систем.

На рис. 5 сопоставляются динамика решения системы (6) и поведение возмущения отображения (4) в различных областях параметров Λ, ϵ при $n=1-3$. Очевидно хорошее соответствие между моделью и оригиналом.

Остановимся на свойствах универсальности и подобия приближенных канонических уравнений (6), вытекающих из аналогичных свойств связанных

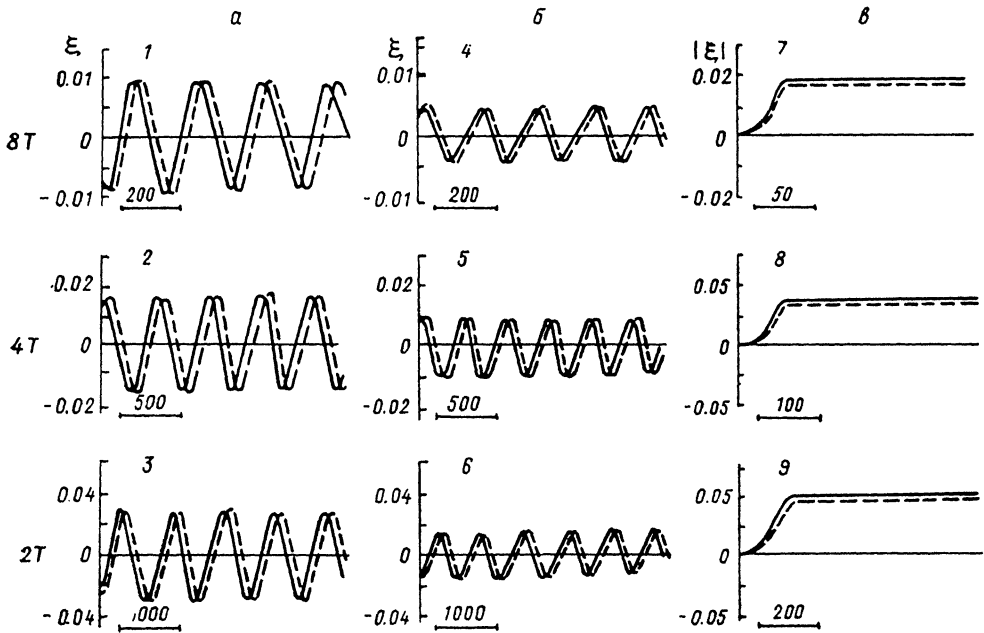


Рис. 5. Временная динамика возмущений противофазных циклов связанных систем в различных областях параметров Λ, ϵ .

ϵ : а, $\epsilon - 0.02$; б — 0.0022 ; в: 1, 4 — 0.001454 ; 2, 5 — 0.003401 ; 3, 6 — 0.008 ; 7 — 0.02 ; 8 — 0.004901 ; 9 — 0.01 .

отображений Фейгенбаума [4]. Как видно из таблицы, при изменении n коэффициенты F, H пересчитываются для чисто диссипативной связи в 2 раза, а для инерционной — в a раз. В общем случае коэффициенты F, H представляются в виде суперпозиции известных коэффициентов для инерционной i и диссипативной d связей $F = K_1 F_i + K_2 F_d, H = K_1 H_i + K_2 H_d$. Важным следствием

этих свойств коэффициентов является скейлинг пороговой частоты квазипериодического движения $\omega_0 \sim \sqrt{|HH_1|}$. При изменении n в случае диссипативной связи она остается неизменной, а для инерционной связи пересчитывается в $|a|/2$ раз. На рис. 6 приведена серия графиков, иллюстрирующая изменение зависимости частоты квазипериодического движения ω от надкритичности Δ при последовательных удвоениях периода. Результаты получены путем непо-

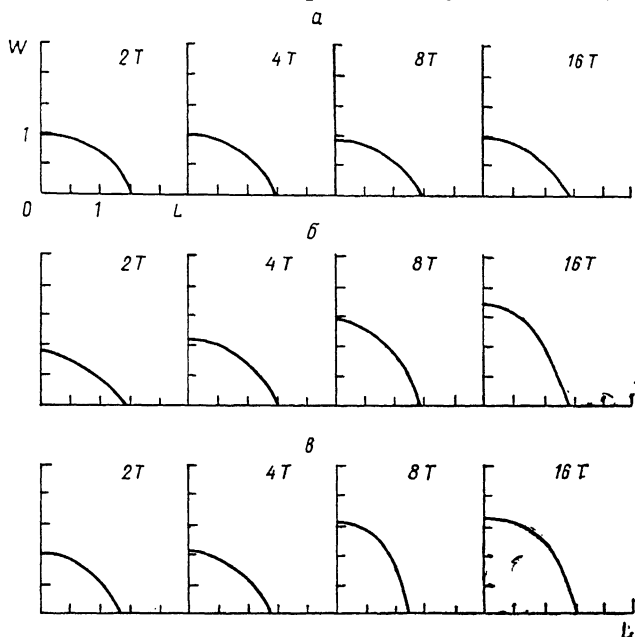


Рис. 6. Зависимость частоты квазипериодического движения от величины надкритичности. а — диссипативная; б — инерционная; в — комбинированная связь: $K_1=1$, $K_2=0$.

