

ВИХРИ В НЕОДНОРОДНЫХ НЕСКОМПЕНСИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

Ю. Я. Голубь, М. Г. Никулин, Н. Е. Розанов

Теоретически исследована возможность существования нелинейных стационарных волн типа локализованных вихрей в электронных пучках, неоднородных по плотности и (или) скорости, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в вакууме. Получено выражение для потенциала электрического поля вихря, которое состоит из антисимметричного слагаемого, имеющего дипольную азимутальную структуру, и осесимметричного (монопольного) слагаемого, обусловленного цилиндричностью геометрии. Дипольное слагаемое содержит четное число локальных экстремумов по радиусу. В общем случае вихрь в целом имеет спиральную структуру, вращающуюся вокруг оси пучка. Такие вихри в электронных пучках могут возникать в результате соответствующих внешних возмущений или в процессе развития неустойчивостей, обусловленных неоднородностью поля скорости электронов: слипинг-неустойчивости в сплошных пучках и диокотронной — в трубчатых.

Введение

Широко развернувшееся в последние годы применение электронных пучков в различных областях физики и техники ставит на одно из первых мест задачу получения пучков высокого качества, отличающихся прежде всего малым эмиттансом. В теоретическом плане в связи с этим возникает необходимость обратить более пристальное внимание на мелкомасштабную структуру пучков и на процессы, приводящие к ее эволюции.

В предлагаемой работе исследуются свойства и возможности появления в неоднородных по плотности и скорости нескомпенсированных электронных пучках, распространяющихся в вакууме во внешнем магнитном поле, вихревой мелкомасштабной структуры, аналогичной в определенном смысле волнам Россби во вращающейся жидкости [1], уединенным дипольным вихрям в неподвижной незаряженной плазме [2, 3], радиальным вихрям во вращающейся плазме [4]. Такие вихри в электронных пучках могут возникать в результате соответствующих внешних возмущений или в процессе развития неустойчивостей, обусловленных неоднородностью поля скорости электронов: слипинг-неустойчивости в сплошных пучках [5] и диокотронной — в трубчатых [6]. Мелкомасштабные вихри могут послужить причиной нежелательного для многих приложений увеличения поперечной температуры, а следовательно, и эмиттанса электронного пучка.

Постановка задачи

Рассмотрим холодный нерелятивистский электронный пучок, распространяющийся в вакууме вдоль внешнего однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 , направленного по оси z цилиндрической системы координат r, θ, z . Пусть однородное по θ и z равновесное состояние пучка характеризуется заданными радиальными распределениями плотности $n_0(r)$ и продольной скорости $v_{0z}(r)$ электронов. Тогда равновесный потенциал электрического поля $\varphi_0(r)$ и азимутальная скорость электронов $v_{0\theta}(r)$ определяются уравнениями

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_0}{dr} \right) = 4\pi en_0, \quad v_{0\theta}(r) = \frac{c}{B_0} \frac{d\varphi_0}{dr}. \quad (1)$$

При этом считаем магнитное поле достаточно сильным, чтобы выполнялись неравенства

$$\omega_c^2 \gg \omega_0^2, \quad \omega_0^2 (\omega_0 r_b / c)^2, \quad (2)$$

позволяющие пренебречь центробежной силой и собственным продольным магнитным полем пучка в условии радиального равновесия электронов. В (1), (2) $\omega_c = eB_0/mc$; $\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m$; r_b — характерный радиус пучка; $-e$, m — заряд и масса электронов; c — скорость света.

Исследуем нестационарное состояние системы с отклонениями $n(r, t)$, $v(r, t)$ и $\varphi(r, t)$ от равновесных значений n_0 , $v_0(0, v_{0\theta}, v_{0z})$ и φ_0 . Для этого запишем уравнения движения и непрерывности для пучка и уравнение Пуассона для потенциала поля в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) = -\frac{e}{m} \left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (3)$$

$$\frac{dn}{dt} + \nabla[(n_0 + n)\mathbf{v}] = 0, \quad (4)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi en, \quad (5)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$.

