

01

© 1990 г.

## ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ В ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ФЕЙГЕНБАУМОВСКИХ СИСТЕМАХ

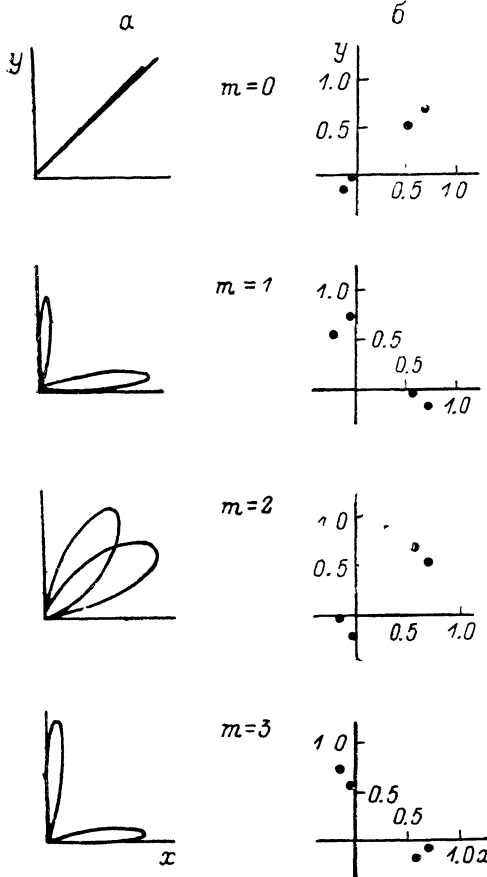
*В. В. Астахов, Б. П. Безручко, Е. Н. Ерастова, Е. П. Селезнев*

Экспериментально и численно на примерах нелинейных осцилляторов и рекуррентных уравнений исследуются две диссипативно связанные динамические системы, каждая из которых с изменением параметра демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний. Показано, что все возможные движения в этой универсальной модели при наличии дискретной симметрии по отношению к временному сдвигу могут быть представлены с помощью классификации, использующей в качестве основного отличительного признака сдвиг фазы колебаний подсистем. Описана эволюция регулярных и хаотических решений в пространстве параметров, дано толкование квазипериодических колебаний, рассмотрено влияние неидентичности подсистем и явление мультистабильности.

1. Формирование обобщающих представлений о нелинейных явлениях, без которых проблематично и понимание процессов в конкретных нелинейных системах, требует выделения и изучения эталонных объектов с универсальным поведением. К их числу, в частности, относятся системы, демонстрирующие с изменением управляющего параметра переход к хаосу в соответствии с закономерностями Фейгенбаума [1, 2] через последовательность [3] движений с удваивающимся периодом (фейгенбаумовские). В работе исследуется поведение более сложного объекта (двух диссипативно связанных фейгенбаумовских систем), который демонстрирует различные пути перехода к хаосу, включая и разрушение тора [4], что позволяет рассматривать его как отдельную универсальную нелинейную модель. Рассмотрение ограничено системами с дискретной симметрией относительно временного сдвига: экспериментально исследуются связанные нелинейные осцилляторы, возбуждаемые периодической силой, а численно — квадратичные точечные отображения. Объединенные в единую систему, две такие фейгенбаумовские системы (назовем их подсистемами) могут колебаться только с дискретными значениями сдвига во времени относительно друг друга. На основе этого свойства проведена классификация всех возможных регулярных и хаотических движений в связанной системе, описана их эволюция в пространстве параметров, дано толкование режима квазипериодических колебаний. Кроме того, исследованы влияние неидентичности подсистем и структура бассейнов притяжения мультистабильных состояний.

2. Экспериментальная система представляла собой два радиотехнических колебательных контура с варакторными диодами, которые использовались в области параметров, где их поведение в отсутствие связи хорошо описывается закономерностями Фейгенбаума [5, 6]. Подсистемы синфазно возбуждались гармоническими сигналами одинаковой частоты  $f$  и амплитуды  $V$ . Взаимная диссипативная связь осуществлялась с помощью резистора с регулируемым сопротивлением  $R$ , включенным между идентичными точками контуров. Динамика связанной системы исследовалась в зависимости от  $V$  и коэффициента связи  $K=1/R$  при фиксированных значениях других параметров. Частота внешнего воздействия была близка частоте линейного резонанса одиночного контура. Полная идентичность подсистем в эксперименте невозможна, поэтому кроме подбора элементов с близкими параметрами при необходимости производилась подстройка уровня диссипации в одном из контуров. Критерием идентичности

