

01; 12

© 1990 г.

К РАСЧЕТУ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ПОПРАВКИ К КОНДЕНСАТОРНОЙ ЕМКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОВОДНИКАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ МАЛЫМ ЗАЗОРОМ

А. Н. Семашин, Г. А. Шнейерсон

Для емкостей некоторых осесимметричных конфигураций проводников и плоского конденсатора с пластинами произвольной формы получены главные члены асимптотического разложения по малому параметру — отношению ширины зазора к характерному внешнему размеру проводника. Описана методика расчета (так называемый метод сшивания), при которой суммируются определяемые независимо заряды на участках проводника в области зазора и вдали от него, причем неопределенный параметр — координата границы раздела областей исчезает из окончательных формул. \blacktriangle

Введение

Расчет емкости между двумя телами, разделенными малым зазором h , представляет собой задачу с сингулярным возмущением. Наибольшее число работ в этой области было связано с вычислением асимптотики емкости плоского кругового конденсатора. В работе [1] (где изложена и история данного вопроса) задача была решена наиболее полно: математически строго был получен общий вид асимптотического ряда для емкости между двумя пластинами не только круговой, но и произвольной формы и получены общие выражения, позволяющие рассчитать коэффициенты ряда до членов порядка $(h/g) \ln^2(h/g)$ включительно (g — некоторый характерный размер пластины, причем $g \gg h$).

Основой для решения задач подобного типа по существу является известный принцип сращивания асимптотических разложений [2], который был использован для задачи о круговом конденсаторе в работе [3]. Этот метод включает в себя нахождение так называемых внутреннего и внешнего разложений искомой функции (в данном случае потенциала) соответственно для области зазора и области вдали от него, а также последующее сращивание их определенным образом. Если же ограничиться нахождением главной части поправки к обычной конденсаторной емкости $C_k = \epsilon_0 S/h$ (S — площадь соприкосновения проводников при $h=0$), имеющей порядок $\ln(Ag/h)$, где $A = \text{const}$, то можно использовать методику, предложенную в работе [4] для расчета индуктивностей соосных проводников при резко выраженном поверхностном эффекте и названную в ней методом сшивания. В этом случае вводится условная граница раздела между внутренней и внешней областями и в каждой из них по первому приближению соответствующего разложения вычисляется заряд на проводнике (в [4] — поверхностный ток). При суммировании этих зарядов неопределенная величина — координата границы раздела выпадает из окончательного результата, поскольку в данном приближении поведение заряда описывается логарифмической функцией. Хотя указанная методика по существу представляет собой первый шаг в методе сращивания асимптотических разложений, она отличается от формализма последнего большей наглядностью и простотой. Это делает метод сшивания удобным инструментом, который может быть использован для приближенного расчета емкости самых разнообразных конфигураций проводни-

ков аналогично тому, как это было сделано при вычислении индуктивностей в [4]. Отметим, что знание величины емкости с точностью до $\ln(Ag/h)$ обычно вполне достаточно для инженерных расчетов. Кроме того, если ограничиться данным приближением, то могут быть ослаблены требования на геометрию проводников. Например, для задачи о плоском конденсаторе произвольной формы условие абсолютной гладкости края пластины, использованное в работе [1], можно заменить более слабым условием кусочной гладкости, что и будет сделано ниже при вычислении поправки к емкости прямоугольного конденсатора.

В данной работе на нескольких различных примерах показаны особенности применения методики шивания в электростатических задачах и получены формулы для емкости, дополняющие известные справочные данные [3].

Следует отметить, что использованный подход, так же как и принцип сращивания [2, 3], является в отличие от работы [1] чисто эвристическим, однако правильность получаемых результатов подтверждается математической непротиворечивостью операций, а также сравнением с известными точными решениями.

Осесимметричные системы проводников

Рассмотрим типичную конфигурацию, для некоторых вариантов которой существуют данные по емкости [5], — осесимметричное тело внутри соосной цилиндрической оболочки.