Для поперечной скорости \mathbf{v}_\perp из уравнения (3), пренебрегая членами в его левой части по сравнению с $\omega_c \mathbf{v}_\perp$, получаем выражение

$$\mathbf{v}_\perp = (c/B_0) \mathbf{e}_z \times \nabla\varphi, \quad (6)$$

описывающее дрейф электронов в скрещенных полях. Интересуясь возможностью распространения в системе нелинейных волн, будем искать решения, зависящие от r и новой угловой координаты

$$\eta = \theta + k_z z - \omega t \quad (7)$$

с постоянными k_z и ω — продольным волновым числом и циклической частотой волны. В переменных r, η

$$d/dt = -\omega_d \partial/\partial \eta, \quad \omega_d = \omega - k_z v_{0z} - v_{0\theta}/r,$$

$$\partial/\partial \theta = \partial/\partial \eta, \quad \partial/\partial z = k_z \partial/\partial \eta, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + (r^{-2} + k_z^2) \partial^2/\partial \eta^2,$$

и уравнения (3)—(6) дают замкнутую систему уравнений для функций $v_z(r, \eta)$, $\varphi(r, \eta)$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\omega_d - k_z v_z) \Delta\varphi - 4\pi en_0 \left(k_z v_z - \frac{k_n}{v_0} \frac{e}{m} \varphi \right) \right] = \frac{c}{B_0} \{ \varphi, \Delta\varphi \}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\omega_d - \frac{1}{2} k_z v_z \right) v_z + (k_z + k_v) \frac{e}{m} \varphi \right] = \frac{c}{B_0} \{ \varphi, v_z \}, \quad (9)$$

где $k_v = (dv_{0z}/dr)/\omega_c r$, $k_n = (dn_0/dr) v_0/\omega_c r n_0$, $v_0 = v_{0z}(0)$, $\{f, g\} = (1/r) (\partial f/\partial r \times \partial g/\partial \eta - \partial f/\partial \eta \times \partial g/\partial r)$.

Уравнения (8), (9) содержат нелинейности двух типов: скалярную, определяемую членами, пропорциональными v_z^2 и $v_z \Delta\varphi$, и векторную, определяемую якобианом $\{f, g\}$. Здесь мы будем пренебрегать скалярной нелинейностью, считая

$$|k_z v_z| \ll |\omega_d|, \quad (10)$$

что обеспечивается, например, выбором достаточно малых значений k_z . Если к тому же предположить, что k_v и ω_d слабо зависят от r , то в качестве решения уравнения (9) можно взять

$$v_z = -\frac{k_z + k_v}{\omega_d} \frac{e}{m} \varphi. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (8) приходим к уравнению для потенциала φ с векторной нелинейностью

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta \varphi - \Lambda \varphi) - \frac{c}{\omega_d B_0} \{ \varphi, \Delta \varphi \} = 0, \quad (12)$$

$$\Lambda = -k_x(k_x + k_y) \omega_0^2 / \omega_d^2 - k_x \omega_0^2 / v_0 \omega_d. \quad (13)$$

Как и при решении уравнения (9), ограничимся случаем, когда зависимостью Λ от r можно пренебречь, т. е. будем считать $\Lambda = \text{const}$. Отметим, что в линейном приближении, полагая $\Delta \varphi = -(k_x^2 + k_y^2) \varphi$, $k_{\perp} = \text{const}$, из (12) получаем дисперсионное уравнение слипинг-неустойчивости [5]

$$(k_x^2 + k_y^2) \omega_d^2 - (k_x \omega_0^2 / v_0) \omega_d - k_x(k_x + k_y) \omega_0^2 = 0, \quad (14)$$

которое может иметь комплексные (неустойчивые) решения для ω_d только при условии

$$k_x k_y < 0. \quad (15)$$

В случае $\Lambda = \text{const}$ уравнение (12) приводится к виду

$$\{ \Delta \varphi - \Lambda \varphi, \varphi - B_0 \omega_d r^2 / 2c \} = 0, \quad (16)$$

удобному для дальнейшего исследования.