служила близость временных реализаций и бифуркационных значений  $V$  в первом и втором контурах в отсутствие связи. Например, после подстройки критических значений  $V_c$ , соответствующих переходу к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний, бифуркационные значения параметра, при которых появляются субгармоники  $f/8$ , отличались для подсистем не более чем на 2%. В экспериментах регистрировались временные реализации  $x(t)$  и  $y(t)$  колебаний в подсистемах (переменные составляющие напряжений на вращателях) и на элементе связи  $x(t) - y(t)$ , спектры мощности, фазовые соотношения между гармониками в спектре, проекции фазовых портретов и стробоскопические сечения.



Картину сложной динамики связанной системы можно упорядоченно представить, положив в основу классификации колебательных режимов величину временного сдвига  $\Delta t$  между колебаниями идентичных подсистем. Например, колебания периода  $2^n T_0$ , где  $T_0 = 1/f$  — период внешнего воздействия,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , могут быть реализованы  $2^n$  способами, отличающимися значением  $\Delta t = m T_0$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ ; для  $K = 0$  это очевидно, а для конечной связи и при наличии неидентичности подсистем рассмотрим далее. Колебательные режимы с фиксированным  $\Delta t = m T_0$  будем в дальнейшем называть видом колебаний номера  $m$ , введя этот индекс в условное обозначение:  $2^n T^n$  — колебания периода  $2^n T_0$  вида  $m$ ,  $2^n B^n$  — хаотические колебания на  $2^n$ -ленточном странном аттракторе (СА) на базе вида  $m$ . Режимы с  $m = 0$ , для которых  $x(t) - y(t) =$

Рис. 1. Фазовые портреты видов колебаний периода 4 связанной системы.

а — система периодически возмущаемых осцилляторов, б — система точечных отображений (1).

$= 0$ , а проекция фазового портрета на плоскость  $(x, y)$  близка к биссектрисе, классифицировались как синфазные, другие колебательные режимы с  $m \neq 0$  — как несинфазные. Примеры всех возможных видов колебаний периода  $4T_0$  приведены на рис. 1. При малой, но конечной величине связи в эксперименте удавалось наблюдать все ожидаемые виды колебаний вплоть до периодов  $16T_0$  (это ограничение определяется возможностями установки, а не принципиально).

Каждый из выделенных колебательных режимов занимает в пространстве параметров системы области, совокупности которых удобно представить на отдельных листах плоскости  $V-K$  (рис. 2, а, б). Так, лист А соответствует синфазным регулярным и хаотическим режимам, на нем эволюционирует вид  $m = 0$ . Здесь с ростом амплитуды внешнего воздействия наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся на линии  $l^0$  возникновением синфазного хаоса (подсистемы колеблются хаотически, но практически одинаково [7]). В закритической области параметров ( $V > V_c$ ) на этом листе синфазный хаос эволюционирует в соответствии с закономерностями фейгенбаумовского странного аттрактора. Области хаоса на рисунке заштрихованы. При удалении от линии  $l^0$  на листе А имеются «окна устойчивости» синфазных регулярных режимов. С уменьшением  $K$  в области закритических  $V$  на линии  $l^0$  происходит разрушение синфазного хаоса: при практически неизмен-

ном спектре мощности мягким образом нарастает степень «неидентичности» колебаний подсистем — плавно расширяется линия биссектрисы проекции фазового портрета, увеличивается размах выбросов в реализации ( $x-y$ ).

Листы, на которых расположены области существования несинфазных колебательных режимов, имеют не только отличную от листа  $A$  форму (рис. 2, б), но и содержат кроме областей движений с периодом  $2^n T_0$  и хаоса области квазипериодики  $M$  — движений с периодами  $T_0$  и  $\tau$ , чего не было в изолированной подсистеме. Более детально структуру пространства параметров для несинфазных режимов и механизмы их возникновения целесообразно обсудить после рассмотрения результатов численного исследования теоретической модели.

3. Численные исследования двух связанных фейгенбаумовских систем проводились на системе уравнений

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2),$$

$$y_{n+1} = \delta \cdot \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \quad (1)$$

где  $x_n, y_n$  — динамические переменные,  $\lambda$  — параметр неустойчивости,  $k$  — параметр связи,  $\delta$  — параметр неидентичности,  $n$  — дискретное время.

