

01; 03

© 1990 г.

## СВОЙСТВА ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Ю. В. Саночкин

Определены характеристики связанных динамических и тепловых пограничных слоев (толщина, распределение скорости и температура, потоки вещества и др.), развивающихся на границе между несмешивающимися жидкостями или на свободной поверхности жидкости при поддержании градиентов температуры на бесконечности или(и) тепловом воздействии непосредственно на поверхность раздела. Показано, что они существенно отличаются от свойств слоев на твердом теле и зависят от условий тепловой задачи. Например, появляется зависимость толщины вязкого слоя и градиента температуры вдоль границы раздела от числа Прандтля и в случае контакта двух жидкостей от остальных безразмерных параметров. Рассмотрены примеры слоев, экранирующих однородную жидкость от теплового возмущения ее поверхности. Сформулированы условия, определяющие направление переноса тепла между жидкостями, и показана возможность инициируемого конвекцией теплообмена. Указано условие покоя жидкостей при компенсации тепловых воздействий на границе раздела.

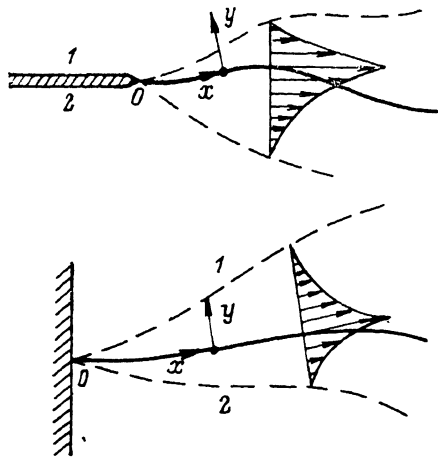
### Введение

По предложению [1] диссипативные слои, возникающие на границе раздела жидкостей под действием капиллярной силы вне зависимости от причины, изменяющей поверхностное натяжение, часто называют пограничными слоями Марангони. В частности, при сильном неоднородном нагреве свободной границы жидкости образуются, согласно [2-4], термокапиллярные пограничные слои. В указанном примере свободная поверхность остается плоской и вне вязкого слоя ( $y \rightarrow \infty$ ) исчезает составляющая скорости  $u$ , параллельная границе. В общем случае поверхность раздела может быть криволинейной и на бесконечности возможно наличие внешнего потока, взаимодействующего в той или иной степени с пограничными слоями. Разрешимость задачи и другие математические вопросы рассматриваются в [5, 6] без привлечения уравнения переноса тепла с заданием на границе касательных напряжений. Для взаимосвязанных распределений скорости и температуры плоская задача о стационарных термокапиллярных слоях на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей была рассмотрена в [7]. Изучался изобарический случай, когда во внешней области  $u=0$ . Найден класс автомодельных решений уравнений пограничных слоев, система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась численно.

В данной работе плоская задача о структуре вязких и температурных пограничных слоев, образующихся на границе раздела сред вследствие термокапиллярного эффекта, изучается без привлечения численных методов. Кроме того, в отличие от [7] основное внимание уделяется отличающимся спецификой тепловых условий слоям на свободной границе жидкости. Полученные решения отвечают физическим условиям, при которых начальное сечение является изотермическим. Пример слоев другого типа на свободной горизонтальной границе жидкости, примыкающей к вертикальной стенке, на которой ставятся смешанные тепловые условия, имеется в [8].

# 1. Постановка задачи

Будем предполагать отсутствие дополнительных воздействий, которые могли бы вызвать движение жидкости или искривление невозмущенной поверхности раздела при устранении капиллярной силы. Нетрудно дать оценку сверху деформации статической равновесной границы  $y=0$  между жидкостями при возникновении конвекции. Учитывая, как в [9], разницу гидростатических давлений по разные стороны динамической границы, можно показать, что ее смещение на длине  $l$  при неравных плотностях жидкостей есть величина порядка  $\Delta y \sim \delta (\delta/l)$ , где  $\delta$  — толщина вязкого слоя. Поэтому можно ожидать, что динамический профиль границы раздела изображается в общем случае плавной кривой с малым смещением от статического положения на характерной продольной длине  $l$  и малой кривизной, если можно пренебречь вкладом поверхностного давления. Можно также предположить, что в указанных условиях вне пограничного слоя будет возникать медленное движение со скоростями  $u \sim v$ , так что использование в нулевом приближении условия  $u=0$  на внешней границе слоя, как в [7], оправдано. Для описания течения в тонких пограничных слоях удобно применять ортогональную координатную сетку, связанную с динамическим профилем границы. Координату  $x$  будем отсчитывать вдоль контура границы в направлении движения, координату  $y$  — по нормали к нему и будем рассматривать эти координаты как прямолинейные декартовы [10]. Температура поверхности раздела, как правило, неизвестна. Кажется правдоподобным, что в нулевом приближении можно задавать на бесконечности распределение температуры, удовлетворяющее вследствие малости скорости конвекции уравнению Лапласа. Из многообразия граничных условий для температуры выбираем как физически легко реализуемые случаи постоянных температуры или градиента температуры во внешней области.