1. Сплошной цилиндр внутри бесконечной трубы (рис. 1). Исходную область условно разобьем на две части: область зазора, где поле будем считать плоским ($R \rightarrow \infty$), и внешнюю, при расчеде потенциала u в которой положим $h=0$. Окружность $r = R$, $z = l/2 + \rho$ при условии $h \ll \rho \ll R$ будет границей раздела областей на поверхности трубы. Определение заряда на проводнике в плоской зоне ничем не отличается от соответствующего расчета тока в [4] и производится методом конформного отображения. В случае тонкого диска при $l/h \ll 1$ комплексный потенциал имеет вид

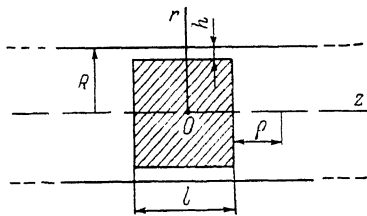


Рис. 1. К расчету емкости сплошного цилиндра внутри бесконечной трубы.

$$W(\omega) = (2U_0/\pi) \ln(\omega/h + \sqrt{1 + \omega^2/h^2}),$$

где $\omega = x + iy$; $x = z$ и $y = R - r$ — плоские координаты «внутренней» задачи, U_0 — потенциал диска (потенциал оболочки нулевой).

Заряд на участке поверхности цилиндра от точки $z=0$ до $z=\rho$ равен

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= 2\pi R \epsilon_0 [\operatorname{Re} W(\rho + i0) - \operatorname{Re} W(0)] = \\ &= 4R \epsilon_0 U_0 [\ln(2\rho/h) + h^2/(4\rho^2) + \dots] \approx 4\epsilon_0 R U_0 \ln(2\rho/h). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение «внешней» задачи, справедливое при произвольном значении h/l , можно записать в виде

$$u(r, z) = U_0 - \frac{2U_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[\lambda(z - l/2)] \cdot I_0(\lambda r)}{\lambda \cdot I_0(\lambda R)} d\lambda. \quad (2)$$

Тогда заряд на участке $l/2 + \rho < z < \infty$ равен

$$\Delta q_2 = 4R \epsilon_0 U_0 \int_0^\infty \frac{\cos \lambda \rho \cdot I_1(\lambda R)}{\lambda \cdot I_0(\lambda R)} d\lambda. \quad (3)$$

Данное выражение при $\rho/R \rightarrow 0$ растет как $\ln(R/\rho)$. Выделение этой особенности производится путем подбора дополнительного слагаемого к подынтегральному выражению, обеспечивающего сходимость интеграла при $\rho/R \rightarrow 0$. Обозначив $\lambda R = x$, имеем

$$\frac{\Delta q_2}{4\varepsilon_0 U_0 R} = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x/R)}{x} \left[\frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{x}{x+1} \right] dx + \int_0^{\infty} \frac{\cos(x\rho/R)}{x+1} dx \approx$$

$$\approx \int_0^{\infty} \left[\frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{x}{x+1} \right] \frac{dx}{x} - c_0 - \ln(\rho/R), \quad (4)$$

где $c_0 = 0.577 \dots$ — постоянная Эйлера, а численное значение интеграла в правой части (4) равно $Q = -0.091$.

При всех вычислениях оставляем только члены порядка $\ln(\rho/R)$ и $(\rho/R)^0$. В этом приближении величина ρ выпадает из окончательного выражения для емкости системы, которое для данного примера имеет следующий вид:

$$C = 2(\Delta q_1 + \Delta q_2)/U_0 \approx 8\varepsilon_0 R [\ln(R/h) + 0.026]. \quad (5)$$

В рассмотренной задаче «конденсаторная» емкость отсутствует и процедура сшивания дает главную часть в разложении величины C по (h/R) .

