

04; 10

© 1990 г.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
В ОТСУТСТВИЕ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОНОВ

Б. Н. Руткевич, П. Б. Руткевич

Для системы двух электронных пучков со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ) в условиях, когда захват электронов полем волны не осуществляется (плотности пучков одинаковы, энергетический разброс электронов мал), показана возможность двух типов эволюции неустойчивости, один из которых характеризуется увеличением инкремента с ростом амплитуды (тип I), а другой — уменьшением (тип II). В первом случае амплитуда монотонно возрастает, во втором испытывает колебания с большим периодом. Для монокинетических пучков в плоскости ( $w, u$ ), где  $w = v_2/v_1$ ,  $u = v_p/v_1$ ,  $v_p$  — фазовая скорость волны, определены области с I и II типами развития неустойчивости.

## Введение

Обычно стабилизация пучковой неустойчивости связывается с захватом электронов полем волны (см., например, [1, 2]). Существует, однако, режим, в котором в ходе неустойчивости усиление колебаний прекращается задолго до того, как станет возможным захват. Такой режим проще всего осуществить в системе пучков равной плотности, когда усиление испытывают волны с фазовой скоростью, близкой к полусумме скоростей взаимодействующих пучков. Скорость электронов относительно такой волны близка к половине разности скоростей пучков и может быть сделана достаточно большой. Соответственно большой будет критическая амплитуда, с которой начинается захват электронов. В этих условиях в чистом виде проявляется нелинейный эффект, состоящий в переходе от усиления колебаний к затуханию. Ему посвящены работы [3-10].

В одной из работ [4] описан эксперимент, в котором колебания плотности электронов, возбуждаемые внешним источником, усиливались в результате взаимодействия электронного пучка с плазмой, образованной ионизацией остаточного газа самим пучком. Плотность плазмы путем изменения давления газа поддерживалась приблизительно равной плотности пучка. При этом усиление испытывали лишь колебания, распространяющиеся со скоростью, близкой к половине скорости основного пучка. В некоторой полосе частот осуществлялся режим, в котором амплитуда проходила через максимум и возвращалась к исходному уровню. В максимуме она была недостаточна для захвата электронов.

Попытки объяснения ограничения неустойчивости привели к теории нелинейных колебаний. Был рассмотрен случай, когда частота линейно зависит от волнового числа  $k$ , т. е. когда выполняется условие  $\omega''(k) \equiv (d^2\omega)/(dk^2) = 0$ . В этом случае колебания попадают в класс гиперболических волн [11].

В расчетах использовалась модель тонкого электронного слоя, рассматривающая ленточный пучок в плоском волноводе. Прототипом этой модели может служить, например, система встречных пучков в магнитной щели электромагнитной ловушки [12]. Другой пример представляет эксперимент [4], в котором пучок был действительно тонким. Он создавался с помощью кольцевого катода — вольфрамовой нити толщиной 0.5 мм. В сильном продольном магнитном поле пучок имел вид тонкостенной электронной «трубки», коаксиальной

цилиндрическому волноводу (диаметр волновода 9 см, «трубки» — 2 см). Различие в геометрии не является существенным.

Ранее на основе данной модели для колебаний плотности были получены решения типа простых волн и было показано, что их взаимодействие при некоторых условиях приводит к периодическому изменению амплитуды [7, 9].

Условие  $\omega''(k)=0$  для модели тонкого слоя выполняется в длинноволновой области. Для волн с длиной, сравнимой с поперечным размером волновода, кривизна дисперсионной зависимости становится значительной ( $\omega'' \neq 0$ ), благодаря чему колебания переходят в класс диспергирующих волн [11].

Для случая слабой дисперсии нелинейная стадия неустойчивости рассматривалась в системе встречных электронных потоков [10]. Найдено решение, которое характеризуется периодическими изменениями амплитуды.