Пусть жидкости 1, 2 (величины, относящиеся к разным веществам, отличаются индексом  $j=1, 2$  снизу) заполняют области  $y > 0$  и  $y < 0$  соответственно и находятся в контакте друг с другом вдоль поверхности  $y=0, x \geq 0$  (см. рисунок). К охваченной конвекцией области  $x > 0$  может примыкать область покоя  $x < 0$ , где те же жидкости разделены нетеплопроводной перегородкой  $y=0$ . Можно представить также, что в сечении  $x=0$  имеется изотермическая стенка. Конечно, в этом случае решение, полученное в приближении пограничного слоя, неправильно описывает конвекцию вблизи указанного сечения. Однако влияние допущенной на начальном участке неточности по мере удаления от стенки ослабевает, и начиная с некоторого значения  $x$  решение применимо. В последнем случае ситуация напоминает задачу о пограничном слое на непрерывно поступающей в покоящуюся жидкость пластине [11]. Наконец, сечение  $x=0$  может быть плоскостью симметрии системы, содержащей или не содержащей, как в [2-4], жесткие элементы. Следуя [7], исходим из уравнений пограничного слоя

$$u_{jx} + v_{jy} = 0, \quad u_j \mu_{jx} + v_j \mu_{jy} = \nu_j \mu_{jyy}, \quad u_j T_{jx} + v_j T_{jy} = \chi_j T_{jyy}. \quad (1)$$

Здесь  $\nu_j, \chi_j$  — коэффициенты вязкости и температуропроводности жидкостей, которые, как и другие характеристики (за исключением коэффициента поверхностного натяжения  $\alpha$ ), считаются не зависящими от температуры. Известны условия [12], при которых можно опустить в (1) член с архимедовой подъемной силой. Как упоминалось, всегда используются условия  $u_j(x, \pm\infty) = 0, v_j(x, 0) = 0$ .

## 2. Теплоизолированная свободная граница неравномерно нагретой жидкости

Движение жидкости, заполняющей полупространство  $y \geq 0$ , определяется «проецированием» на границу раздела градиента температуры  $\beta$  на бесконечности. Система граничных условий дополняется соотношениями

$$\begin{aligned} \nu \rho u_y(x, 0) &= \alpha' T_x(x, 0) - \nu \rho v_x(x, 0), \\ T_y(x, 0) &= 0, \quad T(x, \infty) = -\beta x, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\alpha' = -d\alpha/dT$ .

Система (1), (2) интегрируется введением автомодельной переменной [7]

$$\begin{aligned} \xi &= \left( \frac{\alpha' \beta}{3 \rho \nu^2 x} \right)^{1/3} y, \quad u = \left( \frac{3 \alpha'^2 \beta^2 x}{\rho^2 \nu} \right)^{1/3} f'(\xi), \\ v &= \left( \frac{\alpha' \beta \nu}{3 \rho x} \right)^{1/3} (\xi f' - 2f), \quad T = -\beta x \vartheta(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Для определения  $f, \vartheta$  получается краевая задача

$$\begin{aligned} f''' + 2ff'' - f'^2 &= 0, \quad P^{-1}\vartheta'' + 2f\vartheta' - 3f'\vartheta = 0, \\ f(0) = f'(\infty) &= 0, \quad f''(0) = -\vartheta(0), \quad \vartheta(\infty) = 1, \quad \vartheta'(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $P$  — число Прандтля. При  $\beta \rightarrow 0$ , согласно (3), переходим к случаю изотермической покоящейся жидкости. С помощью преобразования  $f(\xi) = \sqrt{w} \varphi(\eta)$ ,  $\eta = \sqrt{w} \xi$ , где  $w(P) = f'(0)$ , уравнения (4) расцепляются и  $f$  выражается через изученную в [2] функцию, которая представляется знакопеременным экспоненциальным рядом