В случае толстого диска при $l \gg h$ комплексный потенциал для плоской зоны принимает вид

$$W[t(\omega)] = (U_0/\pi) \ln t(\omega), \quad (6)$$

где

$$\omega(t) = \frac{h}{\pi} \left(2\sqrt{t+1} + \ln \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right),$$

откуда следует значение «внутреннего» заряда

$$\Delta q_1 = 4\varepsilon_0 U_0 R \left[\frac{\pi l}{4h} + \ln \left(\frac{\pi \rho}{4h} \right) + 1 \right].$$

С учетом величины Δq_2 из (4) получаем выражение для емкости

$$C = 8\varepsilon_0 R (\pi l/4h + \ln(R/h) + 0.094). \quad (7)$$

Для произвольной величины l/h решение плоской задачи несколько более громоздко и выражается через эллиптические интегралы (см. подробности в [4]), при этом для заряда Δq_1 и емкости системы получаются следующие формулы:

$$\Delta q_1 = 4\varepsilon_0 R \ln \frac{2F(k)\rho}{hk}, \quad (8)$$

$$C = 8\varepsilon_0 R \left[\ln \frac{2RE(k)}{hk} + Q - c_0 \right], \quad (9)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, величина k определяется из условия

$$\frac{l}{2h} = \frac{K(k') - E(k')}{E(k)}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

В предельных случаях $l/h \rightarrow 0$ и $h/l \rightarrow 0$ соответственно имеем $k \rightarrow 1$ и $k \rightarrow 4 \exp[-(1 + \pi l/4h)]$, откуда следуют формулы (5) и (7).

2. Тонкостенный полый цилиндр внутри бесконечной трубы. Комплексный потенциал для плоской зоны при условии $l \gg h$ дается формулой (6) с функцией $\omega(t)$ следующего вида:

$$\omega(t) = (h/\pi) (\ln t + t + 1).$$

Тогда для величины Δq_1 имеем

$$\Delta q_1 = 2\varepsilon_0 U_0 R [\pi l/2h + \ln(\pi \rho/h) + 1]. \quad (10)$$

Для внешней задачи имеют место граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty;$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = R, \quad l/2 < z < \infty;$$

$$u = U_0 \quad \text{при } r = R, \quad 0 < z < l/2;$$

которым удовлетворяет потенциал вида

$$u(r, z) = \frac{2U_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda l/2) \cdot I_0(\lambda r)}{\lambda \cdot I_0(\lambda R)} \cos \lambda z d\lambda.$$

Для заряда в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \Delta q_2 &= 2\epsilon_0 U_0 R \int_0^{\infty} \left[\cos \frac{x\rho}{R} - \cos \frac{x(l+\rho)}{R} \right] \frac{I_1(x) \cdot dx}{I_0(x) \cdot x} \approx \\ &\approx 2\epsilon_0 U_0 R [\ln(R/\rho) + Q - c_0 - F(l/R)], \end{aligned}$$

где

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xy) \cdot I_1(x)}{x \cdot I_0(x)} dx.$$

График функции $F(x)$ приведен по рис. 2. При $x \ll 1$ для $F(x)$ имеем $F(x) \approx Q - c_0 - \ln x$. При больших значениях l/R удобно преобразовать интег-

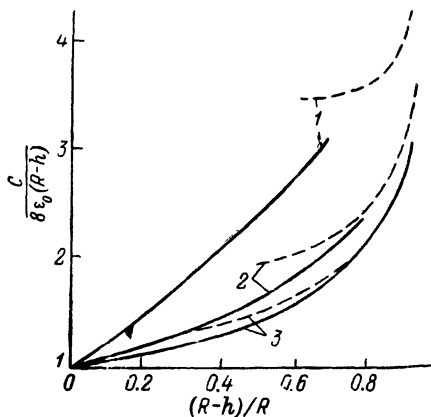
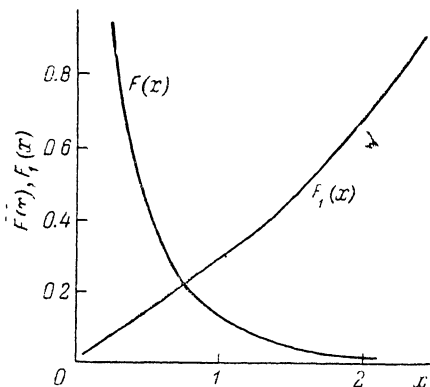


Рис. 2. Функции, используемые в формулах для емкости диска внутри сосной цилиндрической оболочки.