Настоящая работа имеет целью решение задачи о развитии неустойчивости без ограничивающих условий на скорости и дисперсию. В основе анализа по-прежнему лежит модель тонкого слоя. В предположении малой амплитуды используются известные асимптотические методы [13, 14]. Получены ре-

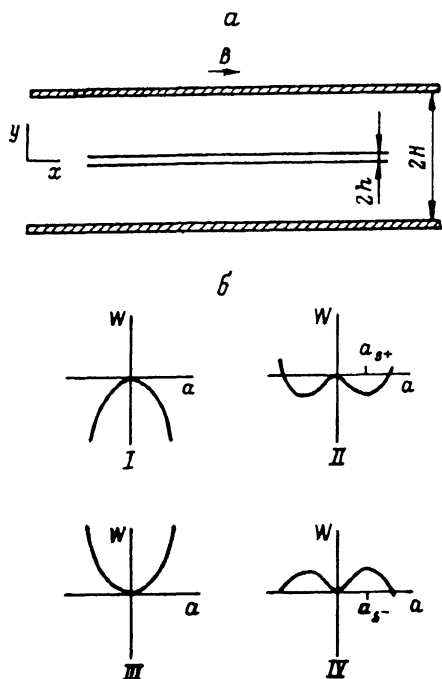


Рис. 1.

$a$  — модель тонкого слоя — ленточный электронный пучок в плоском волновом (  $h \ll H$  ).  $b$  — типы решений уравнения (20). I — взрывная неустойчивость ( $\alpha S_1 > 0, S_2 > 0$ ); II — нелинейное ограничение амплитуды ( $\alpha S_1 > 0, S_2 < 0$ ); III — устойчивость, ионная волна ( $\alpha S_1 < 0, S_2 < 0$ ); IV — режим жесткого возбуждения неустойчивости ( $\alpha S_1 < 0, S_2 > 0$ ).

шения двух типов, один из которых характеризуется ростом инкремента с увеличением амплитуды (взрывная неустойчивость, тип I), другой — уменьшением инкремента и сменой его знака (ограничение амплитуды, тип II).

### Основные уравнения

Рассматриваются два электронных пучка со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ). Плотности невозмущенных пучков одинаковы ( $n_{10}=n_{20}$ ). Электроны движутся вдоль плоского слоя толщиной  $2h$  внутри волновода, образованного двумя проводящими плоскостями (рис. 1,  $a$ ). В дальнейшем длины будут нормироваться к расстоянию  $H$  между стенкой волновода и электронным слоем ( $h \ll H$ ), скорости — к  $v_1$ , плотности — к  $n_{10}$ , потенциалы — к  $-(mv_1^2/2e)$ , времена — к  $\omega_p^{-1}\sqrt{H}/h$ , где  $\omega_p = (4\pi e^2 n_{10}/m)^{1/2}$ . Сильное магнитное поле  $B$  исключает поперечные движения электронов. Начало координат располагается внутри слоя в сечении, где находится источник высокочастотных колебаний. Ось  $x$  направлена вдоль слоя, ось  $y$  перпендикулярна слою. Пучки представляются функцией распределения  $f(v, x, t)$ . Для невозмущенных пучков она удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) dv = 1 \quad (1)$$

В случае монокинетических пучков невозмущенная функция распределения имеет вид

$$f_0(v) = \frac{1}{2} [\delta(v-w) + \delta(v-1)], \quad (2)$$

где  $w = v_2/v_1$ .

Функция распределения удовлетворяет уравнению Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (3)$$

где  $\psi_1 = \psi_1(x, t)$  — нормированный потенциал электрического поля в электронном слое ( $y=0$ ).

Уравнение для  $\psi_1$  можно получить, рассматривая тонкий электронный слой как границу, на которой нормальная составляющая электрического поля испытывает разрыв, пропорциональный поверхностной плотности заряда  $(n_1 + n_2)2h$ .

Электрический потенциал в вакууме удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

при граничных условиях

$$\Phi|_{y=\pm 1} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=h} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-h} = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} f dv, \quad (6)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{v_1^2}{\omega_p^2 h H} \quad (7)$$

(в правой части последнего равенства все величины размерны).