$$\begin{aligned} \varphi &= a_0 - \sum_{n \geq 1} a_n \exp(-2a_0 n \eta), \\ 2n^2(n-1)a_0 a_n + \sum_{m=1}^{n-1} (n-m)(2n-3m)a_{n-m} a_m &= 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для вычисления  $\varphi(\eta)$  с точностью до 0.001 достаточно удерживать 4 члена ряда (5). Свойства  $\varphi(\eta)$  такие:  $\varphi'(0) = 1$ ,  $\varphi''(0) = -1.1737$ ,  $\varphi(\infty) = a_0 = 0.7515$ ,  $a_1 = 0.8534$  и т. д. Вычисляя  $f''(0)$ , находим из условия (4) связь

$$w^{3/2} = -\vartheta(0)/\varphi''(0). \quad (6)$$

Для неизвестной  $\theta(\eta) = \vartheta(\xi)$  получается уравнение

$$P^{-1}\theta'' + 2\varphi\theta' - 3\varphi'\theta = 0 \quad (7)$$

с прежними граничными условиями. Два линейно независимых решения (7) могут быть представлены экспоненциальными рядами

$$\begin{aligned} s(\eta, P) &= \sum_{n \geq 0} b_n(P) \exp(-2a_0 n \eta), \quad b_0 = 1, \\ 2n(n-P)a_0 b_n &= P \sum_{m=1}^n (5m-2n)a_m b_{n-m}, \quad n \geq 1, \\ t(\eta, P) &= \exp(-2a_0 P \eta) \sum_{n \geq 0} c_n(P) \exp(-2a_0 n \eta), \quad c_0 = 1, \\ 2n(n+P)a_0 c_n &= P \sum_{m=1}^n (5m-2n-2P)a_m c_{n-m}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение тепловой задачи (7) и величина градиента температуры на свободной поверхности даются выражениями

$$\theta = s - (\sigma'/\tau')t, \quad \vartheta(0) \doteq \sigma - (\sigma'/\tau')\tau, \quad (9)$$

где  $\sigma = s(0, P)$ ,  $\tau = t(0, P)$ ,  $\sigma' = s'(0, P)$ ,  $\tau' = t'(0, P)$ .

На практике целесообразно использовать решение (9) при  $P \ll 1$  и особенно при  $P \ll 1$ , когда достаточно удерживать линейные по  $P$  члены в выражениях для коэффициентов ряда. Асимптотическое разложение (9) при  $P \ll 1$  имеет вид

$$\theta = \left(1 - \frac{3}{5} e^{-2a_0 P \eta}\right) [1 + P g(\eta) + O(P^2)],$$

$$g = \sum_{n \geq 1} \frac{3a_n}{2na_0} \exp(-2a_0 n \eta). \quad (10)$$

Согласно (10), предельное значение градиента температуры на границе есть  $\vartheta(0) = 2/5$  и толщина температурного слоя равна по порядку величины  $\delta_T \sim \delta/P$ .

Асимптотику решения (7) при  $P \gg 1$  построим, используя ВКБ приближение [13]. Полагая

$$\theta = Z(\eta) \exp\left(-P \int_0^\eta \varphi dt\right), \quad Z = \exp P \omega$$

и ограничиваясь двумя членами разложения  $\omega$  по обратным степеням  $P$ , находим

$$Z = B_1 \varphi^{3/2} \exp\left(P \int_0^\eta \varphi dt\right) + B_2 \varphi^{-3/2} \exp\left(-P \int_0^\eta \varphi dt\right). \quad (11)$$

Поскольку  $\varphi(0) = 0$  и точка  $\eta = 0$  является для уравнения (7) точкой поворота, то решение (11) непригодно при малых  $\eta$ . Для построения внутреннего решения (7) надо перейти к растянутой переменной  $\zeta = \sqrt{P} \eta$ , через которую оно выражается в виде

$$Z(\zeta) = A_1 U(2, \sqrt{2} \zeta) + A_2 V(2, \sqrt{2} \zeta). \quad (12)$$

Здесь  $U, V$  — функции параболического цилиндра для значения параметра 2 в симметричных обозначениях [14]. Решения (11), (12) легко сращиваются и после определения произвольных постоянных дают разложение для внешнего решения

$$\theta(\eta) = \left(\frac{\varphi}{\varphi_\infty}\right)^{3/2} - \frac{\sqrt{\pi/2} V'_0}{4P^2 U'_0 \varphi_\infty^{3/2}} \varphi^{-3/2} \exp\left(-2P \int_0^\eta \varphi dt\right), \quad (13)$$

разложение внутреннего решения

$$\theta(\zeta) = \frac{\sqrt{\pi/2} e^{-\zeta^2/2}}{(2P)^{3/4} \varphi_\infty^{3/2} U'_0} (U'_0 V - V'_0 U). \quad (14)$$