Рис. 3. Зависимость емкости между тонким диском и замкнутой цилиндрической оболочкой от ширины зазора h по данным [6] (сплошные линии) и полученная методом шпивания (штриховые линии).

R/b : 1 — 0.25, 2 — 0.5, 3 — ∞ .

рал в ряд, переходя к интегрированию по замкнутому контуру в комплексной плоскости и используя метод вычетов,

$$F(x) = \frac{1}{2i} \oint \exp(-xz) \frac{J_1(z) \cdot dz}{J_0(z) \cdot z} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-x\lambda_n) / \lambda_n,$$

при этом контур интегрирования включает в себя мнимую ось и полуокружность большого радиуса в правой полуплоскости, λ_n — корни функции Бесселя $J_0(\cdot)$.

Таким образом, для емкости системы получаем

$$C = 4\epsilon_0 R [\pi l/2h + \ln(R/h) + 1.48 - F(l/R)]. \quad (11)$$

3. Диск внутри замкнутой цилиндрической оболочки. Рассмотрим конфигурацию, показанную на рис. 1, считая, однако, длину внешнего цилиндра конечной и равной $2b$. В отличие от предыдущих примеров «внешнее» решение в данном случае представляется в виде ряда

$$u(r, z) = U_0 \left(1 - \frac{z}{b_1}\right) - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(\pi n r/b_1) \cdot \sin(\pi n z/b_1)}{I_0(\pi n R/b_1) \cdot n},$$

где $b_1 = b - l/2$.

Для заряда на поверхности цилиндра, из которой исключена кольцевая область шириной $2\rho + l$ вблизи края диска, получаем

$$\frac{\Delta q_2}{\epsilon_0 U_0 R} = \frac{\pi R}{b_1} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(\pi n R/b_1) \cdot \cos(\pi n \rho/b_1)}{I_0(\pi n R/b_1) \cdot n} \approx \pi R/b_1 - 4 \ln(\pi \rho/b_1) - 4F_1(b_1/R), \quad (12)$$

где

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{I_1(\pi n/x)}{I_0(\pi n/x)}\right] \frac{1}{n}.$$

(рис. 2).

Асимптотические выражения для $F_1(x)$ имеют вид

$$F_1(x) = (x/2\pi) \zeta(2) + (x^2/8\pi^2) \zeta(3) + \dots = 0.262x + 0.015x^2 + \dots, \quad x \ll 1,$$

и

$$F_1(x) \approx \ln x - 0.477 + O(1/x), \quad x \gg 1,$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

Для выделения особенности в (12) использовано соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)/n = -\ln[2 \sin(x/2)] \approx -\ln x \quad \text{при } x \ll 1.$$

Учитывая выражение (8) для Δq_1 , получаем окончательный результат

$$C = 8\epsilon_0 R \left[\frac{\pi R}{4b_1} + \ln \frac{2b_1 E(k)}{\pi k h} - F_1\left(\frac{b_1}{R}\right) \right]. \quad (13)$$

В справочнике [4] приведены численные данные для случая тонкого диска ($l/R=0$), которые, как там указывается, имеют нарастающую погрешность при $h/R \rightarrow 0$, т. е. именно в той области, где справедливы полученные асимптотики (5) и (13). Как видно из рис. 3, область применимости формул (5) и (13) достаточно широка: при $b/R \geq 1$ они хорошо описывают поведение емкости вплоть до значения $h/R \approx 0.5$.

