

## ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ КАПЕЛЬ ПРИ РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЕЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НИТЯХ ЖИДКОСТИ

В. В. Владимиров, В. Н. Горшков

1. В 1878 г. Релей показал [1], что длинные цилиндрические нити (или струи) жидкости неустойчивы относительно развития перетяжек. Неустойчивость, приводящая к дроблению нитей на капли, обусловлена конкуренцией двух поверхностных натяжений — радиального и «волнового» (связанного с периодической гофрировкой поверхности вдоль оси нити — оси  $Z$ ). При такой гофрировке радиальное натяжение уменьшается (что способствует развитию неустойчивости), а «волновое» увеличивается. Соответствующее изменение давления поверхностного натяжения при малой амплитуде гофрировки  $\xi$  имеет вид [1]

$$\Delta p = \frac{\alpha}{a^2} (k^2 a^2 - 1) \xi, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $a$  — радиус нити,  $k$  — волновое число.

При малых волновых числах  $ka < 1$  нить неустойчива. Поскольку минимальное значение волнового числа  $k_{\min} = 2\pi/L$ , где  $L$  — длина нити, то неустойчивость возможна только при  $L \gg 2\pi a$ . В случае идеальной несжимаемой жидкости выражение для инкремента  $\gamma$  неустойчивости Релея, имеющей аперидический характер, определяется [1]

$$\gamma^2 = \frac{\alpha \bar{k}}{\rho a^3} (1 - \bar{k}^2) \frac{I_1(\bar{k})}{I_0(\bar{k})}, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $\bar{k} = ka$ ;  $I_0, I_1$  — функции Бесселя от мнимого аргумента.

Максимум инкремента соответствует  $\bar{k}_m \approx 0.7$  (или длине волны  $\lambda \approx 9a$ ), откуда нетрудно определить радиус капель  $R \approx 2a$  (из условия  $(4\pi R^3)/3 = \pi a^2 \lambda$ ). Капли такого размера при дроблении водяных струй действительно наблюдались [2], однако в опытах [3] отмечается и появление капель-сателлитов гораздо меньшего радиуса. Указанное явление, по-видимому, возникает и при развитии неустойчивости Релея в металлических струях, образующихся в ионных источниках на жидких металлах, поскольку наряду с относительно крупными каплями наблюдаются и маленькие ( $R \approx 10 \text{ \AA}$  при радиусе струи  $20-30 \text{ \AA}$ ) [4].

Для выяснения механизма этого явления мы провели численное моделирование развития нелинейной стадии неустойчивости Релея для случая несжимаемой идеальной жидкости. Нами показано, что в нелинейном режиме в области первоначального сужения образуется достаточно протяженный перешеек малого радиуса, который в свою очередь неустойчив относительно развития перетяжек. Таким образом, нить распадается на крупную и мелкую капельные фракции, строго чередующиеся в пространстве.

2. Численное моделирование проводилось для возмущений с различной длиной волны. В осевом направлении, учитывая симметрию, рассматривалась область  $0 \leq z \leq l = \lambda/2$ . В радиальном направлении эта область ограничена свободной поверхностью  $r(r, z, t)$ , на которой давление поверхностного натяжения определяется известным соотношением

$$p = p_a = \frac{\alpha}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2}} \left( 1 - \frac{r \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}}{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2} \right). \quad (3)$$

Исходные уравнения

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p, \quad \text{div } v = 0, \quad (4)$$

где  $v, p$  — скорость и давление жидкости.

Граничные условия для радиальной и осевой компонент скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{z=0, l} &= v_r \Big|_{r=0} = 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=0} &= v_z \Big|_{z=0, l} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0, l} = 0.$$

Начальные условия ( $t=0$ )

$$r(z) = a - \xi \cos \frac{\pi z}{l}, \quad v = 0 \quad (\xi = 0.05 \cdot a).$$

Определение поля скоростей и давления проводилось произвольным лагранжево-эйлеровым методом [5]. Вначале на каждом шаге по времени используется чисто лагранжева процедура и поле давления находится из условия сохранения объемов элементарных ячеек при перемещении их вершин. В дальнейшем для устранения чрезмерного вытягивания ячеек вдоль струи при развитии перетяжек ( $\sim r^{-2}$ ) узлы расчетной сетки регулярно перестраивались (с учетом обмена массой и импульсом между ячейками)