Здесь  $U'_0 = U'(2, 0)$ ,  $V'_0 = V'(2, 0)$ . Полагая в (14)  $\zeta = 0$ , находим, что при  $P \gg 1$

$$\vartheta(0) = k P^{-3/4}, \quad k = \frac{\Gamma(1/4)}{4\sqrt{\pi} \varphi_\infty^{3/2}} = 0.785. \quad (15)$$

Теперь с помощью (6) можно определить зависимость остальных величин от  $P$ , которая входит через  $w$ :  $w \rightarrow 0.488$  при  $P \rightarrow 0$  и  $w = 0.765 P^{-1/2}$  при  $P \gg 1$ . Максимальная скорость конвекции развивается на границе и, согласно (3),  $u_m \sim w$ . Расход жидкости в горизонтальном направлении равен

$$G = \int_0^\infty u dy = \varphi_\infty \left(\frac{9\alpha' \beta_\nu}{\rho}\right)^{1/3} x^{3/2} w^{1/2}. \quad (16)$$

С точностью до численного множителя порядка единицы толщину вязкого слоя можно на основании (3) записать в виде

$$\delta = \left( \frac{\rho v^2 x}{\alpha' \beta} \right)^{1/3} w^{-1/3}. \quad (17)$$

Таким образом, в случае  $P \ll 1$  при прочих равных условиях  $\delta$  меньше, а  $u_m$ ,  $G$  имеют существенно большие значения, чем в жидкости с  $P \gg 1$ . Это объясняется тем, что при  $P \gg 1$  градиент температуры  $\vartheta(0)$  — причина движения значительно меньше, чем при  $P \ll 1$ . При  $P \gg 1$ , согласно (13), в отличие от случая  $P \ll 1$  толщины вязкого и температурного слоев совпадают  $\delta_T \sim \delta$ . Условие применимости полученного решения  $\delta(x) \ll x$  выполняется в широком диапазоне параметров: при  $\beta=1$  град/см для воды и ртути при  $x \gg 0.7$  и  $0.2$  см соответственно.

### 3. Влияние изменения тепловых условий на свободной поверхности

Рассмотрим структуру пограничных слоев в случае, когда движение вызывается как градиентом температуры на бесконечности, так и тепловым воздействием непосредственно на свободную границу. Примем для тепловой задачи условия

$$T(x, \infty) = -\beta x, \quad T(x, 0) = -m\beta x, \quad m > 0.$$

Значения числового параметра  $m$  будут идентифицированы после определения поля температур. Решение задачи имеет прежний вид (3), видоизменяются только граничные условия к (4)  $\vartheta(\infty)=1$ ,  $\vartheta(0)=m$ . Вместо (6) имеем  $w = (-m/\varphi''(0))^{1/3}$ , и выражение для скорости конвекции определяется сразу  $f = \sqrt{w} \varphi(\eta)$ . Не выписывая решения тепловой задачи (7) через функции  $s$ ,  $t$  (8), приведем его асимптотику при  $P \ll 1$ .

$$\theta = (1 - e^{-2a_0 P \eta}) (1 + P g(\eta) + \dots) + m e^{-2a_0 P \eta} [1 + P (g(\eta) - g(0)) + \dots]. \quad (18)$$

С точностью до линейных по  $P$  членов из (18) следует

$$\theta'(0) = -5a_0 P \left( m - \frac{2}{5} \right). \quad (19)$$

Асимптотика  $\theta$  при  $P \gg 1$  дается формулами (11), (12), где значения констант суть

$$B_1 = \varphi_\infty^{-3/2}, \quad A_2 = \sqrt{\pi/2} (2P)^{-1/4} \varphi_\infty^{-3/2}, \\ A_1 = \frac{m}{U(2, 0)} - \frac{V(2, 0)}{U(2, 0)} A_2, \quad B_2 = (2P)^{-5/4} A_1.$$

Используя (12), находим

$$\theta'(0) = - \frac{(2\pi P)^{1/4} 2^{5/4}}{U(2, 0) \Gamma(1/4)} (m - kP^{-3/4}). \quad (20)$$

Согласно (19), (20), случай  $m < 2/5$  при  $P \ll 1$  и  $m < kP^{-3/4}$  при  $P \gg 1$  соответствует нагреву поверхности жидкости по закону  $q \sim x^{1/3}$ , где  $q$  — плотность потока тепла. При противоположных знаках неравенств происходит теплоотдача в окружающую среду. Усиливающийся с ростом  $x$  нагрев уменьшает градиент температуры на границе, соответствующий условию теплоизоляции поверхности. Неоднородное охлаждение, напротив, усиливает  $\vartheta(0)$  и интенсивность конвекции по сравнению со случаем адиабатической поверхности. Количественная характеристика уменьшения скорости (расхода) и увеличения толщины слоя при нагреве и изменений противоположного знака указанных величин при охлаждении дается множителями  $u_m \sim m^{2/3}$ ,  $G \sim m^{1/3}$ ,  $\delta \sim m^{-1/3}$  в формулах (3), (16), (17) соответственно.