Решение уравнения (4) может быть найдено в виде разложения по степеням  $y$ , содержащего в качестве коэффициентов производные от  $\Phi$  по  $x$ . Для компактной записи таких разложений удобны операторные обозначения [15, 16]: например

$$D_x \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$(\cos D_x) \Phi = \left( 1 - \frac{D_x^2}{2!} + \frac{D_x^4}{4!} - \dots \right) \Phi,$$

$$(\cos y D_x) \Phi = \left( 1 - \frac{y^2 D_x^2}{2!} + \frac{y^4 D_x^4}{4!} - \dots \right) \Phi,$$

$$(D_x \operatorname{ctg} D_x) \Phi = \left( 1 - \frac{D_x^2}{3} - \frac{D_x^4}{45} - \dots \right) \Phi$$

и т. д.

В этих обозначениях (4) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + D_x^2 \Phi = 0.$$

Решение для  $y > 0$  (система симметрична) также представляется в операторной форме

$$\Phi(x, y) = (\cos y D_x) \psi_1(x) + (\sin y D_x) \psi_2(x),$$

где  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  — произвольные функции координаты  $x$ .

Функция  $\psi_2$  исключается с помощью условия (5), которое в операторной записи имеет вид

$$(\cos D_x) \psi_1(x) + (\sin D_x) \psi_2(x) = 0.$$

Условие (6) приводит к уравнению Пуассона

$$(D_x \operatorname{ctg} D_x) \psi_1(x) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v, x, t) dv.$$

В отсутствие ионов величина  $\psi_1$  содержит постоянную составляющую  $\bar{\psi}_1$ , обусловленную зарядом невозмущенного пучка. Она удовлетворяет последнему уравнению, в котором функцию  $f$  следует заменить функцией распределения  $f_0$  невозмущенного пучка.

Вводя обозначение  $\varphi(x) = \psi_1(x) - \bar{\psi}_1$ , из уравнений для  $\psi_1$  и  $\bar{\psi}_1$  найдем

$$(D_x \operatorname{ctg} D_x) \varphi \equiv \left(1 - \frac{D_x^2}{3} - \frac{D_x^4}{45} - \dots\right) \varphi = \frac{2}{\sigma^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(v, x, t) dv - 1 \right). \quad (8)$$

Уравнения Власова (3) и Пуассона (8) образуют замкнутую нелинейную систему для потенциала  $\varphi$  и функции распределения  $f$ . Эти уравнения справедливы для волн любой длины (превосходящей, разумеется, толщину слоя  $h$ ). Рассмотренные ранее уравнения «слабой дисперсии» [6, 10] и «линейной дисперсии» [7, 9] получаются из (8) путем сохранения в операторе, действующем на  $\varphi$ , двух первых членов и единицы соответственно.

В эксперименте [4] роль второго пучка играли электроны, образованные ионизацией остаточного газа основным пучком. Ионы, возникающие в процессе ионизации, осуществляли нейтрализацию постоянной составляющей электронного заряда. В этом случае уравнение Пуассона имеет вид

$$(D_x \operatorname{ctg} D_x) \varphi = \frac{2}{\sigma^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(v, x, t) dv - \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(v, x, t) dv} \right), \quad (9)$$

где черта сверху означает усреднение по высокочастотным колебаниям.

Для волны  $\varphi \sim \exp[i(kx - \omega t)]$  из (3) и (8) нетрудно получить дисперсионное соотношение в линейном приближении

$$\sigma^2 = \frac{\operatorname{th} k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(v-u)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv, \quad (10)$$

где  $u = \omega/k$  — фазовая скорость волны.

При заданных  $\sigma^2$ ,  $f_0$  и  $u$  из (10) можно найти частоту  $\omega_0$  и волновое число  $k_0$ , при которых корни уравнения (10) перестают быть вещественными. Это — граница неустойчивости. Смещение по частоте (в сторону неустойчивости) на малую величину  $\alpha$  приводит к появлению мнимости в выражении волнового числа  $k = k_0 + i\beta$ . Мнимая часть пропорциональна  $\sqrt{|\alpha|}$ . В том же линейном приближении потенциал волны имеет вид

$$\varphi = a(x) \cos(k_0 x - \omega_0 t),$$

где  $a(x) = a_0 e^{3x}$ .