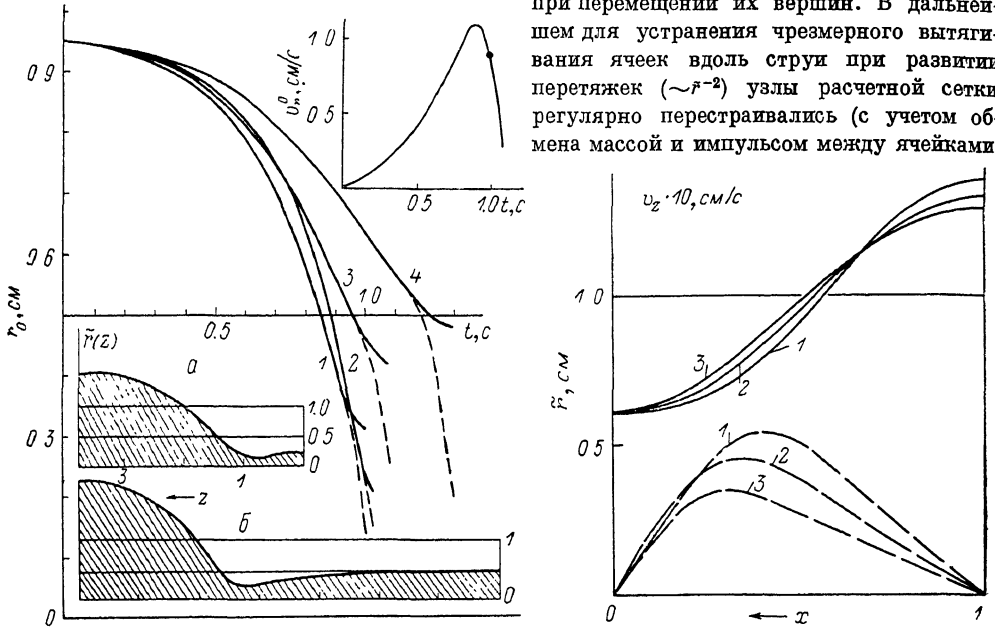


Рис. 1. Зависимости от времени радиуса струи в точке  $z=0$  (сплошные линии) для различных длин волн первоначальных возмущений.

Штриховые линии — временная эволюция минимального радиуса струи: 1 —  $\lambda=9$  (инкремент линейной теории максимален), 2 — 7.5, 3 — 11, 4 — 14 см. Верхняя вставка — радиальная скорость поверхности при  $z=0$  в зависимости от времени для  $\lambda=11$  см, точка на графике — начало отсечки капли-спутелита. Нижние вставки — профили струй на полудлине волны в процессе распада (радиальные и продольные координаты в одном масштабе): а —  $\lambda=7.5$ , б — 14 см.

Рис. 2. Профили поверхностей струй (сплошные линии) и скоростей осевого течения (штриховые) при одинаковых размерах перетяжки в точке  $z=0$ .

1 —  $\lambda=11$ , 2 — 9, 3 — 7.5 см;  $t=0.85, 0.775, 0.82$  с соответственно;  $x=z/l$ .

и удерживались на равноотстоящих плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ . Вдоль радиуса происходит свободное движение узлов вместе с жидкостью.

Расчеты выполнены для нити с параметрами  $\alpha=100$  эрг/см<sup>2</sup>,  $a=1$  см,  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup> при  $l=3.75, 4.5, 5.5, 7$  см. Для геометрически аналогичной системы  $l'/a'=a/l$  с другими характеристиками среды  $\alpha', \rho'$  исходные уравнения допускают соотношения подобия

$$t' = t \left( \frac{a'}{a} \right)^{3/2} \left( \frac{\alpha \rho'}{\alpha' \rho} \right)^{1/2}, \quad v' = v \left( \frac{\alpha' \rho a}{\alpha \rho' a'} \right)^{1/2}.$$

3. Обсудим результаты расчетов. Согласно (3), в токе первоначального сужения  $z=0$  поверхностное давление максимально и отсюда начинается отток жидкости, вызывая повышение перепада давлений  $\Delta p = p_{\alpha \max} - p_{\alpha \min}$  вдоль струи, что в свою очередь способствует дальнейшему развитию перетяжки. Зависимости  $r_0(t) = r(z=0, t)$  в начальной стадии соответствуют инкременту линейной теории (2), но в дальнейшем процесс развития перетяжки существенно изменяется. Во-первых, резко усиливается развитие коротковолновой моды (рис. 1, кривая 2,  $l=3.75$  см), а во-вторых, возникает тенденция к разрыву струи не на границе расчетной области ( $z=0$ ), а во внутренней точке  $z_0 (l/a)$  радиальная скорость на поверхности в области начального сужения  $v_r^0 = |v_r(z=0, r=r)|$  резко снижается с определенного момента

времени (рис. 1, верхняя вставка), возникает перешеек и на его поверхности развивается новое сужение (рис. 1, нижние вставки). Таким образом, учитывая симметрию задачи, струя распадается на большие капли и капли-сателлиты.