Детальный анализ синфазных колебаний в системе (1) при  $\delta=1$  проведен в [8]. Хорошее качественное совпадение структуры листа  $A$  (рис. 2, а) с результатами

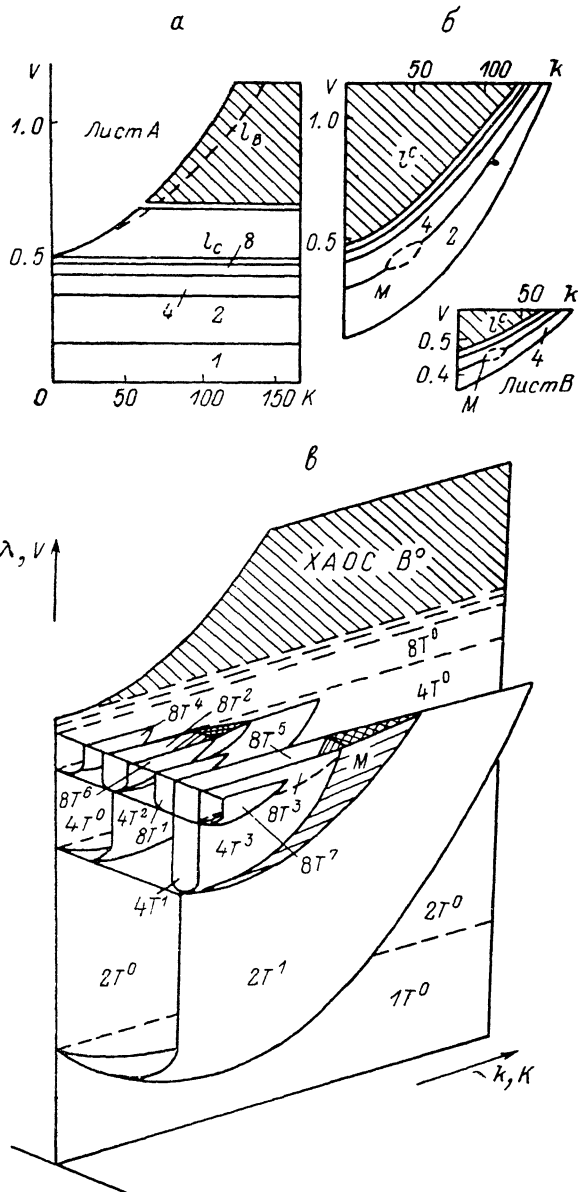


Рис. 2. Структура пространства параметров связанной системы.

а — плоскость  $V-K$  для синфазного вида (цифрами обозначен период колебаний в единицах периода внешнего воздействия); б — плоскости  $V-K$  несинфазных видов экспериментальной системы при наличии неидентичности подсистем; в — идеализованная схема, отражающая области существования всех видов колебаний периода 1, 2, 4, 8.  $M$  — области квазипериодические.

численного исследования [8] позволяют рассматривать эту систему точечных отображений, имеющую самостоятельное значение, в качестве адекватной модели экспериментальной диссипативно связанной системы, где  $\lambda$  соответствует  $V$ , а  $k - K$ . В (1) существует множество синфазных и несинфазных колебательных режимов. Характерные виды колебаний одного периода, отличающиеся сдвигом реализаций на  $m$  шагов итераций, иллюстрирует рис. 1, б на примере колебаний периода 4. Динамику связанной системы отражает эволюционная схема, построенная для (1) при  $\delta=1$  и малом фиксированном  $k$  (рис. 3). Сплошные линии соответствуют устойчивым режимам, штриховые — неустойчивым. Точками показаны бифуркационные переходы. Символы около

линий, как и в разделе 1, означают:  $2^n T^m$  — цикл периода  $2^n$  номера  $m$ ,  $2^n B^m$  —  $2^n$ -ленточный СА на базе колебаний номера  $m$ . Поясним узловые моменты этой схемы. На ней выделены ветви  $A, B, B, \Gamma, \dots$ , объединяющие некоторые совокупности режимов. Ветви начинаются периодическими режимами, а заканчиваются — хаотическими. Ветвь  $A$  соответствует эволюции синфазных режимов ( $m=0$ ), отходящие от нее ветви  $B, B, \Gamma$  — несинфазным режимам ( $m \neq 0$ ).<sup>1</sup>

