

01; 10

© 1990 г.

## К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИОНОВ В АВТОРЕЗОНАНСНОМ УСКОРИТЕЛЕ С ТРУБЧАТЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

### III. ЭМИТТАНСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИОННЫХ ПУЧКОВ

*М. И. Капчинский, Ю. В. Рудяк*

Проведено численное моделирование одночастичной радиально-фазовой динамики ионов в поле медленной циклотронной волны во внутренней полости трубчатого электронного пучка в режимах транспортировки частиц, усиления волны и ускорения частиц. Основное внимание уделяется вычислению поперечного фазового объема ионных сгустков. Найдена оценка набираемого ионами эмиттанса и даны рекомендации по его снижению. Показана связь эмиттанса ионного пучка с коэффициентом захвата ионов волной электронного пучка.

#### Введение

В работах [1, 2] в одночастичном приближении рассмотрена динамика ионов, инжектируемых во внутреннюю полость трубчатого электронного пучка, по которому распространяется медленная циклотронная волна. Эта задача тесно связана с построением теории коллективного авторезонансного метода ускорения ионов [3]. В [1] аналитически исследован процесс захвата ионов волной, в [2] проведено численное моделирование этого процесса. В нашей работе методы [2] развиты для изучения эмиттансных характеристик ускоряемых ионных сгустков при движении их в поле волны электронного пучка.

#### Постановка задачи

Рассмотрим модель, принятую в [1, 2]. Трубчатый электронный пучок радиуса  $a$  и толщины  $\delta$  распространяется вдоль оси  $z$ . В нем возбуждена медленная волна амплитуды  $A$  с частотой  $\omega$  и продольным волновым числом  $h$ . Ионы инжектируются во внутреннюю полость трубки с нерелятивистской скоростью. Движение ионов в поле волны электронного пучка считается плоским: момент импульса каждого иона относительно оси равен нулю. Уравнения движения ионов в поле волны трубчатого пучка имеют вид [1]

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{M} A I_1(hr) \sin \varphi, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{M} A I_0(hr) \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi = hz - \omega t$ ,  $r$  — радиальная координата,  $e$  и  $M$  — заряд и масса иона,  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента.

Отметим, что условие применимости одночастичного по ионам приближения есть  $J_e \ll A\omega a^2/4$ , где  $J_e$  — ток ионов. Кроме того, при выполнении условий  $J_e \gg Ahca^3/4\delta$ , где  $J_e$  — ток электронов,  $c$  — скорость света и  $\delta/a \ll 1$ , можно считать, что ионы мгновенно и зеркально отражаются от стенки электронного пучка при  $r=a$ .

В коллективном волновом ускорителе ионов возможны следующие сочетания параметров волны электронного пучка: участок транспортировки — амплитуда и фазовая скорость волны постоянны; участок усиления — фазовая

постоянна, амплитуда волны нарастает вдоль оси  $z$  по экспоненциальному закону; участок ускорения — увеличивается фазовая скорость волны, могут меняться ее амплитуда и радиус пучка. Частота волны  $\omega$  всюду неизменна.

Перейдем к безразмерным переменным. Пусть  $\varepsilon = eA_0/Ma_0\omega^2$ ,  $\rho = r/a_0$ ,  $\eta = \sqrt{\varepsilon}\omega t$ ,  $v_\rho = v_r/a_0\omega\sqrt{\varepsilon}$ ,  $v_\varphi = (d\varphi/dt)(\omega\sqrt{\varepsilon})^{-1}$ , где  $a_0$  — начальный радиус пучка,  $A_0$  — начальная амплитуда волны. Уравнения движения частиц (1) запишутся в виде

$$\frac{d\rho}{d\eta} = v_\rho, \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = v_\varphi, \quad \frac{dv_\rho}{d\eta} = \frac{A}{A_0} I_1(ha_0\rho) \sin \varphi, \\ \frac{dv_\varphi}{d\eta} = \frac{A}{A_0} ha_0 I_0(ha_0\rho) \cos \varphi + \frac{dh}{dz} \frac{(1 - v_\varphi \sqrt{\varepsilon})^2}{h^2 \sqrt{\varepsilon}}, \quad \frac{dz}{d\eta} = \frac{1 - v_\varphi \sqrt{\varepsilon}}{h \sqrt{\varepsilon}}. \quad (2)$$

