

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В СФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ

А. В. Затовский, А. В. Звельиндовский

Феноменологическая теория тепловых флуктуаций наиболее полно развита для электромагнитных полей [1]. Равновесные гидродинамические же флуктуации изучались в основном для неограниченного или полуграниченного пространства [2-4]. Много внимания уделялось и построению обобщенной теории броуновского движения частиц, основанной на приближенных способах учета теплового гидродинамического течения [5]. Вместе с тем представляют интерес тепловые гидродинамические флуктуации в ограниченном объеме [6]. Спектральные плотности корреляционных функций (КФ) молекулярных переменных ограниченных систем существенны для объяснения экспериментов по зондированию излучением капилляров, микроэмульсий, полимеров, глобулярных макромолекул и других объектов. На возможность применения к ним обычной гидродинамики указывают [4, 6] молекулярно-динамические методы изучения систем частиц, моделирующих простые жидкости.

При наличии подходящего набора собственных функций краевой задачи гидродинамики возможно с использованием флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) [1] построение корреляционной теории тепловых гидродинамических флуктуаций и в ограниченной области. Будем считать, что уравнениями для флуктуационных полей скорости, плотности и температуры являются содействующие спонтанные напряжения и потоки тепла линеаризованные уравнения Навье—Стокса с постоянными кинетическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\nabla_i \delta p - \eta \operatorname{rot}_i \operatorname{rot} \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla_i \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla_{\alpha} s_{i\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta s = \frac{\kappa}{\rho T} \Delta \delta T - \operatorname{div} \mathbf{g}, \\ \delta p &= u^2 \delta \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \delta T, \quad \delta s = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_T \delta \rho + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right) \delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначения такие же, как в гл. 9 [3]. Пусть жидкость заключена в сферическую полость радиуса R . Тогда граничные условия для тепловых полей соответствуют обращению их в нуль на поверхности сферы, так что

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \delta T(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (r = R). \quad (2)$$

Скорость в уравнениях (1) удобно разделить на потенциальную (продольную) и вихревую (поперечную) части, после чего уравнение для вихревой составляющей отделяется и не зависит от остальных уравнений. В сферических координатах с началом в центре сферы решения уравнений проще всего найти, используя в качестве базиса разложения функции, удовлетворяющие векторным уравнениям Гельмгольца. Три системы решений, конечные при $r=0$, хорошо изучены и определяются дифференцированием произведения сферических функций от углов и сферических функций Бесселя [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{mn}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \nabla (Y_{mn}(\theta, \varphi) j_n(kr)), \\ \mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot}(\mathbf{r} Y_{mn}(\theta, \varphi) j_n(kr)), \quad \mathbf{N}_{mn}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \operatorname{rot} \mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Разложения для поперечной и продольной составляющей скорости представим в виде

$$\mathbf{v}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} [u_{\lambda}^M(t) \tilde{\mathbf{M}}_{\lambda}(\mathbf{r}) + u_{\lambda}^N(t) \tilde{\mathbf{N}}_{\lambda}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{v}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}^L(t) \tilde{\mathbf{L}}_{\lambda}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где введены нормированные функции

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) / \|\mathbf{a}\|^{1/2}, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = \int_V d\tau a^2(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Из граничных условий следуют трансцендентные уравнения, определяющие собственные значения k_{λ}

$$j_n(\beta_{nl}) = 0, \quad k_\lambda = \beta_{nl}/R, \quad (6)$$

$$\gamma_{nl} j'_n(\gamma_{nl}) + \alpha j_n(\gamma_{nl}) = 0, \quad \alpha = -n, \quad n + 1, \quad k_\lambda = \gamma_{nl}/R. \quad (7)$$