Значения  $\lambda$ , при которых происходит бифуркации удвоения синфазных циклов в связанной системе, точно совпадают с соответствующими бифуркационными значениями в изолированной подсистеме. На схеме в точках раздвоения

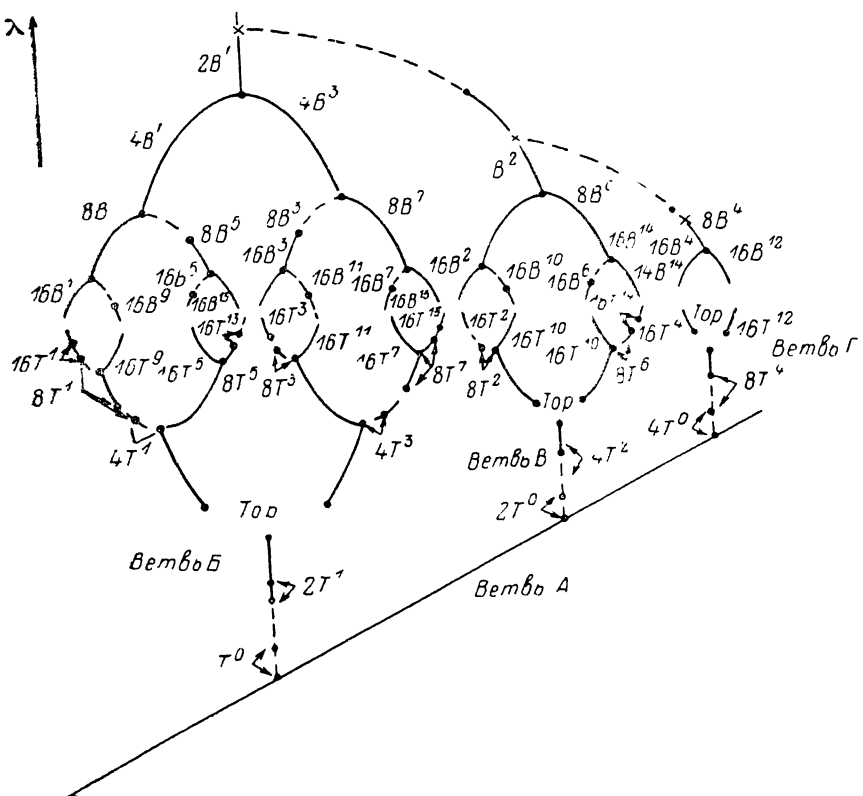


Рис. 3. Эволюционная схема связанной системы при малом коэффициенте связи.

ветви  $A$  исходный синфазный цикл теряет устойчивость (один мультипликатор достигает значения  $-1$ ) и в его окрестности рождается устойчивый синфазный цикл удвоенного периода, продолжающий ветвь. Потерявший устойчивость цикл с увеличением  $\lambda$  еще раз претерпевает бифуркацию удвоения периода (второй мультипликатор достигает  $-1$ ), и возникает неустойчивый несинфазный цикл удвоенного периода, который в дальнейшем становится устойчивым. В результате каждый синфазный цикл  $2^n T^0$  порождает с ростом  $\lambda$  пару циклов: синфазный  $2^{n+1} T^0$  и несинфазный  $2^{n+1} T^{m+1}$ . Родившиеся таким образом несинфазные циклы  $2T^1, 4T^2, 8T^4, \dots$  ложатся в основу ветвей  $B, B, \Gamma, \dots$ , где с ростом  $\lambda$  обязательно претерпевают бифуркацию рождения тора. В результате синхронизации движения на торе возникают следующие пары несинфазных циклов:  $4T^1$  и  $4T^3$  на ветви  $B$ ,  $8T^2$  и  $8T^6$  — на  $B$ ,  $16T^4$  и  $16T^{12}$  — на  $\Gamma$ . Эти циклы в свою очередь порождают по два цикла аналогично только что рассмотренному случаю с синфазными циклами и случаю с критическими значениями  $\lambda$ , соответствующих образованию фейгенбаумовского СА на базе каждого из

<sup>1</sup> Ветвь  $B$  начинается циклом периода 2 и объединяет виды колебаний с  $m=2l-1$ , ветвь  $B$  начинается циклом периода 4 и объединяет виды с  $m=2(2l-1)$ , ветвь  $\Gamma$  — соответственно 8 и  $m=4(2l-1)$ , и т. д., где  $l=1, 2, 3, \dots$ . Виды колебаний с положительными номерами  $m$  и отрицательными  $m=-2^n$  тождественны.