#### 4. Термокапиллярная струя на свободной границе однородной жидкости

Рассмотрим примеры пограничных слоев, экранирующих покоящуюся изотермическую жидкость от теплового возмущения границы. Для простоты зададим условия первого рода

$$T(x, \infty) = 0, \quad T(x, 0) = -3x^\gamma, \quad \gamma > 0. \quad (21)$$

Построив решение, определим, какому воздействию оно соответствует. Исходная система (1), (2), (21) допускает автомодельное решение [7]

$$\xi = \left( \frac{\alpha' \beta}{3\rho\nu^2} \right)^{1/3} y x^{\frac{\gamma-2}{3}}, \quad u = \left( \frac{3\alpha'^2 \beta^2}{\rho^2 \nu} \right)^{1/3} x^{\frac{2\gamma-1}{3}} f'(\xi),$$

$$v = \left( \frac{\alpha' \beta \nu}{3\rho} \right)^{1/3} x^{\frac{\gamma-2}{3}} [(2-\gamma)\xi f' - (1+\gamma)f], \quad T = -3x^\gamma \vartheta(\xi), \quad (22)$$

где  $f$  и  $\vartheta$  являются решениями задач

$$f''' + (1+\gamma)ff'' - (2\gamma-1)f'^2 = 0, \quad f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f''(0) = -\gamma\vartheta(0),$$

$$P^{-1}\vartheta'' + (1+\gamma)f\vartheta' - 3\gamma f'\vartheta = 0, \quad \vartheta(0) = 1, \quad \vartheta(\infty) = 0. \quad (23)$$

Выделяются случаи  $\gamma=1, 2$  и  $1/2$ . При  $\gamma=2$  толщина слоев, согласно (22), не зависит от  $x$ . При  $\gamma=1/2$  скорость на границе постоянна, как если бы жидкость соприкасалась с движущейся жесткой поверхностью [11]. Интерпретация решений при  $\gamma < 1/2$  и  $\gamma > 2$  затруднительна. Динамическая задача (23) имеет решения типа пограничного слоя. При  $\gamma=2$  оно имеет вид

$$f = \frac{\omega}{3}(1 - e^{-\omega\xi}), \quad \omega = 6^{1/3} = 1.817$$

и характеризуется параметрами  $f_\infty = 0.606$ ,  $w = 1.101$ . При  $\gamma=1$  задача (23) исследовалась в [3, 4]. Решение представляется экспоненциальным рядом и принимает значения  $f_\infty = 0.712$ ,  $w = 0.899$  [4]. В общем случае уравнение (23) также допускает решение в виде ряда

$$f = a_0 - \sum_{n \geq 1} a_n \exp(-n\omega\xi), \quad \omega = (1+\gamma)a_0,$$

$$n^2(n-1)\omega a_n + \sum_{m=1}^{n-1} m[3\gamma m - (2\gamma-1)n]a_m a_{n-m} = 0, \quad n \geq 2. \quad (24)$$

Оно описывает вязкий слой толщиной порядка

$$\delta = \frac{1}{\omega(\gamma)} \left( \frac{3\rho\nu^2}{\alpha'\beta} \right)^{1/3} x^{\frac{2-\gamma}{3}}. \quad (25)$$

При  $\gamma=1/2$ , например, с помощью (24) получаем  $w=0.776$ ,  $f_\infty=a_0=0.825$ ,  $a_1=1.088$  и т. д.

При рассмотрении тепловой задачи (23) ограничимся случаем  $P \gg 1$ . Растягивая координату  $\zeta = [(1+\gamma)wP]^{1/3}\xi$ , сращивая разложения и удовлетворяя граничным условиям (23), находим внешнее

$$\vartheta(\xi) = U^{-1}(a, 0)(2P)^{-1/3} f^{-\frac{1+\gamma}{1+\gamma}} \exp \left[ -(1+\gamma)P \int_0^\xi f dt \right] \quad (26)$$

и внутреннее решения

$$\vartheta(\zeta) = \frac{U(a, \zeta)}{U(a, 0)} \exp \left( -\frac{\zeta^2}{4} \right). \quad (27)$$