Локализованные вихри

Уравнение (16) с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением, полученным в [4] для радиальных вихрей в цилиндрических плазменных ловушках. Решение этого уравнения проведем, как и в [4], следуя работе [2]. Благодаря свойству якобиана (16) сводится к уравнению

$$\Delta \varphi - \Lambda \varphi = F (\varphi - B_0 \omega_d r^2 / 2c), \quad (17)$$

где $F = F(x)$ — произвольная функция, а $\varphi - B_0 \omega_d r^2 / 2c$ имеет смысл функции тока в системе координат, движущейся с волной.

Выберем в качестве F линейную функцию

$$F = C_1 (\varphi - \varphi_a r^2 / a^2) + C_2 \varphi_a, \quad (18)$$

где $\varphi_a = B_0 \omega_d a^2 / 2c$; C_1, C_2 — произвольные постоянные; a — свободный параметр — радиус вихря, разделяющий плоскость r, η на две области.

Уравнение (17) будем решать отдельно в каждой из этих областей со своими постоянными C_1 и C_2 и затем непрерывно сошьем решения на границе. Перейдем в полярную систему координат r', η' с началом в центре искомого уединенного вихря, находящегося на расстоянии R от оси пучка. Уравнение границы областей в этой системе координат имеет вид $r' = a$. Угол η' отсчитывается от прямой, проходящей через центр волны по касательной к окружности радиуса R , а радиус r связан с r', η' соотношением $r^2 = r'^2 + 2Rr' \sin \eta' + R^2$.

Полагая во внешней области $C_1 = C_2 = 0$, получаем два уравнения

$$\Delta' \varphi - p^2 \varphi = 0, \quad r' \geq a, \quad (19a)$$

$$\Delta' \varphi + q^2 \varphi = \varphi_a (p^2 + q^2) \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 + 2 \frac{R}{a} \frac{r'}{a} \sin \eta' + C_0 - 1 \right], \quad r' < a, \quad (19b)$$

в которых для удобства введены новые постоянные p, q и C_0 , связанные со старыми равенствами $p^2 = \Lambda$, $C_1 = -(p^2 + q^2)$, $C_2 = -(p^2 + q^2) (R^2 / a^2 + 1 - C_0)$, а штрих у оператора Δ означает простую замену r, η на r', η' , которая правомерна при условии $k_x^2 L_{\perp}^2 < 1$, где L_{\perp} — характерный поперечный размер искомого решения.

Решения уравнений (19), ограниченные при $r' = 0$ и на бесконечности и непрерывные при $r' = a$, имеют вид

$$\varphi = \varphi_a \left[C_0 \frac{K_0(pr')}{K_0(pa)} + 2 \frac{R}{a} \frac{K_1(pr')}{K_1(pa)} \sin \eta' \right], \quad r' \gg a, \quad (20a)$$

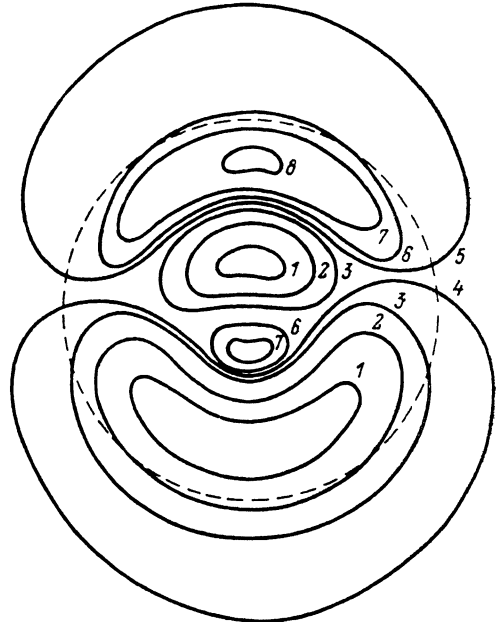
$$\varphi = \varphi_a \left\{ C_0 + \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 \right) \left(\frac{r'^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{p^2}{q^2} \left[C_0 - \frac{4}{p^2 a^2} \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 \right) \right] \left[1 - \frac{J_0(qr')}{J_0(qa)} \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{R}{a} \left[\left(\frac{p^2}{q^2} + 1 \right) \frac{r'}{a} - \frac{p^2}{q^2} \frac{J_1(qr')}{J_1(qa)} \right] \sin \eta' \right\}, \quad r' \leq a. \quad (20b)$$