циклов ветви. В области хаоса с ростом надкритичности эволюционная схема внешне похожа на схему периодических режимов: пунктирные линии соответствуют непритягивающим множествам, сплошные — странным аттракторам, точка слияния пунктирной и сплошной линий соответствует слиянию лент аттрактора и его объединению с ранее непритягивающим множеством, так что в результате формируется аттрактор, включающий в себя оба отмеченные множества. Каждая из ветвей с ростом  $\lambda$  завершается парой странных аттракторов, у которых  $n$  и  $m$  совпадают с индексами циклов, возникающих в результате синхронизации движения на торе ( $4B^1$  и  $4B^3$  на ветви  $B$ ,  $8B^2$  и  $8B^6$  — на  $B$ , . . .). При дальнейшем увеличении надкритичности наблюдается режим перемежаемости хаос—хаос между аттракторами пары. Режим перемежающейся стохастичности плавно сменяется аттрактором  $2^n B^m$ , у которого  $n$  и  $m$  совпадают с индексами цикла, являющегося началом этой ветви:  $2B^1$  на ветви  $B$ ,  $4B^2$  — на ветви  $B$ , . . . . Выше отметки (звездочка) соответствующий аттрактор объединяется с аттракторами, которые образуют ветви, расположенные на схеме справа.

4. При нулевом коэффициенте связи колебания идентичных подсистем одинаковы и могут быть лишь сдвинуты относительно друг друга во времени. Наличие конечной связи приводит к появлению различий во временных реализациях колебаний даже идентичных подсистем<sup>2</sup> — к нарушению симметрии цикла отно-

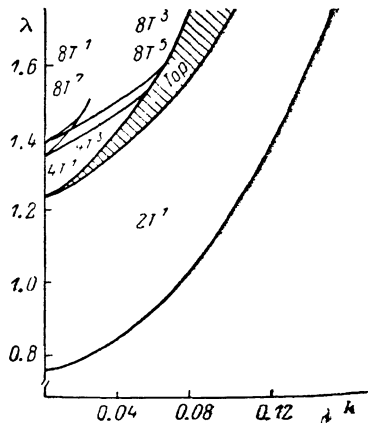


Рис. 4. Области существования несинфазных циклов ветви  $B$  эволюционной схемы на плоскости параметров  $\lambda-k$ .

сительно замены  $x$  на  $y$  для всех видов колебаний, кроме синфазных  $2^n T^0$  и родившихся непосредственно из синфазных  $2T^1, 4T^2, 8T^4, \dots$ . Степень различия увеличивается с ростом связи, но не затрагивает определяющего признака вида колебаний — фиксированного значения временного сдвига между колебаниями подсистем (если под этим понимать временной интервал, например, между максимумами в реализациях  $x_n, y_n$ ). Циклы, родившиеся в результате синхронизации движения на торе ( $4T^1-4T^3, 8T^2-8T^6, 16T^4-16T^{12}, \dots$ ), образуют зеркально-симметричные пары: замена  $x$  на  $y$  переводит их друг в друга. Родившиеся из них циклы также образуют зеркально-симметричные пары  $2^n T^m-2^n T^{2^n-m}$  при условии идентичности пути эволюции: например,  $8T^1-8T^7, 16T^2-16T^{14}, 16T^1-16T^{15}$ , родившиеся после удвоения потерявших устойчивость циклов, а также  $8T^5-8T^3, 16T^{10}-16T^6$ , появившиеся непосредственно после бифуркации удвоения периода исходного цикла.

Введение связи ограничивает сверху по  $k$  области существования в пространстве параметров всех несинфазных видов колебаний (на рис. 4 приведено разбиение плоскости параметров  $\lambda-k$  системы (1) на области существования циклов ветви  $B$  эволюционной схемы). Цикл  $2T^1$  с увеличением  $\lambda$  претерпевает бифуркацию рождения тора. На линии рождения тора опираются языки синхронизации с различными рациональными числами вращения (на рисунке не показано). Циклы  $4T^1$  и  $4T^3$  также возникают в результате седло-узловой бифуркации; линии седло-узловых бифуркаций этих циклов совпадают и опираются на линии рождения тора в точке  $k=0$ , а реализация того или иного цикла зависит от выбора начальных условий. Все другие циклы большего периода возникают на плоскости рис. 4 в результате бифуркаций удвоения периода. Структура плоскости параметров рис. 4 типична для всех ветвей несинфазных режимов и показывает, что схема эволюции видов колебаний (рис. 3) с увеличе-

<sup>2</sup> Зафиксировать различия в экспериментальной системе при  $k \ll 1$  достаточно сложно из-за их малости.