Плоский конденсатор с пластинами произвольной формы (рис. 4)

Основанием для рассмотрения данной задачи, несмотря на ее строгое решение в [1], является возможность некоторого обобщения решения [1] (конечная толщина пластин, наличие изломов на их краях), которое может быть достаточно просто проведено при использовании процедуры сшивания.

Будем считать, что контур K , задающий форму пластины, может иметь конечное число изломов (точек, в которых радиус кривизны R_k равен нулю). В остальных же точках края выполнено условие $|R_k| \geq h$, b , где b — толщина пластин ($b \leq h$).

Вклад в емкость системы от каждой особой точки контура имеет порядок $O(h)$ в силу соображений размерности и, следовательно, будет находиться за

пределами точности рассматриваемого приближения. Поэтому при вычислении заряда на внутренней стороне пластины и на полосе шириной ρ ее внешней поверхности можно считать поле плоскопараллельным. Тогда, используя соответствующее конформное преобразование (подробно описанное в [3]), получим

$$\frac{\Delta q_1}{\varepsilon_0 U_0} = \frac{S}{h} + \frac{L}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2\pi\rho(\gamma+2)}{h \cdot 2} \right) + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\gamma+2}{2} + 1 \right], \quad (14)$$

где $\gamma=2b/h$, L — длина контура K .

Электрическое поле «внешней» задачи тождественно магнитному полю токовой нити, совпадающей с краем пластины, при численном значении тока, равном U_0/μ_0 . Тогда для заряда Δq_2 получаем

$$\Delta q_2 = \frac{\varepsilon_0 U_0}{4\pi} \oint_K dl \int_{S_1} ds \frac{\sin \alpha}{r_M^2} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{4\pi} \oint_K \oint_{K_1} (dl \cdot d\mathbf{l}_1)/r_M, \quad (15)$$

где S_1 — область, ограниченная кривой K_1 (рис. 4); $d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{l}_1$ — единичные касательные векторы; α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r}_M ; \mathbf{r}_M — радиус-вектор от произвольной точки контура K до точки наблюдения поля M в области S_1 .

Выделение особенности в выражении (15) проведем следующим образом. Возьмем произвольную точку O на контуре K и построим окружность, касательную к контуру в данной точке (рис. 4). Для радиус-векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 точки A на контуре K и соответствующей ей точки A_1 на K_1 (рис. 4) имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin(\beta - \varphi) = \\ &= r^2 (1 - 2\rho/\sqrt{r^2 + (r')^2}) + \rho^2. \end{aligned}$$

Рис. 4. К расчету емкости плоского конденсатора с пластинами произвольной формы.

Член, линейный по ρ , в данном выражении может дать лишь малую поправку к интегралу (порядка ρ/R_K), что позволяет пренебречь им в дальнейшем расчете. При $\varphi \rightarrow 0$ отрезок r совпадает с хордой касательной окружности, поэтому особенность выделяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \oint \frac{dl \cos \beta}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} &= \int_0^\pi d\varphi \left[\frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \cos \beta - \frac{2R_K}{\sqrt{4R_K^2 \sin^2 \varphi + \rho^2}} \right] + \\ &+ \int_0^\pi \frac{2R_K d\varphi}{\sqrt{4R_K^2 \sin^2 \varphi + \rho^2}} \approx \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}}{r} \cos \beta - \frac{1}{\sin \varphi} \right] d\varphi + \ln \frac{8R_K}{\rho}. \end{aligned}$$

Тогда окончательное выражение для емкости примет вид

$$\begin{aligned} \frac{C}{\varepsilon_0} &= \frac{S}{h} + \frac{1}{4\pi} \oint_K dl \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}}{r} \cos \beta - \frac{1}{\sin \varphi} \right] d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \oint_K dl \left[\ln \left(\frac{16\pi R_K \gamma + 2}{h} \right) + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\gamma+2}{2} + 1 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

(для простоты считаем, что $R_K > 0$ во всех точках контура K).