средственного численного моделирования динамики отображения (4). По оси ординат отложена величина $W = \omega/\epsilon$, по оси абсцисс — $L = \beta (\Delta - \Delta_c)/\epsilon$, где Δ_c — значение надкритичности, при котором происходит бифуркация рождения тора из 2^n -цикла; для диссипативной связи $\beta = (\delta/2)^{n-1}$, в случае инерционной и комбинированной связи $\beta = (\delta/|a|)^{n-1}$.

4. Качественное объяснение возникновения квазипериодичности

Качественно механизм возникновения квазипериодических колебаний можно понять из следующего рассмотрения. Пусть значение параметра нелинейности близко к бифуркационному для цикла некоторого периода (например, периода 2)

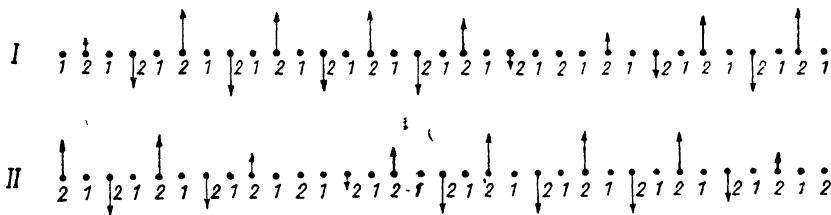


Рис. 7. Качественное объяснение возникновения квазипериодичности.

I, II — первая и вторая подсистемы соответственно.

отдельного несвязанного отображения. При $\epsilon=0$ в обеих подсистемах будут существовать режимы периода 2. Рассмотрим ситуацию, когда подсистемы колеблются в противофазе. На рис. 7 точками обозначены последовательные моменты времени, цифрами 1, 2 — состояния подсистем в эти моменты времени.

Введем некоторое возмущение второй подсистемы (стрелка вверх в начальный момент дискретного времени на рисунке). За период цикла это возмущение поменяет знак (перевернется), так как мультипликатор цикла приблизительно равен -1 . Пусть теперь связь между подсистемами отлична от нуля. Воздействие второй подсистемы на k -м шаге приведет к появлению малого возмущения в первой подсистеме на $k+1$ -м шаге. Знак этого возмущения будет зависеть от знака ϵ . Пусть для определенности оно направлено в ту же сторону. Ясно, что возмущение первой подсистемы будет нарастать во времени за счет постоянного влияния второй подсистемы, пока, наконец, само не начнет оказывать обратное воздействие. Новое возмущение второй подсистемы направлено в ту же сторону, что и вызывающее его возмущение первой подсистемы, в силу симметричности связи, т. е. оно направлено противоположно первоначальному возмущению, поэтому с течением времени возмущение во второй подсистеме будет уменьшаться до нуля. Возмущение в первой подсистеме при этом достигнет максимума. Далее процесс будет повторяться, так как мы вернулись в исходное состояние с той лишь разницей, что подсистемы поменялись ролями. Если мультипликаторы цикла больше 1, то описанный процесс сопровождается нарастанием амплитуды колебаний, которая стабилизируется на некотором уровне за счет нелинейности. Как следует из приведенных рассуждений (и согласуется с (9)), период вновь возникших колебаний пропорционален параметру связи.

Заключение

Развитый в работе метод перехода от дискретной модели к каноническим дифференциальным уравнениям вблизи точки бифуркации дает возможность эффективно анализировать динамику связанных систем. Показано, в частности, что независимо от вида связи между подсистемами в определенных областях параметров нелинейности и связи будут существовать квазипериодические режимы, причем частота новой колебательной составляющей прямо пропорциональна величине параметра связи и уменьшается с увеличением надкритичности при фиксированном значении ϵ . Это значит, что в общем случае она не находится в рациональном отношении с шагом дискретного времени в исходном отображении (4). Поэтому в области существования квазипериодичности должна иметь место сложная структура областей синхронизации частот — периодических движений и собственно квазипериодических колебаний. Такая структура действительно наблюдается в физическом эксперименте на примере двух диссипативно связанных нелинейных контуров под внешним периодическим воздействием [8].

Список литературы

- [1] Guan J.-H., Jung M., Narducci L. // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. N 3. P. 1662—1666.
- [2] Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 24. № 8. С. 888—902.
- [3] Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. // ДАН СССР. Физика. 1986. Т. 287. № 3. С. 619—622.
- [4] Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 991—1007.
- [5] Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 343—374.
- [6] Астахов В. В., Безручко Б. П., Полюмаренко В. И., Селезнев Е. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 5. С. 627—630.
- [7] Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Селезнев Е. П. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 3. С. 60—65.
- [8] Астахов В. В., Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 1. С. 37—41.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Саратовский филиал

Поступило в Редакцию
2 февраля 1990 г.
В окончательной редакции
17 сентября 1990 г.