нием  $k$  будет упрощаться, теряя в первую очередь несинфазные колебательные режимы большого периода; при  $k=0.5$  на рис. 3 останется только одна ветвь синфазных режимов. Данные выводы подтверждаются и результатами экспериментов (рис. 2, а, б).

5. Квазипериодические движения в исследуемых системах могут быть истолкованы как взаимная сменяемость («биение») с некоторым характерным периодом  $\tau$  двух видов колебаний, составляющих зеркально-симметричную пару (рис. 5). В формировании этого движения участвуют виды  $4T^1-4T^3$ ,  $8T^2-8T^6$ ,  $16T^4-16T^{12}$ , ..., существующие после разрушения движений на торе как отдельные циклы. Резонансы, которым соответствуют на плоскости параметров известные языки синхронизации, имеют место при рациональном отношении  $\tau/T_0$ .<sup>3</sup> Значение  $\tau$  находится в обратной зависимости от величины связи. Спектры квазипериодических колебаний имеют в рассматриваемых си-

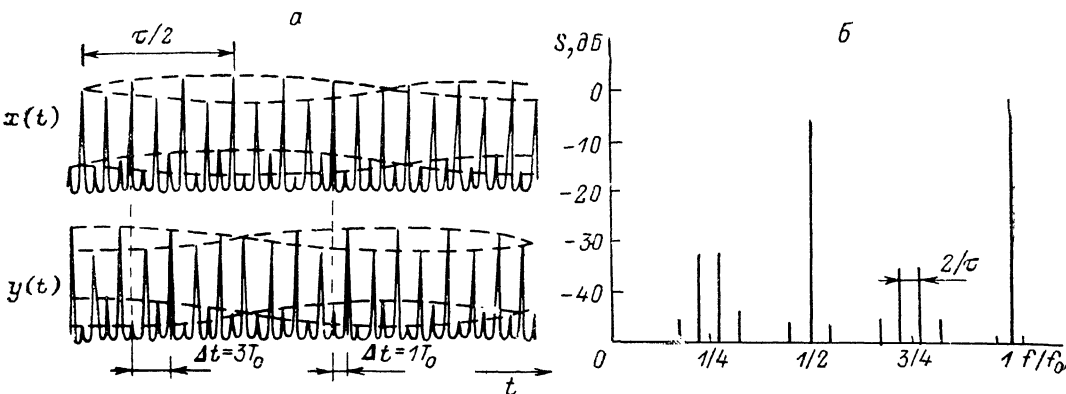


Рис. 5. Временные реализации (а) и спектр мощности (б) квазипериодических колебаний, в которых участвуют виды  $4T^1$  и  $4T^3$ .

$\Delta t$  — временной сдвиг между колебаниями в подсистемах; закрашенные пики, соответствующие соседним максимальным значениям  $x$  и  $y$ .

стемах характерный вид (рис. 5, б) с расщепленной субгармоникой  $f/2^n$  [9, 10], что с помощью свойственных радиотехническим системам терминов теории сигналов может быть интерпретировано как результат нелинейной фазовой модуляции соответствующих субгармоник с периодом  $\tau$  и девиацией фазы, равной  $\pi$ . Основанием для такой интерпретации является противофазность субгармоник  $f_0/2^n$  в спектрах колебаний для видов зеркально-симметричной пары, участвующей в формировании квазипериодического движения.