Соответствующее нелинейное решение представляется кноидальной волной, которая может быть разложена по степеням амплитуды

$$\varphi = \varphi_1(\theta, \xi) + \varphi_2(\theta, \xi) + \dots, \quad (11)$$

где  $\theta = k_0 x - \omega_0 t$  и  $\xi$  — «медленная» координата [14].

Поскольку интенсивность колебаний на входе ( $x=0$ ) постоянна, то амплитуда зависит только от координаты и, следовательно, «медленное» время отсутствует.

Аналогично раскладывается функция распределения

$$f = f_0(v) + f_1(v, \theta, \xi) + f_2(v, \theta, \xi) + \dots \quad (12)$$

Введем обозначение  $D = \partial/(\partial\theta)$  и произведем замену дифференциальных операторов

$$D_{\xi} = k_0 D + \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\omega_0 D - \alpha D.$$

Полагая амплитуду величиной первого порядка малости, а величины  $\alpha$  и  $da/d\xi$  малыми второго порядка, выполним разложение операторов в уравнениях (3) и (8). Они примут вид

$$v \frac{\partial f}{\partial \xi} - k_0(v - u_0) Df - \alpha Df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + k_0 D \right) \varphi \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (13)$$

$$\sigma^2 \left[ k_0 D \operatorname{ctg} k_0 D + \left( \operatorname{ctg} k_0 D - \frac{k_0 D}{\sin^2 k_0 D} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( -\frac{1}{\sin^2 k_0 D} + \frac{k_0 D \cos k_0 D}{\sin^3 k_0 D} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \dots \right] \varphi = 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} f dv - 1 \right), \quad (14)$$

где  $\varphi$  и  $f$  — функции, определяемые разложениями (11) и (12);  $u_0 = \omega_0/k_0$  — фазовая скорость волны на границе неустойчивости.

### Уравнение для амплитуды

Из последних двух уравнений в первом приближении следуют полученные выше соотношения линейной теории

$$f_1 = \varphi_0 f_0^{(1)}, \quad \sigma^2 = 2g_1 \frac{\operatorname{th} k_0}{k_0}.$$

Здесь использованы обозначения

$$f_0^{(i)} = \frac{1}{2(v - u_0)} \frac{\partial f_0^{(i-1)}}{\partial v}, \quad g_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(i)} dv, \quad i = 1, 2, \dots \quad f_0^{(0)} \equiv f_0.$$

Во втором приближении из (13) находим

$$f_2 = \bar{\varphi}_2 f_0^{(1)} - \frac{u_0}{v - u_0} \frac{1}{k_0 D} f_0^{(1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\bar{\varphi}_1^2}{2} f_0^{(2)} + \frac{a^2}{8} C(v), \quad (15)$$

где тильдой отмечены периодические составляющие функций  $\varphi_2$  и  $\varphi_1^2$  (непериодические включены в постоянную интегрирования  $C(v)$ ).

Уравнение (14) во втором приближении содержит секулярные члены. Их сумма должна быть приравнена к нулю, что приводит к уравнению, с учетом (15) определяющему волновое число на границе неустойчивости

$$2g_1 \left( 1 - \frac{2k_0}{\operatorname{sh} 2k_0} \right) = -2u_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^{(1)}}{v - u_0} dv. \quad (16)$$

Остальные члены уравнения позволяют определить как постоянную, так и переменную части потенциала  $\varphi_2$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{a^2}{4\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} C(v) dv, \quad (17)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{a^2}{4} \frac{g_2 \cos 2\theta}{g_1 \operatorname{th}^2 k_0}. \quad (18)$$

В третьем приближении уравнение (13) содержит величины, не зависящие от  $\theta$ . Они также должны быть приравнены к нулю, что позволяет вычислить интеграл в (17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(v) dv = \frac{m_2}{1 - \frac{m_1}{\sigma^2}}, \quad (19)$$

где

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv,$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{v-u_0} f_0^{(1)} \right) dv.$$

Равенство нулю секулярных членов в уравнении для потенциала (14) приводит к уравнению для амплитуды

