$$\langle |u_\lambda^L|^2 \rangle_\omega = \frac{k_Б T\omega^2}{\pi\rho u^2}\left[\frac{(\gamma-1)\chi}{\omega^2+\chi^2 k_\lambda^4} + \frac{\Gamma u^2 k_\lambda^2 - (\gamma-1)(\omega^2 - u^2 k_\lambda^2)}{(\omega^2 - u^2 k_\lambda^2)^2 + \Gamma^2\omega^2 k_\lambda^4}\right], \tag{13}$$

где $\gamma = c_P/c_V$, $\Gamma = (\gamma-1)\chi + \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right)\Big/\rho$, $k_\lambda = \gamma_{nl}/R$.

Теперь легко восстановить спектральные плотности тепловых флуктуаций гидродинамического поля скорости

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)\,\mathbf{v}(\mathbf{r}',\ t')\rangle_\omega = \Phi_\parallel(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ \omega) + \Phi_\perp(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ \omega), \tag{14}$$

$$\Phi_\parallel(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ \omega) = \sum_\lambda \widetilde{\mathbf{L}}_\lambda(\mathbf{r})\,\widetilde{\mathbf{L}}_\lambda(\mathbf{r}')\langle |u_\lambda^L|^2\rangle_\omega. \tag{15}$$

$$\Phi_\perp(\mathbf{r},\ \mathbf{r}',\ \omega) = \frac{k_Б T}{\pi\rho}\,\mathrm{Re}\sum_\lambda\left\{\frac{\widetilde{\mathbf{M}}_\lambda(\mathbf{r})\,\widetilde{\mathbf{M}}_\lambda(\mathbf{r}')}{-i\omega + \nu R^{-2}\beta_\lambda^2} + \frac{\widetilde{\mathbf{N}}_\lambda(\mathbf{r})\,\widetilde{\mathbf{N}}_\lambda(\mathbf{r}')}{-i\omega + \nu R^{-2}\gamma_\lambda^2}\right\}. \tag{16}$$

КФ компонент эйлерового поля скорости при совпадающих пространственных аргументах практически равны КФ скорости лагранжевой частицы [4], являющихся хорошей гидродинамической аппроксимацией для КФ молекулярных переменных. В этом случае результаты (14)—(16) упрощаются, так как возможно в явном виде провести суммирование по m, используя свойства функций Лежандра. Тогда КФ скорости зависят лишь от расстояния лагранжевой частицы до центра сферы. Например, вклад эйлерового продольного поля в лагранжеву КФ скорости принимает вид

$$\Phi_\parallel(\mathbf{r},\ \mathbf{r},\ \omega) = \sum_{n,\ l=0}^{\infty}\langle |u_{nl}^L|^2\rangle_\omega\,\frac{2n+1}{4\pi\Lambda_{nl}^L}\left\{n(n+1)\left[\frac{j_n(\gamma_{nl}r/R)}{\gamma_{nl}r/R}\right]^2 + [j_n'(\gamma_{nl}r/R)]^2\right\}. \tag{17}$$

В заключение отметим, что описанный способ решения задачи о равновесных гидродинамических флуктуациях легко обобщается для систем с временно́й дисперсией кинетических и термодинамических коэффициентов. Это позволяет существенно расширить область применимости полученных результатов, особенно при аппроксимации лагранжевыми корреляционными функциями молекулярных.

Список литературы

[1] *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую физику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
[2] *Рытов С. М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 1. С. 167—178.
[3] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
[4] *Фишер И. З.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 61. Вып. 4. С. 1647—1659.
[5] *Kaneda Y.* // Physica, 1980. Vol. A101, N 2-3. P. 423—430.
[6] *Антонченко В. Я.* Физика воды. Киев: Наукова думка, 1986. 127 с.
[7] *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило в Редакцию
21 июля 1989 г.