Здесь  $U, V$  — функции параболического цилиндра для значения параметра  $a = (1+7\gamma)/(2+2\gamma)$  [14]. С помощью (27) находим

$$\vartheta'(0) = -[2(1 + \gamma)P]^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)} < 0. \quad (28)$$

Решения (22) ввиду (28) соответствуют случаю охлаждения поверхности жидкости по закону  $q \sim x^{(4\gamma-2)/3}$ . Формально (25) в отличие от (17) не зависит от  $P$ . Это связано с использованием условий (21), вследствие чего тепловая и динамическая задачи разделились. Поставив вместо (21) условие

$$T_y(x, 0) = -\beta \left(\frac{\alpha'\beta}{3\rho\nu^2}\right)^{1/2} \vartheta'(0) x^{\frac{4\gamma-2}{3}} \quad (21')$$

и решив тепловую задачу, находим градиент температуры на границе

$$\vartheta(0) = \frac{\vartheta'(0)}{[(1 + \gamma)wP]^{1/2}} \frac{U(a, 0)}{U'(a, 0)}. \quad (28')$$

При  $\vartheta(0) = 1$  из (28') следует (28). Используя (28') и имея в виду зависимости  $\delta \sim w^{-1/2}$ ,  $w^{3/2} \sim \vartheta(0)$ , находим, что толщина вязкого слоя изменяется с  $P$  по закону  $\delta \sim P^{1/6}$ . Согласно (26), другой также оказывается толщина температурного слоя  $\delta_T \sim \delta P^{-1/2}$ .

### 5. Взаимосвязанные слои на границе раздела несмешивающихся жидкостей

Конвенция инициируется постоянными градиентами температуры  $dT_j/dx = -\beta_j \beta$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ , где  $\beta_j$  — безразмерные параметры. Остальные граничные условия к (1) имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 = u_2, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa_1 T_{1y} = \kappa_2 T_{2y}, \\ \nu_1 \rho_1 (u_{1y} + v_{1x}) - \nu_2 \rho_2 (u_{2y} + v_{2x}) = \alpha' T_x, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $\kappa_j$  — коэффициенты теплопроводности. В каждой из областей решение ищется в виде (3). Для определения  $f_j(\xi_j)$  и  $\vartheta_j(\xi_j)$  получается краевая задача 10-го порядка. Уравнения для  $f_j$  и  $\vartheta_j$  сохраняют прежний вид (4), отличаясь значениями чисел Прандтля  $P_j$ , система граничных условий видоизменяется

$$\begin{aligned} f_1(0) = f_1'(\infty) = f_2(0) = f_2'(-\infty) = 0, \quad f_1'(0) = \Pi^{1/2} f_2'(0), \\ f_1''(0) - f_2''(0) + \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = \vartheta_0, \\ \vartheta_1'(0) = Q \vartheta_2'(0), \quad \vartheta_1(\infty) = \beta_1, \quad \vartheta_2(-\infty) = \beta_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $\Pi = \rho_1^2 \nu_1 / \rho_2^2 \nu_2$ ,  $Q = \kappa_2 \rho_1 \nu_1^2 / \kappa_1 \rho_2 \nu_2^2$ . Параметр  $\Pi$  соответствует вязкому взаимодействию жидкостей и встречается в [9]. Параметр  $Q$ , отражающий тепловое взаимодействие между жидкостями, может быть представлен в виде  $Q = (P_1 C_2 / P_2 C_1) \Pi^{-1/2}$ , где  $C_j$  — теплоемкости жидкостей. Если обозначить  $f_j(0) = w_j$ , то искомые функции выражаются, как и в разделе 2, через решение (5)

$$f_1(\xi_1) = \sqrt{w_1} \varphi(\eta), \quad \eta = \sqrt{w_1} \xi_1; \quad f_2(\xi_2) = -\sqrt{w_2} \varphi(\eta), \quad \eta = -\sqrt{w_2} \xi_2.$$

Согласно (30), имеем вместо (6) соотношения

$$w_2 = \Pi^{-1/2} w_1, \quad \vartheta_0 = -\varphi''(0) w_1^{1/2} (1 + \Pi^{-1/2}). \quad (31)$$