Задача о движении иона в заданном электромагнитном поле может быть сформулирована как во временной (начальной), так и в пространственной (граничной) постановке. В случае, если решается временная задача, начальные условия для системы (2) при инжекции холодного ионного пучка будут выглядеть

$$\rho|_{\eta=0} = \rho_0 \in [0, 1], \quad v_\rho|_{\eta=0} = 0, \\ \varphi|_{\eta=0} = \varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad v_\varphi|_{\eta=0} = 0. \quad (3)$$

В случае пространственной задачи, когда заданы условия инжекции ионов в точке  $z=0$ , будем следить за частицами одного периода, фазы которых при  $z=0$  находились в интервале  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ . Для этих частиц начальные условия имеют вид

$$\rho|_{r=r_0} = \rho_0 \in [0, 1], \quad v_\rho|_{\eta=\eta_0} = 0, \\ \varphi|_{\eta=\eta_0} = -\eta_0/\varepsilon^{1/2}, \quad v_\varphi|_{\eta=\eta_0} = 0, \\ \eta_0 \in \left[-\frac{3\pi}{2} \varepsilon^{1/2}, \frac{\pi}{2} \varepsilon^{1/2}\right]. \quad (4)$$

Из соотношений (2), (3) видно, что на участке транспортировки начальная задача полностью описывается одним геометрическим параметром  $h_0 a_0$ , характеризующим радиальную неоднородность ускоряющей компоненты поля  $E_z$  в пучковой волне, где  $h_0$  — постоянная распространения волны на этом участке. Зависимости интересующих нас величин от остальных параметров  $a_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$  определяются тем, как входят эти параметры в безразмерные величины  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $v_\rho$  и  $v_\varphi$ .

Для граничной задачи (2), (4) на участке транспортировки имеются два параметра: геометрический  $h_0 a_0$  и энергетический  $\kappa = 2eAa_0 h_0^2 / M\omega^2 = 2h^2 a_0^2 \varepsilon$ , численно равный относительному приращению энергии иона на дистанции, равной радиусу трубки электронного пучка.

Нормализованный эмиттанс ионного пучка, согласно [4], есть

$$V_{\Pi}^2 = \frac{1}{c^2} (\langle \overline{v_r^2} \rangle \langle r^2 \rangle - \langle \overline{v_r r} \rangle^2), \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по радиусу с плотностью ионов стоящей внутри их величины.

Выражением (5) определяется нормализованный эмиттанс в данной точке  $z$  в фиксированный момент времени. В данной задаче, однако, необходимо пользоваться не локальным, а средним по пространственному периоду  $L = 2\pi/h$  нормализованным эмиттансом. Для этого угловые скобки в (5) мы заменим на фигурные, что будет означать усреднение и по радиусу, и по фазовому периоду. С учетом сказанного запишем нормализованный эмиттанс в виде

$$V_{\Pi}^2 = \frac{1}{c^2} (\langle \overline{v_r^2} \rangle \langle r^2 \rangle - \langle \overline{v_r r} \rangle). \quad (6)$$

В работе [1] было показано, что при поперечной неоднородности ускоряющего поля  $E_x = E_x(r)$  в режиме транспортировки волной захватывается только часть ионов, а другая часть постепенно выпадает из синхронизма с волной электронного пучка. Поэтому при изучении динамики ионов на участке транспортировки естественно интересоваться значением эмиттанса, который наберут ионы, до конца остающиеся в синхронизме с волной. Согласно [1], при начальных условиях  $v_r = v_\varphi = 0$  область асимптотического захвата описывается выражением

$$I_0(hr_0) \sin \varphi_0 > -1, \quad (7)$$

где  $r_0$  и  $\varphi_0$  — начальные радиус и фаза частиц.