Из условия $(\partial\varphi/\partial r')_{r'=a+0} = (\partial\varphi/\partial r')_{r'=a-0}$ получаем уравнения для постоянных q и C_0

$$-\frac{1}{qa} \frac{J_2(qa)}{J_1(qa)} = \frac{1}{pa} \frac{K_2(pa)}{K_1(pa)}, \quad (21a)$$

$$C_0 = \frac{4}{p^2 a^2} \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 \right) \left[\frac{J_1(qa)}{qa J_0(qa)} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{qa} \frac{J_1(qa)}{J_0(qa)} + \frac{1}{pa} \frac{K_1(pa)}{K_0(pa)} \right]^{-1}, \quad (21b)$$

первое из которых по виду совпадает с дисперсионным уравнением для дипольного вихря [2]. При заданных $v_0(r)$, $n_0(r)$, k_z , ω , R и a определяется q_i — один из корней уравнения (21a), лежащий в интервале $q_{1i} < q_i < q_{2i}$ ($i=1, 2, \dots$), где $q_{1i}a$, $q_{2i}a$ — нули функций $J_1(x)$, $J_2(x)$ соответственно, затем из (21b) находится C_{0i} и тем самым полностью определяется решение (20). Оно является конечным и гладким на всей плоскости r' , η' и терпит разрыв производных выше второго порядка при $r'=a$. Возмущение потенциала оказывается локализованным внутри круга радиуса a и спадает на бесконечности по закону $(r')^{-1/2} \exp(-pr')$, поэтому характерный поперечный размер вихря можно записать в виде $L_{\perp} = a + p^{-1}$. При $pa \ll 1$ $L_{\perp} \simeq p^{-1} = \Lambda^{-1/2}$ и $q_i \simeq q_{1i}$, при $pa \gg 1$ $L_{\perp} \simeq a$ и $q_i \simeq q_{2i}$.



Изолинии безразмерного потенциала φ/φ_a в плоскости $z=\text{const}$ при $R/a=2$, $pa=4$, $i=2$, $q_2a \simeq 7.36$.

Волна вращается вокруг точки 0 против часовой стрелки. Штриховая линия — $r'=a$; φ/φ_a : 1 — -6, 2 — -3, 3 — -1.5, 4 — -0.1, 5 — 0.1, 6 — 1.5, 7 — 3, 8 — 6.

• 0

Полученное решение состоит из антисимметричного в координатах r' , η' слагаемого, представляющего собой дипольный вихрь, и осесимметричного (монопольного) слагаемого, обусловленного цилиндричностью геометрии. В [4] решение такого типа названо радиальным вихрем. В общем случае вихрь в целом имеет спиралевидную структуру с шагом $2\pi/k_z$ по z , вращающуюся вокруг оси пучка с угловой скоростью ω . Осевая линия вихря составляет угол $k_z R \ll 1$ с силовыми линиями магнитного поля B_0 . В частном случае $k_z=0$ вихрь аксиально-однороден. При $i > 2$ дипольный вихрь внутри круга радиуса a имеет сложную структуру с $2i$ локальными экстремумами потенциала φ .

Если размеры дипольного слагаемого малы по сравнению с радиусом кривизны траектории его движения в плоскости $z=\text{const}$, т. е. $a/R \ll 1$, то решение (20) описывает i пар вихрей равной интенсивности. По мере увеличения отношения a/R интенсивность вихрей в паре становится различной, а при $a/R \gg 1$ осесимметричное слагаемое превосходит антисимметричное и решение представляется в виде одиночного монопольного вихря.