Для неизвестных  $\theta_j(\eta) = \vartheta_j(\xi_j)$  получаются уравнения (7) с граничными условиями  $\theta_j(0) = \vartheta_0$ ,  $\theta_j(\infty) = \beta_j$ , отличающиеся только значениями  $P_j$ ,  $\beta_j$ . Опуская по этой причине индекс, запишем решение тепловой задачи с использованием (8) в виде

$$\theta = \beta s + (\vartheta_0 - \beta c) t / \tau. \quad (32)$$

Подставляя (32) в условие непрерывности теплового потока на границе раздела (30), находим общее выражение для  $\vartheta_0$

$$\vartheta_0 \left( \frac{\tau'_1}{\tau_1} + Q\Pi^{-1/2} \frac{\tau'_2}{\tau_2} \right) = -\beta_1 \left( \sigma'_1 - \sigma_1 \frac{\tau'_1}{\tau_1} \right) - \beta_2 Q\Pi^{-1/2} \left( \sigma'_2 - \sigma_2 \frac{\tau'_2}{\tau_2} \right). \quad (33)$$

В силу линейности тепловой задачи градиент температуры на поверхности раздела есть линейная комбинация градиентов на бесконечности с весовыми множителями, зависящими указанным в (33) образом от безразмерных параметров. При  $P \ll 1$  асимптотика решения (32) имеет вид

$$\vartheta = \beta (1 - e^{-2\alpha_0 P \eta}) [1 + P g(\eta) + O(P^2)] + \vartheta_0 e^{-2\alpha_0 P \eta} [1 + P (g(\eta) - g(0)) + O(P^2)]. \quad (34)$$

Предельное при  $P \rightarrow 0$  выражение (33) записывается через размерные величины в симметричной форме

$$\vartheta_0 = \frac{2}{5} \frac{\beta_1 C_{1\rho_1} \sqrt{v_1} + \beta_2 C_{2\rho_2} \sqrt{v_2}}{C_{1\rho_1} \sqrt{v_1} + C_{2\rho_2} \sqrt{v_2}}. \quad (35)$$

Построение асимптотики решений (32) при  $P \gg 1$  осуществляется, как в разделе 2, и приводит к следующим разложениям внешнего:

$$\theta(\eta) = \beta \left( \frac{\varphi}{\varphi_\infty} \right)^{3/2} + \left[ \frac{\vartheta_0}{(2P)^{3/4} U_0} - \frac{V_0}{U_0} \frac{\sqrt{\pi/2} \beta}{4P^2 \varphi_\infty^{3/2}} \right] \varphi^{-7/2} \exp \left( -2P \int_0^\eta \varphi dt \right) \quad (36)$$

и внутреннего решений:

$$\theta(\zeta) = \left[ \frac{\vartheta_0}{U_0} U + \frac{\sqrt{\pi/2} \beta}{(2P)^{3/4} \varphi_\infty^{3/2} U_0} (U_0 V - V_0 U) \right] e^{-\zeta^2/2}, \quad \zeta = P^{1/2} \eta. \quad (37)$$

Используя (37), нетрудно вывести формулу для  $\vartheta_0$ . Ее можно представить в виде (33) с коэффициентами, зависящими от  $P_j$ , однако более наглядная и симметричная форма записи получается, если перейти к размерным весовым множителям

$$\vartheta_0 (C_{1\rho_1} \sqrt{\chi_1} + C_{2\rho_2} \sqrt{\chi_2}) = \beta_1 k P_1^{-3/4} C_{1\rho_1} \sqrt{\chi_1} + \beta_2 k P_2^{-3/4} C_{2\rho_2} \sqrt{\chi_2}. \quad (38)$$

Выражение (38) есть обобщение (15). В смешанном случае, когда  $P_1 \gg 1$ ,  $P_2 \ll 1$ , решение для  $\theta_1$  дается (36), (37), для  $\theta_2$  — разложением (34). Выражение для  $\vartheta_0$  содержит члены и множители, характерные как для (35), так и для (38),

$$\vartheta_0 (C_{1\rho_1} \sqrt{\chi_1} + k_1 C_{2\rho_2} \sqrt{v_2}) = \beta_1 k P_1^{-3/4} C_{1\rho_1} \sqrt{\chi_1} + \beta_2 \frac{2}{5} k_1 C_{2\rho_2} \sqrt{v_2}, \quad (39)$$

где  $k_1 = -5\alpha_0 U_0 / \sqrt{2} U'_0 = 1.853$ .