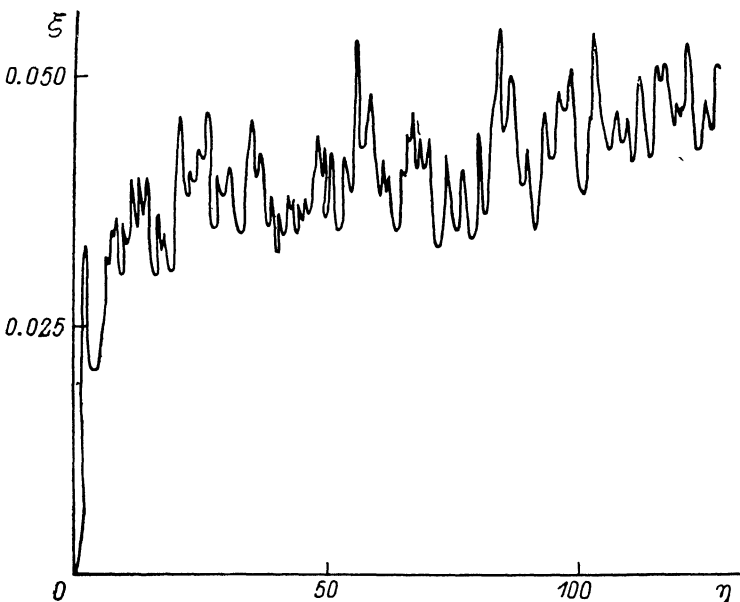


Рис. 1. Зависимость параметра  $\xi$  от безразмерного времени  $\eta$  для начальной задачи при  $h_0 a_0 = 1.5$ .

На рис. 1 приведена зависимость безразмерной комбинации параметров  $\xi = \partial^2 / \pi^2 \kappa a_0^2$  от аргумента  $\eta$  для ионов, попавших при инъекции в область (7), полученная из решения начальной задачи (2), (3). Параметр  $h_0 a_0 = 1.5$ . Здесь  $\partial = (\pi c / V_{zi}) V_{п}$ , скорость ионов  $v_{zi}$  полагается равной фазовой скорости волны  $\omega/h$ . Исходное распределение ионов по поперечному сечению и по фазам  $\varphi$  полагалось равномерным. Виден резкий рост величины  $\xi$  и последующие быстрые колебания ее вокруг равновесного уровня. Характерное время роста есть период фазовых колебаний частиц в волне  $T_\phi = 2\pi (M/eAh)^{1/2}$ .

Для решения граничной задачи приходится задавать два параметра  $h_0 a_0$  и  $\kappa$ . На рис. 2 показана зависимость комбинации  $\xi$  от  $\eta$ , найденная при решении граничной задачи (2), (4). Параметры  $h_0 a_0 = 1.5$ ;  $\kappa = 5$ . Видно хорошее совпадение результатов решения начальной и граничной задач; заметное отличие наблюдается только при малых значениях времени. Расчеты показывают, что такое совпадение имеет место во всем диапазоне практически интересных значений  $h_0 a_0$  от 0.5 до 5.0. Это означает, что нет необходимости решать граничную двухпараметрическую задачу, а можно ограничиться исследованием начальной задачи при различных значениях геометрического параметра  $h_0 a_0$ .

Кривые на рис. 1 и 2 характерны для любых величин параметра  $h_0 a_0$ , находящихся в указанном выше диапазоне; меняются лишь только уровень, вокруг которого происходят колебания эмиттанса, и несущественные для нас амплитуда и период этих колебаний. На рис. 3 сплошной кривой показана зависимость от

$h_0 a_0$  безразмерной комбинации  $\xi = \mathcal{E}^2 / \pi^2 \kappa a_0^2$ . Видно, что эта зависимость близка к прямой пропорциональности  $\xi = 0.025 \eta$ .