01;03

Журнал технической физики, т. 60, в. 9, 1990

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПРОТЕКАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Г. Бершадский

Введение

Критические показатели теории протекания являются столь же универсальными параметрами этого класса явлений, как и критические показатели в теории фазовых переходов [1]. Вследствие универсальности критических показателей их можно вычислить для какой-либо конкретной модели. В данной работе в качестве такой модели используется перемежающаяся турбулентность.

1. Мысленно разобьем область, в которой движется жидкость, на кубические ячейки, у которых ребра имеют длину η (колмогоровский масштаб [2]). В фиксированный момент времени в одних ячейках движение будет турбулентным, а в других ламинарным. Можно ввести вероятность p, с которой турбулизована каждая данная ячейка. При $p=0$ нет турбулизованных ячеек, при $p \ll 1$ кластеры, состоящие из турбулизованных ячеек, содержат малое количество таких ячеек. При $p=1$ все ячейки турбулизованны. Существует критическая концентрация p_c $(0 < p_c < 1)$, при которой впервые появляется бесконечный кластер из турбулизованных ячеек. При появлении такого кластера физическая ситуация радикально меняется. Если до его появления вводимая в область энергия шла на увеличение числа ячеек с турбулентным движением, то после его появления эта энергия может отводиться (по такому кластеру), на «бесконечность», т. е. выводиться из области движения. Концентрация турбулизованных ячеек при наличии такого (бесконечного) кластера может флуктуационно возрастать. Однако при наличии баланса между вводимой энергией и энергией, отводимой через бесконечный кластер, возникающие вследствие таких флуктуаций превышения концентрации над критической будут неустойчивыми и будут затухать из-за отсутствия постоянного подвода энергии. Более того, в самом бесконечном кластере устойчивым (в силу тех же причин) будет только так называемый скелет [1]. Скелет бесконечного кластера есть множество ячеек, принадлежащих бесконечным путям по кластеру, т. е. тупиковые (конечные) ветки кластера будут затухать под действием вязкости ввиду отсутствия потока энергии по ним.

2. Предложенная выше модель принадлежит к перколяционным решеточным моделям [1]. Кластеры, образующиеся в этих моделях, являются фрактальными объектами. Возникновение бесконечного кластера — явление критическое. Характерный размер критического вихревого кластера l вблизи p_c ведет себя как [1]

$$l \sim |p_c - p|^{\nu}. \tag{1}$$

Критический параметр ν является универсальным параметром перколяции и зависит только от топологической размерности d пространства.

3. Если задано крупномасштабное поле скорости (возбуждены только вихри масштаба l_0), то каскадный процесс дробления приводит к возбуждению иерархии вихрей масштабов $l_n \sim 2^{-n} l_0$. Процесс передачи энергии по каскаду хаотичен, поэтому анизотропность и крупномасштабная неоднородность начального поля скорости все меньше сказываются на статистическом режиме пульсаций по мере уменьшения масштабов. Это должно приводить к тому, что на достаточно мелких масштабах $(l_0 \gg l_n \gg \zeta)$ имеют место масштабная инвариантность и локальная изотропия [2]. Для изотропных пульсаций распределение энергии по масштабам $(l \sim k^{-1})$ задается спектральной плотностью $E(k)$. Если ввести в рассмотрение характерный период пульсаций на m-м шаге каскадного дробления T_m, то из соображений размерности и простых физических рассуждений [2]

$$T_m \sim (E(k)\,k^3)^{-1/2}_{k_m}. \tag{2}$$

Характерный период T_m может быть интерпретирован как время возбуждения вихрями масштаба l_m вихрей масштаба l_{m+1}. Удельная кинетическая энергия вихрей масштаба l_m

$$E_m = \int_{k_m}^{k_{m+1}} E(k)\,dk. \tag{3}$$

Время возбуждения полного каскада

$$t_\infty \sim \sum_{m=0}^{\infty} T_m. \tag{4}$$

Вообще говоря, подставлять в (4) вместо T_m представление (2) нельзя, так как оно имеет смысл только для достаточно больших m. Однако нас будет интересовать не само значение t_∞, а величина

$$(t_\infty - t_M) \sim \left(\sum_{m=0}^{\infty} T_m - \sum_{m=M}^{\infty} T_m \right) \sim \sum_{m=M}^{\infty} T_m, \tag{5}$$