6. Сопоставление результатов экспериментальных исследований, проведенных при подстройке идентичности подсистем при одном значении  $\bar{V}=V_c$ , и численного анализа модели (1) при  $\delta=1$  обнаруживает определенные различия, которые объясняются неидентичностью подсистем в эксперименте. Так, по результатам эксперимента на листе  $B$  плоскости параметров  $V-K$  и на других листах, соответствующих несинфазным видам (рис. 2, б), квазипериодические колебания существуют лишь в некоторой области  $M$  значений параметров вблизи первой линии удвоения периода, причем ордината «центра» области соответствует  $V_c$ . В то время как по результатам расчетов на ветви  $B$  плоскости параметров  $\lambda-k$  рис. 4 при любых значениях  $k$  цикл  $2T^1$  с увеличением  $\lambda$  претерпевает бифуркацию рождения тора. Подстройка идентичности контуров во всех точках диапазона значений  $V$  делает структуру листов  $B, B, \Gamma$  на рис. 2 схожей с расчетной для (1) при  $\delta=1$ . В то же время рост степени неидентичности подсистем уменьшает число видов колебаний связанной системы, причем наименее подвержен изменениям и дольше всех существует синфазный вид колебаний. С ростом неидентичности циклы одного периода с различными индексами  $m$ , составляющие описанные выше пары, либо становятся схожими по конфи-

<sup>3</sup> Структура областей квазипериодики подробно рассмотрена в [8] на примере несинфазного возбуждения связанных осцилляторов.

граница и вырождаются в один вид, либо один из циклов исчезает и система жестко переходит на другой цикл пары. Неидентичность может приводить к появлению в пространстве параметров дополнительных областей квазипериодики: например, увеличивая диссипацию в одном из контуров экспериментальной системы (или варьируя значения  $\delta$  в (1)), можно добиться появления на листе  $B$  (ветви  $B$ ) квазипериодических движений на базе восьмитактных циклов.

7. Обобщая результаты экспериментальных и численных исследований, изложенные в разделах 2—6, для случая идентичных подсистем можно построить наглядную объемную схему областей существования устойчивых колебательных режимов диссипативно связанной системы на плоскости параметров неравновесности и связи  $\lambda$ ,  $V-k$ ,  $K$ . Рис. 2,  $e$  отражает фрагменты полной картины, поясняя принцип ее построения: он охватывает все синфазные режимы и регулярные несинфазные режимы периода не более 8. Эволюционная схема рис. 3 получается в результате сечения рис. 2,  $e$  плоскостью  $k=\text{const}$  и показывает принцип склеивания листов при закритических значениях параметров. Количество листов, которые необходимо ввести в картину для описания сложной динамики системы, зависит от степени детализации в теории и уровня шумов в эксперименте.

8. Из рис. 2,  $e$  видно, что при фиксированных значениях параметров в фазовом пространстве рассматриваемой связанной системы могут одновременно су-

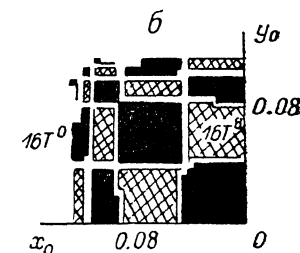
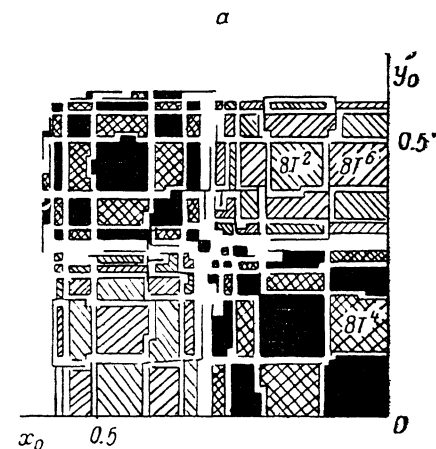


Рис. 6. Бассейны притяжения различных видов колебаний для значений параметров и масштабов изображения, измененных в соответствии с универсальными постоянными.

$a - \lambda = 1.39834$ ,  $k = 0.003$ ; закрашены области притяжения  $16T^0$ , заштрихованы —  $16T^8$ ;  $b - \lambda = 1.388$ ,  $k = 0.006$ ; закрашены области притяжения  $8T^0$ , двойная штриховка —  $8T^4$ , левая —  $8T^4$ , правая —  $8T^8$ .