Обсудим полученные результаты. Если  $\beta_j \rightarrow 0$ , то  $\vartheta_0 \rightarrow 0$  и движение исчезает. Величина  $\vartheta_0$  определяется конвекцией, что видно, например, из зависимости коэффициентов при  $\beta_j$  в (35), (38) от вязкости. Вклад в  $\vartheta_0$  дают обе жидкости. При этом имеет место трансформация исходных градиентов температуры на поверхности контакта. Помимо характерного для адиабатической границы зависящего от чисел Прандтля уменьшения ( $\beta_j \rightarrow 2\beta_j/5$  при  $P_j \ll 1$ ,  $\beta_j \rightarrow k\beta_j P_j^{-1/4}$  при  $P_j \gg 1$ ) градиентов на бесконечности, указанные доли складываются с весовыми множителями, зависящими от свойств обеих жидкостей (всех критериев подобия). Величины  $w_j$ , подобно  $\vartheta_0$  также зависят от всех безразмерных параметров. Максимальная скорость конвекции на границе раздела дается прежними формулами (3) ( $u_m \sim w_j$ ). Горизонтальные потоки жидкости по разные стороны поверхности раздела различны и даются выражениями (16) ( $G_j \sim w_j^{1/2}$ ). Также различаются толщины динамических слоев (17) ( $\delta_j \sim \sim w_j^{1/2}$ ). Скорость конвекции на границе и толщина вязкого слоя суть одинаковые функции  $x$  и связаны зависимостью  $\delta = (3xv/u_n)^{1/2}$ , как в случае погранич-



ного слоя на жесткой пластине. Отношение толщин теплового и вязкого слоев  $\delta_T/\delta$  определяется числом Прандтля: при  $P \ll 1$ , согласно (34),  $\delta_T \sim P^{-1}\delta$ , если  $P \gg 1$ , то, как видно из (36),  $\delta_T \sim \delta$ .

Теплообмен между жидкостями определяется разными факторами. Если  $P_1 \gg 1$ , то тепловой поток на границе раздела, согласно (37), положителен при  $\vartheta_0 < k\beta_1 P_1^{-3/4}$ . Отсюда в случае  $P_2 \gg 1$  с помощью (38) находим, что нагрев жидкости 1 имеет место, когда  $\beta_2 P_2^{-3/4} < \beta_1 P_1^{-3/4}$ . Если  $P_2 \ll 1$ , то соответствующее условие, согласно (39), имеет вид  $2\beta_2/5 < k\beta_1 P_1^{-3/4}$ . Наконец, если  $P_{1,2} \rightarrow 0$ , то с помощью (34), (35) можно установить, что перенос тепла через границу раздела от жидкости 2 к жидкости 1 происходит при  $\vartheta_0 < 2\beta_1/5$  или  $\beta_1 > \beta_2$ .

Имеет смысл выделить три случая. Пусть  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , тогда в отсутствие конвекции переноса тепла в вертикальном направлении нет. Согласно сказанному выше, при возникновении движения будет происходить перетекание тепла от одной жидкости к другой, если только  $P_1 \neq P_2$ . Это явление можно назвать индуцированным конвекцией теплообменом. Параметр  $\vartheta_0$  есть алгебраическая сумма взятых с весами параметров  $\beta_1, \beta_2$ . Приравнявая правые части (35), (38), (39), нулю, можно найти условия, при которых тепловые воздействия на границу раздела компенсируются и жидкость остается в покое. Изменением градиентов температуры около указанных значений можно, в частности, регулировать направленный массоперенос.

Отметим, наконец, случай, когда в невозмущенном состоянии одна из жидкостей имеет постоянную температуру ( $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ ). В конечном состоянии в жидкости 2 движение и возмущение температуры локализованы в пределах соответствующих пограничных слоев, которые могут быть достаточно тонкими. Можно трактовать указанное явление как способность однородной жидкости экранироваться от возмущений состояния своей поверхности.

#### Список литературы

- [1] *Napolitano L. G.* // Proc. 3<sup>d</sup> European Symp. on Material Sci. in Space. Grenoble, 1979. ESA SP-142. P. 313—315.
- [2] *Саночкин Ю. В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 193—196.
- [3] *Chan C. L., Chen M. M., Mazumder J.* // J. Heat Trans. 1988. Vol. 110. N 1. P. 140—146.
- [4] *Саночкин Ю. В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 136—142.
- [5] *Пухначев В. В.* // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061—1064.
- [6] *Ватлищев В. А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 3. С. 61—67.
- [7] *Napolitano L. G., Golia C.* // Acta Astronautica. 1981. Vol. 8. N 5—6. P. 417—434.
- [8] *Cowley S. J., Davis S. H.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 135. P. 175—188.
- [9] *Lock R. C.* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1951. Vol. 4. Pt 1. P. 42—63.
- [10] *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [11] *Sakiadis B. C.* // AI Ch E J. 1961. Vol. 7. N 1. P. 26—28. Ibid. N 2. P. 221—225.
- [12] *Бирих Р. В.* // ЖПМТФ. 1966. № 3. С. 69—72.
- [13] *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 520 с.
- [14] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Всесоюзный электротехнический институт  
им. В. И. Ленина  
Москва

Поступило в Редакцию  
11 декабря 1989 г.