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \alpha S_1 a + S_2 a^3, \quad (20)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{k_0 S} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^{(1)} dv}{v - u_0}, \quad (21)$$

$$S_2 = \frac{1}{8S} \left[ g_1 \left( \frac{g_2^2}{g_1^2} \frac{1}{\text{th}^2 k_0} - \frac{g_2}{g_1} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} C^{(1)}(v) dv \right], \quad (22)$$

$$S = -\frac{g_1}{\text{sh}^2 k_0} \left( 1 - \frac{\text{th} k_0}{k_0} \right) + \frac{u_0}{k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v f_0^{(1)}}{(v - u_0)^2} dv. \quad (23)$$

Интеграл в (22) вычисляется с помощью (16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^{(1)}(v) dv = \frac{2\tilde{\varphi}_2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3v - u_0}{v^2 (v - u_0)^3} f_0 dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3v - u_0}{v (v - u_0)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \quad (24)$$

Различные типы решений уравнения (20) представлены на рис. 1, б. Для наглядности здесь использована известная аналогия между уравнением (20) и уравнением движения тяжелой точки в некотором потенциальном поле [2]. В данном случае «потенциальная энергия» для колебаний амплитуды имеет вид

$$W(a) = -\frac{\alpha S_1 a^2}{2} - \frac{S_2}{4} a^4.$$

На рис. 1, б схематически представлены зависимости  $W(a)$  при всевозможных знаках коэффициентов  $\alpha S_1$  и  $S_2$ . Типы решений обозначены римскими цифрами: *I* и *II* — линейная неустойчивость, *III* и *IV* — линейная устойчивость. При конечных амплитудах решение *I* представляет взрывную неустойчивость, *II* — нелинейное ограничение неустойчивости, *III* — устойчивые кноидальные волны, *IV* — жесткий режим возбуждения колебаний. Важными характеристиками решений типа *II* и *IV* являются стационарные амплитуды  $a_*$ ,

$$a_*^2 = -\frac{\alpha S_1}{S_2}. \quad (25)$$

В режиме *II* амплитуда волны совершает колебания около величины  $a_*$  (обозначим ее  $a_{s+}$ ), в режиме *IV* величина  $a_* \equiv a_{s-}$  имеет смысл пороговой амплитуды, с которой начинается неустойчивость (жесткий режим).

До сих пор рассматривались чисто электронные пучки. В случае ионной компенсации следует исходить из уравнения (9) и во всех формулах, начиная с (15), полагать  $C(v) = 0$ .

Полученные таким образом решения позволяют на плоскости  $(w, u_0)$  находить область неустойчивых решений и определять тип эволюции неустойчивости для каждой точки этой области.

В качестве примера представим расчет для монокинетических пучков. Ниже приведены основные формулы в случае отсутствия ионной компенсации

$$g_1 = \frac{1}{4} [(w - u_0)^{-2} + (1 - u_0)^{-2}], \quad (26)$$

$$g_2 = \frac{3}{8} [(w - u_0)^{-4} + (1 - u_0)^{-4}], \quad (27)$$

$$g_3 = \frac{15}{16} [(w - u_0)^{-6} + (1 - u_0)^{-6}], \quad (28)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{w^2} \right), \quad (29)$$

$$m_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{3w - u_0}{w^2 (w - u_0)^3} + \frac{3 - u_0}{(1 - u_0)^3} \right], \quad (30)$$

$$S_1 = -\frac{1}{2k_0 S} \left[ \frac{1}{(u_0 - w)^3} - \frac{1}{(1 - u_0)^3} \right], \quad (31)$$

$$S_2 = \frac{1}{8S} \left[ \frac{g_2^2}{g_1} \frac{1}{\text{th}^2 k_0} - g_3 + \frac{m_2^2}{2(\sigma^2 - m_1)} + m_3 \right], \quad (32)$$

$$S = \frac{g_1}{\text{sh}^2 k_0} \left( 1 + \frac{\text{th} k_0}{k_0} \right) + \frac{u_0}{4k_0^2} \left( \frac{2w - u_0}{(w - u_0)^4} + \frac{2 - u_0}{(1 - u_0)^4} \right), \quad (33)$$

$$m_3 = \frac{1}{8} \left( \frac{15w^2 - 6u_0 w + u_0^2}{w^2 (w - u_0)^6} + \frac{15 - 6u_0 + u_0^2}{(1 - u_0)^6} \right). \quad (34)$$