а для нее при достаточно больших M можно пользоваться представлением (2). При достаточно больших M имеет место скэйлинг [2] и $E(k) \sim k^{-5/3}$, откуда и из (3) следует, что $E_m \sim k_m^{-2/3}$. Тогда

$$(t_\infty - t_M) \sim \sum_{m=M}^{\infty} l_m^{2/3}. \tag{6}$$

Считая, что $l_m \sim 2^{-m} l_0$, из (6) выводим, что при больших M

$$(t_\infty - t_M) \sim \sum_{m=M}^{\infty} 2^{-2m/3} \sim 2^{-2M/3}. \tag{7}$$

Через M дроблений вместо одного исходного вихря масштаба l_0 мы будем иметь $N \sim 2^M$ вихрей масштаба $l_M \sim 2^{-M} l_0$. Тогда при $l \gg l_M \gg \zeta$

$$N(t) \sim (t_\infty - t)^{-3/2}. \tag{8}$$

Эта система вихрей будет занимать объем с эффективным радиусом l_*

$$N \sim l_*^{D_b}, \tag{9}$$

где D_b — фрактальная размерность вихревого кластера.

Из (8) и (9) следует, что при приближении t к t_∞ величина

$$l_*(t) \sim (t_\infty - t)^{-3/2D_b}. \tag{10}$$

Если вернуться к терминам выражения (1), то приближение t к критическому значению t_∞ соответствует приближению p к p_c. Обозначим $(t_\infty - t) = \tau$. Ясно, что при $\tau \to 0$ величина $(p_c - p) \to 0$. Делая предположение об аналитичности зависимости $(p_c - p)$ от τ при достаточно малых τ, получаем $(p_c - p) \sim \tau$. И сравнивая (1) с (10), находим связь $\nu = 3/2\,D_b$. По смыслу вывода величина D_b — фрактальная размерность устойчивого критического кластера вихрей (размерность скелета).

3. Для нахождения величины D_b заметим, что величина энергии, диссипируемой под действием вязкости на вихре с размером l, может быть оценена как [2]

$$W_l \sim l^3 \int_{1/\sqrt{2}\,l}^{\sqrt{2}/l} k^2 E(k)\, dk. \tag{11}$$

С другой стороны, $W_l \sim l^{D_b}$. И если l принадлежит интервалу $l_0 \gg l \gg \zeta$, то $E(k) \sim k^{-5/3}$. Тогда из (11) $D_b = 5/3$. Нужно отметить, что прямые численные эксперименты дают для D_b значение $D_b = 1.68 \pm 0.14$ [1]. Подставляя далее это значение D_b в $\nu = 3/2\,D_b$, находим $\nu = 0.9$. Это значение для ν совпадает со значением ν, полученным в численных экспериментах (см., например, [1]).

Используем известную [1] связь $D_b = d - (\beta_b/\nu) \to \beta_b = 6/5$ — критический показатель мощности скелета перколяционного кластера.

Список литературы

[1] *Соколов И. М.* // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 221—255.
[2] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. II. 720 с.

Макеевский
инженерно-строительный институт

Поступило в Редакцию
17 августа 1989 г.

06;07

Журнал технической физики, т. 60, в. 9, 1990

АНИЗОТРОПИЯ ВОЛНОВОДОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОДИФФУЗИЕЙ ИОНОВ Cs^+ И K^+ ИЗ РАСПЛАВОВ $CsNO_3$ И KNO_3 В СТЕКЛО

М. Г. Галечян, Н. М. Лындин, Д. Х. Нурлигареев, А. В. Тищенко

В пассивных устройствах интегральной оптики, таких как интерферометрические датчики, поляризаторы, ответвители, фильтры, спектральные уплотнители, широкое применение находят волноводы, полученные методом ионного обмена в стекло из расплава соответствующей соли [1]. Одной из особенностей таких волноводов является их анизотропия, т. е. раз-