В качестве примера найдем, какой эмиттанс наберет протонный пучок в системе со следующими параметрами:  $a_0 = 1$  см,  $A_0 = 7$  МВ/м,  $h_0 a_0 = 1.5$ ,  $v_{zi} = \omega / h = 0.03$  с, что соответствует энергии протонов  $W_{i0} = 0.45$  МэВ. Для этих цифр  $\kappa = 0.175$ , эмиттанс  $\mathcal{E} = 90\pi$  см·мрад, так что нормализованный эмиттанс составляет  $V_{\Pi} = 2.7$  см·мрад.

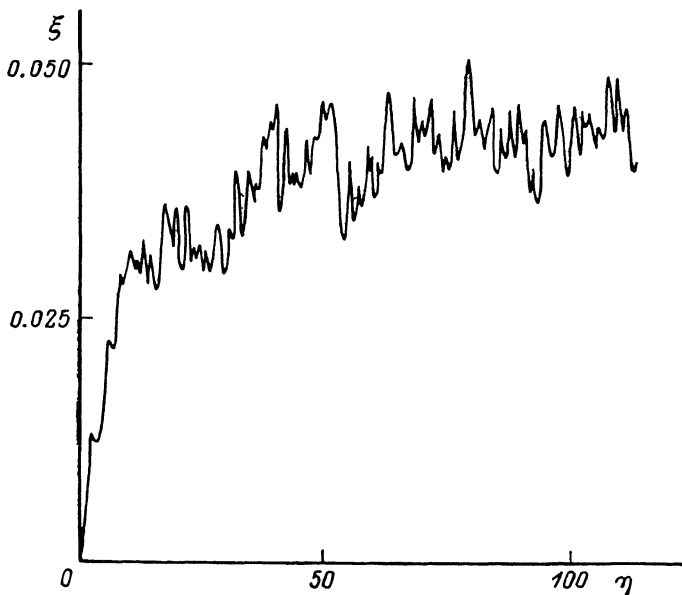


Рис. 2. Зависимость параметра  $\xi$  от безразмерного времени  $\eta$  для граничной задачи при  $h_0 a_0 = 1.5$  и  $\kappa = 5$ .

### Эмиттансные характеристики ионов на участке усиления волны

На участке усиления амплитуда пучковой волны нарастает по экспоненциальному закону  $A(z) = A_0 \exp[\Gamma(z - z_0)]$ , где  $z_0$  — координата начала участка Физической причиной роста волны может служить резонансно неустойчивое взаимодействие ее с волной внешней замедляющей структуры [5].

Напомним, что, согласно [1, 2], на участке усиления наблюдается резкое сжатие ионного сгустка по фазам вокруг синхронной фазы  $\varphi_{s0} = \pi/2$ ; потерь ионов здесь не происходит.

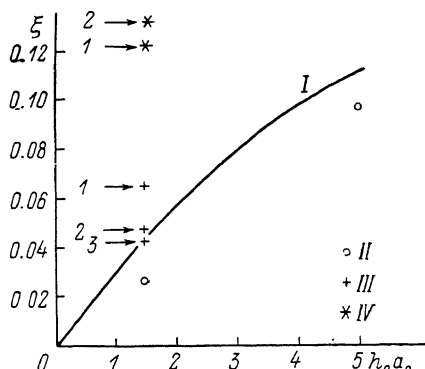


Рис. 3. Зависимость комбинации  $\xi$  от геометрического параметра  $h_0 a_0$ .

I — участок транспортировки; II — после участка усиления; III — после участков усиления и ускорения ( $l_{\Phi}$ , см: 1 — 1, 2 — 10, 3 — 25); IV — после участка ускорения при отсутствии участка усиления (1 —  $l_{\Phi} = 10$ , 2 — 25 см).