В случае круговых пластин двойной интеграл в (16) дает величину $(-2R)$ и для емкости при $\gamma=0$ получается известный результат [1, 3]

$$C/\varepsilon_0 = S/h + R [\ln(16\pi R/h) - 1].$$

В формуле (16) явно выражена инвариантность величин по отношению к выбору системы координат. Однако в некоторых случаях, например, когда на контуре K есть точки, в которых $R_k = 0$ или $R_k = \infty$, целесообразно при выделении особенности в (15) учитывать специфику задачи. Рассмотрим в качестве практически интересного примера конденсатор с прямоугольными обкладками и $\gamma = 0$ (для простоты).

Используя удобную в данном случае прямоугольную систему координат с началом в центре пластины, для заряда Δq_2 из (15) получаем

$$\frac{2\pi\Delta q_2}{\varepsilon_0 U_0} = \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + (x-y)^2}} + \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + (x-y)^2}} + \\ + \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{a/2}^{-a/2} \frac{dx}{\sqrt{b^2 + (x-y)^2}} + \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{b/2}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (x-y)^2}},$$

где a и b — длина сторон прямоугольника.

Вычисляя эти интегралы и прибавляя величину Δq_1 из (14), находим емкость системы

$$C/\varepsilon_0 = ab/h + (a/\pi) [\ln(4\pi a/h) - 1] + (b/\pi) [\ln(4\pi b/h) - 1] + (2/\pi) \sqrt{a^2 + b^2} + \\ + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{1 + b^2/a^2} - 1}{\sqrt{1 + b^2/a^2} + 1} + \frac{b}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{1 + a^2/b^2} - 1}{\sqrt{1 + a^2/b^2} + 1}. \quad (17)$$

Для квадрата ($a = b$) имеем

$$\frac{C}{\varepsilon_0} = \frac{a^2}{h} + \frac{2a}{\pi} \left[\ln \frac{4\pi(\sqrt{2} - 1)a}{h} + \sqrt{2} - 1 \right], \quad (18)$$

а в случае $a \gg b$ из (17) получаем известный результат для удельной емкости полосковой линии [5]

$$C/\varepsilon_0 a \approx b/h + (1/\pi) [\ln(2\pi b/h) + 1].$$

Формулы (17), (18) в отличие от приведенных в [5] и предыдущем издании дают правильные асимптотики для величины C при $h \rightarrow 0$.

Представление о погрешности выражения (17) дает следующий численный пример: при $a/h = 6$, $b/h = 3$ из (16) получаем

$$(C/\varepsilon_0 - ab/h)/a \approx 1.66,$$

при точном значении, полученном численным расчетом, 1.75 [5].

Выводы

1. Метод шивания, ранее предложенный для расчета индуктивностей, может быть также использован и для определения главной части поправки к емкости широкого класса конфигураций, в которых имеется малый зазор между проводниками. Это показано на примере некоторых типичных осесимметричных задач и на классической задаче о плоском конденсаторе.

2. Удобство метода заключается в возможности легко комбинировать несколько базисных решений «плоской» задачи с самыми различными «внешними» решениями. При этом суммируются определяемые независимо «внутренний» и «внешний» заряды. В тех случаях, когда требуется знание асимптотики емкости с большей, чем дает метод шивания, точностью, надо использовать полную процедуру сращивания асимптотических разложений либо воспользоваться численными методами.

Авторы благодарят Ю. Я. Иоссея за полезные советы и участие в обсуждении работы.

Список литературы

- [1] *Сойбельман Я. С.* // Сиб. мат. журн. 1984. Т. XXV. № 6. С. 167—181.
- [2] *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
- [3] *Shaw S. J. N.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 8. P. 1935—1947.
- [4] *Шнеерсон Г. А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981. 199 с.
- [5] *Поссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струцкий М. Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.

Ленинградский политехнический институт
им. М. П. Калашникова

Поступило в Редакцию
23 ноября 1989 г.