Электроны пучка совершают дрейф в скрещенных электрическом поле $-\Delta(\varphi_0 + \varphi)$ и внешнем магнитном поле B_0 вдоль изолиний потенциала $\varphi_0(r) +$

$+\varphi(r, \eta)$. Это дрейфовое движение складывается с аксиальным движением со скоростью $v_{0z}(r)$.

Качественная картина распределения уровней безразмерного потенциала φ/φ_a в плоскости $z=\text{const}$ представлена на рисунке для случая $i=2$. Изображение изолиний безразмерной функции тока $\varphi/\varphi_a - (r'^2 + 2Rr' \sin \eta')/a^2$ для $i=1$ можно найти в [4].

Для существования решения (20) должно выполняться условие $\Lambda > 0$, которое с учетом (13) удобно записать в форме неравенства

$$k_z^2 + k_z k_v + \omega_d k_n / v_0 < 0. \quad (22)$$

Видно, что в случае $k_n \neq 0$ (поток электронов неоднороден по плотности) радиальный вихрь возможен и при $k_z k_v = 0$, т. е. при его аксиальной однородности и (или) отсутствии градиента продольной скорости. Если же $k_n = 0$ (однородный по плотности пучок), то необходимое условие существования радиального вихря совпадает с необходимым условием слипинг-неустойчивости (15), означающим, что пучок должен иметь градиент продольной скорости, а волна возмущения должна иметь спиральную структуру. Такое совпадение позволяет предположить, что слипинг-неустойчивость пучка может на нелинейной стадии привести к образованию спиральных радиальных вихрей. Аналогичную гипотезу, по-видимому, можно высказать о генерации вихрей в трубчатом электронном пучке при развитии в нем диокотронной неустойчивости. Вихри в этом случае могут иметь и аксиально-однородную структуру, так как для диокотронной неустойчивости не требуется выполнения условия $k_z \neq 0$.

Заключение

Таким образом, в работе теоретически исследована возможность существования нелинейных стационарных волн типа локализованных вихрей в электронных пучках, неоднородных по плотности и (или) скорости, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля в вакууме. Получено выражение для потенциала электрического поля вихря в системе координат волны, которое состоит из антисимметричного слагаемого, имеющего дипольную азимутальную структуру, и осесимметричного (монополярного) слагаемого, обусловленного цилиндричностью геометрии. Дипольное слагаемое содержит четное число локальных экстремумов по радиусу. В общем случае вихрь в целом имеет спиральную структуру, вращающуюся вокруг оси пучка.

Показано, что в неоднородных по плотности пучках для существования вихря не требуется неоднородности продольной скорости частиц и ось вихря может быть прямолинейной, тогда как в пучках с однородной плотностью должны присутствовать одновременно градиент продольной скорости электронов и спиральность оси вихря. В сплошных пучках в этих условиях возможна слипинг-неустойчивость, которая и может послужить причиной появления вихрей. В трубчатых пучках генерации вихрей, по-видимому, должна способствовать диокотронная неустойчивость. При этом вихри могут иметь аксиально-однородную структуру. Образование сложной мелкомасштабной структуры пучка будет в конечном итоге приводить к увеличению его эффективной поперечной температуры, а следовательно, и к увеличению эмиттанса.

Список литературы

- [1] Ларичев В. Д., Резник Г. М. // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1077—1079.
- [2] Петушавили В. И. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. № 2. С. 270—272.
- [3] Hasegawa A., Mima K. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39, N 4. P. 205—208.
- [4] Абурджания Г. Д., Иванов В. Н. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 575—581.
- [5] Rome J. A., Briggs R. J. // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. N 5. P. 796—804.
- [6] MacFarlane C. S., Hay H. G. // Proc. Phys. Soc. (London). 1950. Vol. 63B. N 5. P. 409—427.
- [7] Резник Г. М. // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 981—985.