Рассмотрим подробнее процессы, происходящие на нелинейной стадии. Как показывают расчеты, продольная скорость  $v_z(z, r)$  слабо зависит от радиуса (поскольку длина волны много больше радиуса нити [2]) и как следствие  $v_r = r\bar{v}_r/r$ , где  $\bar{v}_r$  — радиальная скорость свободной поверхности. Поэтому ниже мы рассмотрим эволюцию  $\bar{v}_r(z, t)$  и скорость осевого течения  $v_z(z, t) = v_z(z, r=0, t)$ .

На рис. 2 приведены профили  $r(z)$  и  $v_z(z)$  для случая, когда при различных  $\lambda$  радиус нити в точке  $z=0$  одинаков. Видно, что для более коротковолновых возмущений характерен отток жидкости в более узкую область:  $r(z)$  в зоне сужения увеличивается с ростом  $k$ , а точка максимума  $v_z$  сдвигается в сторону меньших  $z$ . Основное падение давления вдоль

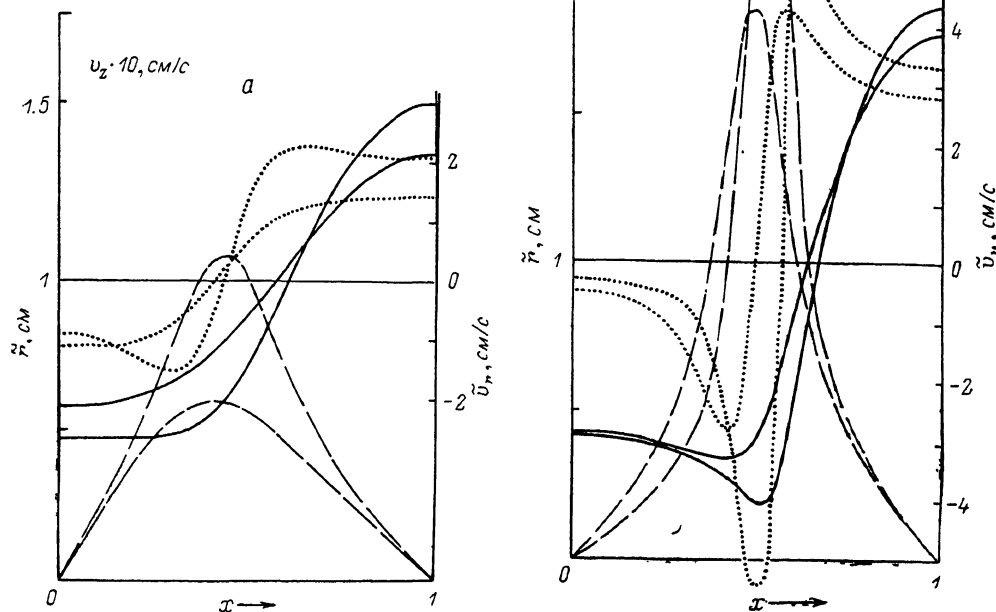


Рис. 3. Профили поверхностей струи (сплошные линии), осевых (штриховые) и радиальных скоростей свободной поверхности (точки) для  $\lambda=11$  см в различные моменты времени.

$t, c$ : а — 0.88 ( $v_0^0$  достигла максимума), 0.98 (начало отсечки перешейка и образования новой перетяжки); б — характеристике процесса отсечки в развитой фазе:  $t=1.05, 1.08 c$ ;  $x=z/l$ .

перетяжки происходит в промежутке  $0 < z < z_m$ , где точка  $z_m$  соответствует максимуму осевой скорости (этот промежуток назовем базой). Уменьшение размера [базы при малых  $\lambda$  вызвано более резким спадом поверхностного давления (3) вдоль оси (из-за множителей  $\sim 1 + (r'_z)^2$ ). При меньшей базе снижаются затраты энергии на перемещение жидкости в процессе развития перетяжки и скорость роста коротковолновых возмущений на нелинейной стадии увеличивается.