Индекс l определяет номер корня, штрихом обозначено дифференцирование по аргументу. Значения из (6) собственные для функции M , а из (7) — для L и N . Индекс λ является, таким образом, собирательным, обозначающим набор трех чисел n , m и l . Нормирующие множители с учетом (3), (6), (7) и свойств сферических и бесселевых функций [7] после интегрирования принимают вид

$$\|a_\lambda^q\| = q_\lambda \Lambda_\lambda^q, \quad q_\lambda = \frac{4\pi}{2 - \delta_{m0}} \frac{1}{2n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!},$$

$$\Lambda_\lambda^M = \frac{R^3}{2} n(n+1) j_{n+1}^2(\beta_{nl}), \quad \Lambda_\lambda^L = R^3 \left[\frac{1}{x} j_n(x) j'_n(x) + \frac{1}{2} j_n^2(x) \right],$$

$$\Lambda_\lambda^N = R^3 n(n+1) \left[\frac{1}{x^2} j_n(x) (x j_n(x))' - \frac{1}{2} j_n^2(x) \right], \quad x = \gamma_{nl}. \quad (8)$$

Продольную и поперечную части случайной силы f с составляющими $\nabla_i s_i$; разложим таким же, как и в (4), способом с коэффициентами разложения f_λ^q , $q = M, N, L$. С учетом ортогональности собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, легко построить неоднородные дифференциальные уравнения для коэффициентов u_λ^q . В спектральной форме они имеют вид

$$u_\lambda^{M, N}(\omega) = f_\lambda^{M, N}(\omega)/\rho(-i\omega + \nu k_\lambda^2), \quad (9)$$

$$u_\lambda^L(\omega) = (f_\lambda^L(\omega) - g_\lambda(\omega) R_\lambda) i\omega J_\lambda/\rho, \quad (10)$$

где

$$R_\lambda = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho T k_\lambda^2 / c_V (-i\omega + k_\lambda^2 \chi),$$

$$J_\lambda^{-1} = \omega^2 - u^2 k_\lambda^2 + i\omega k_\lambda^2 \left(\xi + \frac{4}{3} \eta \right) / \rho - i\omega R_\lambda \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T.$$

Коэффициенты разложения для избыточной плотности и температуры в конечном итоге выражаются через u_λ^q .

Спектральные плотности флуктуирующих полей найдем с помощью ФДТ. Тогда наряду с (9) и (10) необходимо иметь выражение для средней мощности, диссипируемой в жидкости под действием случайных источников. Известное в гидродинамике [3] выражение для диссипации энергии с учетом формулы Гаусса—Остроградского и нулевых краевых условий (2) представимо в виде

$$Q = - \int_V d\tau [f_\parallel v_\parallel + f_\perp v_\perp + \delta T \operatorname{div} \mathbf{g}].$$

В дальнейшем ограничимся изучением корреляционных свойств поля скорости. По этой причине последнее слагаемое можно не учитывать. Подставляя разложения по собственным функциям и проводя почленное интегрирование, получим результат

$$Q_u = - \sum_{\alpha, \lambda} u_\alpha^q(\omega) f_\lambda^q(\omega). \quad (11)$$

Уравнения Ланжевена (9), (10) и выражение для диссипации энергии (11) позволяют обычным способом [1] восстановить матрицу обобщенной восприимчивости, через которую с помощью ФДТ определяются спектральные плотности равновесных тепловых флуктуаций для амплитуд разложения гидродинамических полей. Результат имеет вид

$$\langle u_\lambda^L u_{\lambda'}^{*L} \rangle_\omega = \operatorname{Re} \frac{k_B T}{\pi \rho} i\omega J_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle u_\lambda^b u_{\lambda'}^{*b} \rangle_\omega = \operatorname{Re} \frac{k_B T \delta_{\lambda\lambda'}}{\pi \rho (-i\omega + \nu k_\lambda^2)}, \quad b = M, N, \quad (12)$$