Для данных  $w$  и  $u_0$  волновое число, соответствующее границе неустойчивости ( $\alpha = 0$ ), определяется из уравнения (16), которое в случае монокинетических пучков имеет вид

$$1 - \frac{2k_0}{\text{sh} 2k_0} = R, \quad (35)$$

где

$$R = 2u_0 \frac{(u_0 - w)^{-3} - (1 - u_0)^{-3}}{(w - u_0)^{-2} + (1 - u_0)^{-2}}. \quad (36)$$

Решения существуют только для  $R$  из интервала  $0 \leq R \leq 1$ . Ему соответствует часть плоскости  $(w, u_0)$ , ограниченная линиями 1, 2 и осью абсцисс (рис. 2). На первых двух границах выполняется равенство  $R=0$ , на последней —  $R=1$ .

Область неустойчивых решений делится на две части линией 3 (рис. 2), на которой величина  $S$ , входящая в знаменатели коэффициентов  $S_1$  и  $S_2$ , меняет знак. На линии 3 меняется характер развития неустойчивости: под линией реализуется режим II, над линией — режим I.

При  $w > 0$  почти всюду имеет место взрывная неустойчивость. Исключением является узкая полоса (ширина  $\leq 2 \cdot 10^{-5}$ ) в окрестности контура  $\sigma^2 = m_1$  (рис. 2, 4), на котором интеграл (19) неограниченно возрастает. Полоса исчезает уже при небольшом энергетическом разбросе электронов, размывающем резонанс.

В случае ионной компенсации постоянная составляющая потенциала исчезает. Вместе с нею обращается в нуль сумма последних двух членов в выражении для  $S_2$ . Область неустойчивых состояний, ограниченная линиями 1, 2 и осью абсцисс, пересекается в этом случае еще одной кривой 5 (рис. 3), на которой коэффициент  $S_2$  проходит через нуль. В результате образуются четыре области с разными типами неустойчивости, отмеченными цифрами I и II на рис. 3. С уменьшением концентрации ионов линия 5 приближается к границе

2 и сливается с ней. Режимы II и IV характеризуются стационарными амплитудами  $a_{e+}$  и  $a_{e-}$ . С помощью (25) их можно выразить через коэффициенты  $S_1$  и  $S_2$

$$\frac{a_{e\pm}}{2|\alpha|} = \mp \frac{|S_1|}{S_2}.$$

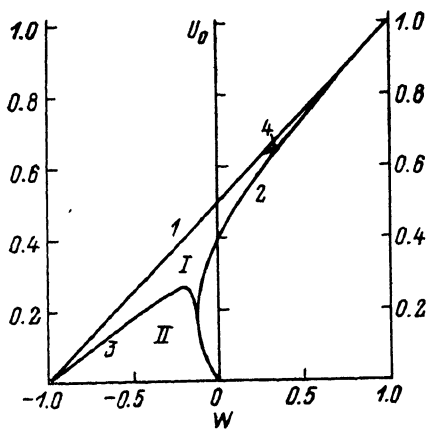


Рис. 2. Область неустойчивых решений для чисто электронных пучков.

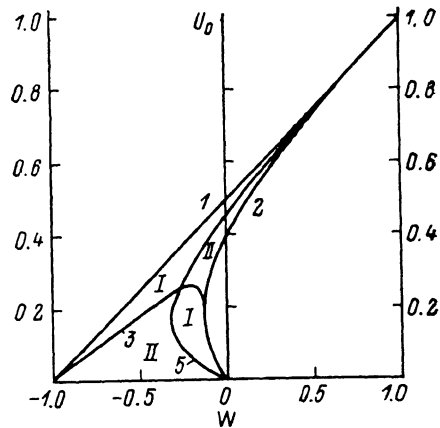


Рис. 3. Область неустойчивых решений в случае ионной компенсации.