При одинаковой начальной амплитуде гармоник  $\epsilon$  временная эволюция минимального радиуса нити определяется гармоникой с максимальным инкрементом (2) (рис. 1, штриховые кривые). В работе [8] была дана оценка характерного времени развития перетяжки для этого случая

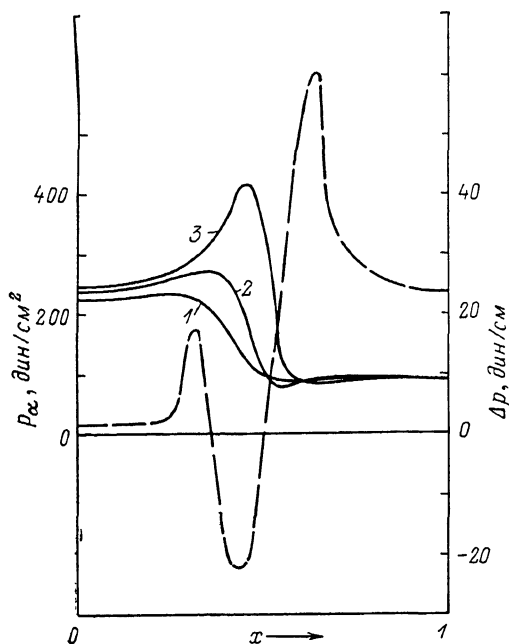
$$t_0 = \gamma_m^{-1} \ln(a/\epsilon k_m), \quad (6)$$

где  $\gamma_m$  — максимальный инкремент (2).

Наши расчеты подтверждают справедливость такой оценки.

Вследствие эффективного конвективного переноса скорости  $\bar{v}_r(z, t)$ , обусловленного осевым течением, происходят выравнивание  $\bar{v}_r$  на поверхности базы и ее удлинение (рис. 3).

Формируется зона с малым перепадом поверхностного давления (перешеек) как следствие скорости  $v_0^0$  снижается (рис. 1, верхняя вставка). Уменьшение  $v_0^0$  является предвестником отсечки перешейка и образования капли-сателлита. У оснований перешейка (расположенных симметрично относительно точки  $z=0$ ) вследствие резкого изменения кривизны поверхности возникает большой перепад поверхностного давления и скорость истечения жидкости резко возрастает, что приводит к увеличению дисбаланса давлений в радиальном направлении у оснований и развитию здесь новых перешейков (рис. 3, а, б). На рис. 4 представлена временная эволюция профиля поверхностного давления (и радиального дисбаланса давлений) на заключительной стадии распада нити. Радиус капли-сателлита при  $\lambda=9a$  приблизительно в три раза меньше радиуса основной капли.



В определенной мере примером описанного выше процесса отсечки перешейка является весенняя капель [?]. По мере сужения шейки висящей капли увеличивается дисбаланс давлений у оснований шейки, именно здесь происходят ее разрывы. Вслед за большой каплей падает малая капля-сателлит.

В определенной мере примером описанного выше процесса отсечки перешейка является весенняя капель [?]. По мере сужения шейки висящей капли увеличивается дисбаланс давлений у оснований шейки, именно здесь происходят ее разрывы. Вслед за большой каплей падает малая капля-сателлит.

Рис. 4.

$\lambda=11$ ; сплошные линии — профили поверхностного давления: 1 —  $t=1.015$ , 2 — 1.05, 3 — 1.08 с; штриховая —  $\Delta p(z)=p(z, r=0)-p_\alpha(z)$  в момент 1.08 с.

В заключение отметим следующее: все особенности распада струи определяются размером базы. Ее относительная длина  $z_m/\lambda$  — динамическая переменная, определяемая конкуренцией двух факторов: с одной стороны, конвективный перенос скорости стремится выровнять и удлинить базу, а с другой — возрастающий прогиб поверхности смещает максимум  $|dp_\alpha/dz|$  в сторону меньших  $z$ . Роль второго фактора возрастает при уменьшении  $\lambda$ , поэтому коротковолновым начальным возмущениям соответствуют меньшие капли-сателлиты.

#### Список литературы

- [1] Lord Rayleigh. // Proc. London Math. Soc. 1878. Vol. 10. N 1. P. 7.
- [2] Левин В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [3] Donnelly R. S., Glaberson W. // Proc. Roy. Soc. A. 1966. Vol. 290. N 1423. P. 547—556.
- [4] Tompson S. P. // Proc. 29th Int. Field Emission Symp. Goteborg, 1982. P. 349.
- [5] Херт С. // Численные методы в механике жидкостей / Под ред. О. М. Белоцерковского. М.: Мир, 1973. С. 156.
- [6] Назин С. С., Изотов А. Н., Шихин В. Б. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 121—125.
- [7] Гегузин Я. И. Капля. М.: Наука, 1977. 50 с.

Институт физики АН УССР  
Киев

Поступило в Редакцию  
18 мая 1989 г.  
В окончательной редакции  
8 декабря 1989 г.