и отличается от спектральных плотностей для неограниченной жидкости лишь дискретным характером волнового числа k_λ . В линейном приближении движения в гидродинамике ввиду малости поглощения на длине волны возмущения распадаются на не взаимодействующие между собой вихревые, акустические и температурные волны. И спектральная плотность продольной составляющей, как и в неограниченной среде, состоит из двух вкладов

$$\langle |u_\lambda^L|^2 \rangle_\omega = \frac{k_B T \omega^2}{\pi \rho u^2} \left[\frac{(\gamma - 1) \gamma}{\omega^2 + \chi^2 k_\lambda^2} + \frac{\Gamma u^2 k_\lambda^2 - (\gamma - 1) (\omega^2 - u^2 k_\lambda^2)}{(\omega^2 - u^2 k_\lambda^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 k_\lambda^2} \right], \quad (13)$$

где $\gamma = c_p/c_v$, $\Gamma = (\gamma - 1) \gamma + \left(\frac{4}{3} \eta + \xi\right)/\rho$, $k_\lambda = \gamma_{nl}/R$.

Теперь легко восстановить спектральные плотности тепловых флуктуаций гидродинамического поля скорости

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') \rangle_\omega = \Phi_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \Phi_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \quad (14)$$

$$\Phi_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_{\lambda} \tilde{\mathbf{L}}_{\lambda}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{L}}_{\lambda}(\mathbf{r}') \langle |u_{\lambda}^L|^2 \rangle_{\omega}. \quad (15)$$

$$\Phi_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{k_B T}{\pi \rho} \operatorname{Re} \sum_{\lambda} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{M}}_{\lambda}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{M}}_{\lambda}(\mathbf{r}')}{-i\omega + \nu R^{-2} \beta_{\lambda}^2} + \frac{\tilde{\mathbf{N}}_{\lambda}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{N}}_{\lambda}(\mathbf{r}')}{-i\omega + \nu R^{-2} \gamma_{\lambda}^2} \right\}. \quad (16)$$

КФ компонент эйлерового поля скорости при совпадающих пространственных аргументах практически равны КФ скорости лагранжевой частицы [4], являющихся хорошей гидродинамической аппроксимацией для КФ молекулярных переменных. В этом случае результаты (14)–(16) упрощаются, так как возможно в явном виде провести суммирование по m , используя свойства функций Лежандра. Тогда КФ скорости зависят лишь от расстояния лагранжевой частицы до центра сферы. Например, вклад эйлерового продольного поля в лагранжеву КФ скорости принимает вид

$$\Phi_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \sum_{n, l=0}^{\infty} \langle |u_{nl}^L|^2 \rangle_{\omega} \frac{2n+1}{4\pi \Lambda_{nl}} \left\{ n(n+1) \left[\frac{j_n(\gamma_{nl} r/R)}{\gamma_{nl} r/R} \right]^2 + [j'_n(\gamma_{nl} r/R)]^2 \right\}. \quad (17)$$

В заключение отметим, что описанный способ решения задачи о равновесных гидродинамических флуктуациях легко обобщается для систем с временной дисперсией кинетических и термодинамических коэффициентов. Это позволяет существенно расширить область применимости полученных результатов, особенно при аппроксимации лагранжевыми корреляционными функциями молекулярных.

Список литературы

- [1] Рытов С. М., Крайнов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую физику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
- [2] Рытов С. М. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 1. С. 167–178.
- [3] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
- [4] Фишер И. З. // ЖЭТФ. 1970. Т. 61. Вып. 4. С. 1647–1659.
- [5] Kapeta Y. // Physica, 1980. Vol. A101, N 2-3. P. 423–430.
- [6] Антощенко В. Я. Физика воды. Киев: Наукова думка, 1986. 127 с.
- [7] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило в Редакцию
21 июля 1989 г.

01;03

Журнал технической физики, т. 60, в. 9, 1990

© 1990 г.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПРОТЕКАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Г. Бершадский

Введение

Критические показатели теории протекания являются столь же универсальными параметрами этого класса явлений, как и критические показатели в теории фазовых переходов [1]. Вследствие универсальности критических показателей их можно вычислить для какой-либо конкретной модели. В данной работе в качестве такой модели используется перемежающаяся турбулентность.