Эмиттанс ионного пучка возрастает при его движении в поле нарастающей по амплитуде волны электронного пучка. Однако величина  $\xi$ , при вычислении которой надо использовать текущее значение амплитуды пучковой волны, уменьшается. Для примера на рис. 3 кружками проставлены значения  $\xi$ , полученные при использовании параметров из [2]: начальная амплитуда волны  $A_0 = 0.22$  МВ/м, конечная  $A_y = 7$  МВ/м, начальная энергия ионов  $W_{i0} = 0.45$  МэВ, длина участка транспортировки до начала усиления волны  $z_0 = 20$  см, длина участка усиления  $l = z_y - z_0 = 45$  см, инкремент усиления  $\Gamma = 7.5 \cdot 10^{-2}$  см $^{-1}$  при

двух значений геометрического параметра  $h_0 a_0 = 1.5$  и 5. Эмиттанс подсчитывался по всем частицам, находившимся при  $z = z_y$  в синхронизме с волной. Заметим, что если бы ионы с самого начала были инжектированы в волну с амплитудой  $A_y$ , то их эмиттанс, согласно кривой на рис. 3, оказался бы несколько выше.

### Эмиттансные характеристики ионов на участке ускорения

До сих пор наши рассуждения были справедливы для задачи о движении ионов в поле пучковой волны любой природы — продольной или поперечной. Однако при изменении фазовой скорости волны остальные ее параметры меняются по-разному в зависимости от того, является ли волна ленгмюровской или циклотронной.

Рассмотрим далее только случай медленной циклотронной волны. Ее фазовая скорость, как известно, регулируется величиной внешнего продольного магнитного поля  $H(z)$ , фокусирующего электронный пучок: для слаженной волны, например,  $h \sim H$ . Меняются также поперечные размеры пучка, его радиус растет при ускорении волны  $a \sim H^{-1/2}$ . Амплитуда волны при условии, что ток ускоряемых ионов мал, уменьшается [6, 7]:

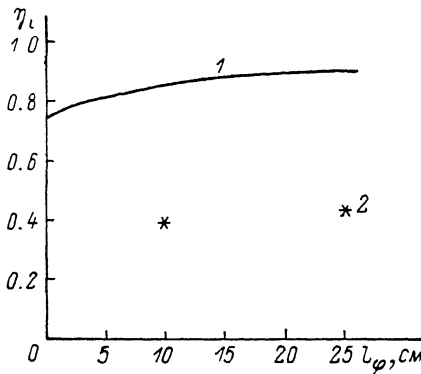


Рис. 4. Зависимость коэффициента захвата ионов от длины участка установления синхронной фазы при  $h_0 a_0 = 1.5$ .

1 — при наличии участка усиления, 2 — без участка усиления.

$A \sim H$ ; зависимость фазовой скорости волны от продольной координаты в этом случае должна быть выбрана в виде [6]

$$v_{\phi}(z) = v_{\phi 0} \left( 1 + \frac{z - z_y}{L_0} \cos \varphi_s \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где  $L_0 = (2/3) (a_0/x_y)$ ,  $x_y = eA_y a_0 / W_{i0}$ ,  $\varphi_s$  — синхронная фаза на участке ускорения.

В [1] показано, что потери ионов в процессе ускорения можно уменьшить, если значение синхронной фазы менять от  $\pi/2$  при транспортировке и усилении до  $\varphi_s$  при ускорении не скачком, а постепенно, выделив специальный участок установления  $\varphi_s$ . На рис. 4 сплошной кривой показана зависимость коэффициента захвата ионов волной  $\eta_i$  от длины  $l_{\varphi}$  участка установления синхронной фазы при  $h_0 a_0 = 1.5$  и параметрах, приведенных в предыдущем разделе. Отметим, что при этих параметрах потери ионов постепенно стабилизировались, так что начиная с дистанции 200 см коэффициент захвата уже не менялся.