Зависимости величины  $-(|S_1|/S_2)$  от скорости  $u_0$  для ряда значений  $w$  приведены на рис. 4—6. Верхние части графиков характеризуют  $a_{e+}$ , а нижние —  $a_{e-}$ . На кривых 3—5 (рис. 2, 3) стационарные амплитуды имеют особенности. Абсолютные величины амплитуд в отсутствие ионов, как правило, меньше,

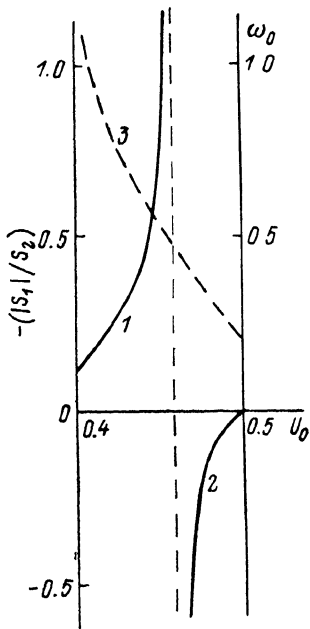


Рис. 4. Зависимость стационарных амплитуд от фазовой скорости колебаний на границе неустойчивости в случае ионной компенсации при  $w=0.001$ .

1 —  $a_{e+}$ , 2 —  $a_{e-}$ , 3 —  $\omega$ .

Рис. 5. Зависимость стационарных амплитуд от фазовой скорости в отсутствие ионов при  $w=0.3$ .

1 — над осью абсцисс ( $a_{e+}$ ), под осью абсцисс ( $a_{e-}$ ), 2 —  $a_{e-}$ , 3 —  $\omega$ .

чем в случае скомпенсированных пучков. При  $w=0.001$ , например, они не превышают  $1.2 \cdot 10^{-5}$  во всем диапазоне  $u_0$  (на рис. 5 соответствующие точки не показаны). При  $w \rightarrow 1$  стационарные амплитуды приближаются к нулю.



Данный анализ охватывает широкий диапазон скоростей и волновых чисел. В окрестности  $w = -1$  выполняются условия задачи о встречных пучках [10]. Как видно из рис. 2, 3, система испытывает неустойчивость относительно колебаний с фазовой скоростью  $u_0$ , приближающейся к нулю. При  $u_0 = 0$  реализуется решение II, полученное в [10].

При  $w \rightarrow 0$  условия задачи о скомпенсированных пучках близки к условиям эксперимента [4]. Согласно рис. 3, эта система неустойчива относительно колебаний с фазовой скоростью, близкой к половине скорости основного пучка ( $u_0 \approx 1/2$ ). В длинноволновой области реализуется I тип эволюции, в коротковолновой — II тип (рис. 4). Граница лежит вблизи  $k_0 = 1$ , что соответствует длине волны  $2\pi H$ . Все это качественно согласуется с результатами эксперимента [4].

Пользуясь приведенным расчетом, попытаемся составить наглядную картину развития пучковой неустойчивости. В случае когда плотность одного из пучков относительно мала, в основе механизма неустойчивости лежит взаимодействие волны с частицей, т. е. с резонансным электроном, захвачен-

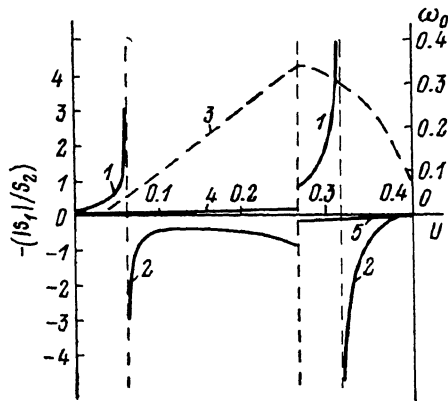


Рис. 6. Зависимость стационарных амплитуд от фазовой скорости при  $w = -0.2$ .

1 —  $a_{s+}$ , 2 —  $a_{s-}$  в случае полной компенсации; 3 —  $\omega$ ; 4 —  $a_{s+}$ , 5 —  $a_{s-}$  в отсутствие понов.