ществовать несколько аттракторов, т. е. система обладает мультистабильностью. Реализация того или иного режима при заданных параметрах определяется начальными условиями  $x_0$ ,  $y_0$ . Остановимся на основных закономерностях в разбиении плоскости  $(x_0, y_0)$  на области притяжения различных режимов, опираясь на схему рис. 3 и результаты расчетов, проведенных для (1) при  $\delta = 1$ . При  $0 < \lambda < 0.75$  в системе существует единственный устойчивый цикл  $1T^0$ . Области притяжения родившейся из него пары  $2T^0$  и  $2T^1$  образуют конфигурацию, которая универсальна и с изменением параметров проявляет масштабноинвариантные свойства с коэффициентами подобия по  $\lambda \rightarrow 4.6612$  и по  $k \rightarrow 2.0$  [7]. На рис. 6,  $b$  эта универсальная конфигурация (назовем ее «блоком») иллюстрируется на примере пары видов  $16T^0$  и  $16T^8$ . Площадь структурных элементов «блока» максимальна в его центре. При удалении от центра чередования областей притяжения различных циклов пары сопровождается уменьшением их размеров. Последовательное увеличение уровня разрешения показало отсутствие ограничений на степень дробления областей (просчитывались варианты с уровнем разрешения  $\Delta x$ ,  $\Delta y = 0.00025$ ). Пары видов колебаний, родившихся из синфазных циклов, образуют на плоскости  $x_0, y_0$  «блоки», полностью симметричные относительно диагоналей  $x_0 = y_0$  (области  $8T^0$ ,  $8T^4$  на рис. 6,  $a$ ). Пары, родившиеся из несинфазного вида, образуют «блоки», симметричные относительно диагоналей лишь при взаимной смене номеров видов (см. рис. 6,  $b$  области  $8T^2$ ,  $8T^6$ ). С увеличением управляющего параметра растет количество устойчивых видов колебаний и последовательно усложняется структура раз-

биения плоскости начальных условий на бассейны их притяжения. Это наглядно иллюстрирует рис. 6, где рядом с фрагментом плоскости  $(x_0, y_0)$  для значений  $\lambda$  и  $k$ , соответствующих существованию цикла периода  $8T_0$ , приведены рассчитанные в соответствии с коэффициентом подобия и построенные при увеличении масштаба в 2.5 раза конфигурации бассейнов притяжения циклов  $16T^8$  и  $16T^0$ , на который «распалась» ближайшая к точке  $x_0=0, y_0=0$  область притяжения цикла  $8T^0$ . Бассейны притяжения сложных движений (квазипериодических и хаотических) объединяют бассейны, ранее (при меньших  $\lambda$ ) соответствовавшие видам колебаний, формирующих это движение.

9. Предложенная основа классификации колебательных режимов в двух связанных фейгенбаумовских системах по всей видимости справедлива не только для синфазного возбуждения подсистем при диссипативной связи между ними, а также при других видах связи. Это подтверждается результатами физического эксперимента со связанными контурами (раздел 2) при сдвиге фаз между гармоническими сигналами возбуждения, равном  $\pi$  [9], а также экспериментами при замене резистивной связи на емкостную.

Хорошее качественное совпадение результатов численных исследований системы (1) и физического эксперимента с присущим ему конечным уровнем флуктуаций и ограничениями на идентичность связанных объектов говорят о грубости построенной картины, а качественное совпадение поведения двух исследованных систем позволяет обобщить полученные результаты на весь класс диссипативно связанных фейгенбаумовских систем с дискретной симметрией относительно временного сдвига. В предложенные схемы, в частности, вписываются результаты исследований отображений с отличными от (1) видом связи, представленные в [11].

Выражаем признательность С. П. и А. П. Кузнецовым за полезное обсуждение работы.

#### Список литературы

- [1] *Feigenbaum M.* // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19. N 1. P. 669—706.
- [2] *Фейгенбаум М.* // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 343—374.
- [3] *Шарковский А. Н.* // УМЖ. 1964. Т. 16. № 1. С. 61—71.
- [4] *Yuan J.-H., Tung M., Feng D. H. et al.* // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. N 3. P. 1662—1666.
- [5] *Linsay P. S.* // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. N 19. P. 1349—1352.
- [6] *Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П.* // ПриЭ. 1987. Т. 32. № 12. С. 2558—2566.
- [7] *Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050—1060.
- [8] *Кузнецов С. П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 991—1007.
- [9] *Астахов В. В., Безручко Б. П., Кузнецов С. П.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 14. Вып. 1. С. 37—41.
- [10] *Buskirk R., Jeffries C.* // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 31, N 5. P. 3332—3357.
- [11] *Gu Y., Tung M., Yuan J.-M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. N 9. P. 701—704.

Институт радиотехники  
и электроники АН СССР  
Саратовский филиал

Поступило в Редакцию  
19 сентября 1989 г.