В последнее время появились проекты установок, в которых отсутствует участок усиления, ионы сразу должны попадать в циклотронную волну максимальной амплитуды  $A_0 = A_y$  [8]. Факт наличия или отсутствия участка усиления волны существенно влияет на динамику ионов в процессе их ускорения, его влияние сказывается как на коэффициенте захвата ионов волной, так и на величине эмиттанса ускоренных ионов. В качестве примера на рис. 4 звездочками отмечены коэффициенты захвата, получающиеся при отсутствии участка усиления волны ( $A_0 = A_y = 7$  МВ/м), в зависимости от длины  $l_{\varphi}$ . Заметим, что в этом случае основные потери частиц происходят при их ускорении волной, причем из синхронизма выпадают практически все ионы, которые при инжекции не попали в область (7).

На рис. 3 проставлены значения величины  $\xi = \mathcal{E}^2 / \pi^2 x_y a_0^2$ , полученные для  $h_0 a_0 = 1.5$  и различных значений  $l_{\varphi}$  (крестики — при наличии участка усиления,

звездочки — при отсутствии). Из этого рисунка можно сделать вывод, что в процессе ускорения происходит увеличение эмиттанса ионного пучка. В то же время видно, что при наличии участка усиления это увеличение малó.

Наши расчеты показывают, что при наличии одновременно участка усиления волны и участка установления синхронной фазы кривая на рис. 3 служит надежной оценкой эмиттанса, приобретенного ионным пучком. При отсутствии участка усиления ионный эмиттанс может быть в несколько раз больше.

### Выводы

В работе исследованы эмиттансные характеристики ионных пучков при движении их в поле волны трубчатого электронного пучка.

Показано, что квадрат эмиттанса, набираемого при транспортировке, пропорционален отношению набора энергии ионом на дистанции  $a_0$  к энергии инжекции  $W_{i0}$ , квадрату радиуса трубки пучка  $a_0^2$  и примерно пропорционален отношению радиуса к длине пучковой волны. Набор эмиттанса происходит за время, близкое к периоду фазовых колебаний частиц в поле волны.

При усилении волны эмиттанс возрастает, но отмеченное выше отношение служит надежной верхней оценкой набираемого ионами поперечного фазового объема.

При ускорении ионов их эмиттанс существенным образом зависит от факта наличия или отсутствия участка усиления пучковой волны. В том случае, если этот участок имеется и происходит плавное изменение синхронной фазы, отмеченная на рис. 3 сплошной кривой зависимость дает хорошую оценку для эмиттанса ионного пучка. Если изменение синхронной фазы происходит скачком или недостаточно медленно, то наблюдается увеличение эмиттанса ионов тем более заметное, чем больше теряется при ускорении частиц. В отсутствие участка усиления волны при ускорении происходят как значительные потери частиц, так и увеличение эмиттанса ионов.

Авторы благодарны В. Б. Владыко за полезные обсуждения.

### Список литературы

- [1] Капчинский М. И. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 4. С. 609—615.
- [2] Капчинский М. И., Онищенко И. Н., Панченко И. П. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 2. С. 623—629.
- [3] Sloan M. L., Drummond W. E. // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. N 20. P. 1234—1237.
- [4] Арсеньев Д. А., Рудяк Ю. В. // Тр. РТИ. М., 1980. Вып. 39. С. 145—149.
- [5] Иванов Б. И., Горожанин Д. В., Мирошниченко В. А. // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. Вып. 18. С. 1112—1116.
- [6] Proctor W. A., Genoni T. C. // J. Appl. Phys. 1978. Vol. 49. N 2. P. 910—912.
- [7] Капчинский М. И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 9. С. 1822—1824.
- [8] Маркеев А. М., Мецеров Р. А., Миронов П. В. и др. // XI Всесоюз. совещание по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1988. С. 143.

Поступило в Редакцию  
28 июля 1989 г.