ной волной. В отличие от этого при сравнимых плотностях происходит взаимодействие двух волн плотности. Взаимодействие становится эффективным, когда волны в обоих пучках распространяются с одной скоростью. В частном случае встречных пучков равной плотности эта скорость равна нулю (рассматриваются волны, распространяющиеся против движения электронов).

Допустим, что остановившиеся волны смещены по фазе на малый угол  $2\epsilon$ . По отношению к волне потенциала, создаваемой волнами плотности, последние сдвинуты на углы  $+\epsilon$  и  $-\epsilon$ . Если максимумы плотности расположены в замедляющих полях, то электроны теряют энергию, так как скорости в электронных сгустках минимальны и, следовательно, электроны в замедляющем поле проводят большее время, чем в ускоряющем. Теряемая энергия передается полю, и колебания усиливаются. Соответствующий инкремент, как можно видеть из формулы (20), пропорционален фазовому сдвигу  $\epsilon$ .

В линейном приближении величина  $\epsilon$  не меняется, фазовая скорость волн плотности и частота остаются равными нулю. Однако с ростом амплитуды вступает в действие нелинейный эффект — зависимость частоты от амплитуды [2]. Частота изменяется на величину  $qa^2$ , где  $a$  — амплитуда;  $q$  — коэффициент, определяемый параметрами системы. Изменение частоты и, следовательно, фазовой скорости означает изменение  $\epsilon$ : в зависимости от знака  $q$  фазовое смещение  $\epsilon$  либо увеличивается, либо убывает. Соответственно изменяется инкремент. Легко видеть, что в случае увеличения  $\epsilon$  реализуется I режим, в случае уменьшения — режим II. В последнем случае электронные сгустки сближаются и затем меняются местами, в результате чего рост амплитуды сменяется ее уменьшением: амплитуда во встречных пучках испытывает колебания во времени.

В условиях, когда волны распространяются от внешнего источника колебаний с амплитудой  $a_0$ , огибающая во II режиме представляется кноидальной волной. При амплитуде  $a_0$ , близкой к стационарной амплитуде  $a_{s+}$ , огибающая почти синусоидальна. При  $a_0 \ll a_{s+}$  она имеет вид последовательности далеко разнесенных друг от друга уединенных волн. В экспериментах [4, 5] на пучках небольшой длины (до 50 см) наблюдалась одна такая волна.

Авторы весьма благодарны В. Д. Федорченко за обсуждение результатов.

### Список литературы

- [1] Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 317 с.
- [2] Кадомцев Б. В. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
- [3] Leven R. // Phenomena in Ionised Gases. Proc. 8<sup>th</sup> Int. Conf. Vienna, 1968. P. 374.
- [4] Fedorchenko V. D., Rutkevich B. N., Muratov V. I. // Nucl. Fus. 1971. Vol. 11. N 1. P. 43—50.
- [5] Levitsky S. M., Shashurin I. P. // Nucl. Fus. 1971. Vol. 11. N 2. P. 111—117.
- [6] Руткевич Б. Н., Пащенко А. В., Федорченко В. Д., Муратов В. И. // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 493—499.
- [7] Пащенко А. В., Руткевич Б. Н. // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 12. С. 2483—2488.
- [8] Курилко В. И., Толстолужский А. П., Файнберг Я. Б. // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 5. С. 985—994.
- [9] Пащенко А. В. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 2. С. 264—272.
- [10] Руткевич Б. Н., Руткевич П. Б. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 3. С. 538—545.
- [11] Уилем Дж. Линеиные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [12] Панкратов Ю. И., Набока В. А., Ноздрачев М. Г. и др. // Атомная энергия. 1980. Т. 31. № 3. С. 274—276.
- [13] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
- [14] Найфэ А. Х. Методы теории возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [15] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
- [16] Hasimoto H., Hiroaki O. // J. Phys. Soc. Jap. 1972. Vol. 33. N 3. P. 805—811.

Харьковский физико-технический  
институт АН УССР

Поступило в Редакцию  
1 сентября 1988 г.  
В окончательной редакции  
24 марта 1989 г.