

01; 03

© 1990 г

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ

Е. И. Мухина, А. И. Григорьев

В рамках модового анализа рассчитываются равновесные формы двух близко расположенных заряженных капель сравнимых размеров. Показано, что формы капель в основном определяются амплитудами второй и третьей капиллярных волн и в зависимости от расстояния между каплями величины и знака зарядов они могут быть близки к вытянутым и сплюснутым сфероидам либо грушевидными. Вклад более высоких мод капиллярных волн в формирование равновесного рельефа поверхности капель пренебрежимо мал. Для пары разноименно заряженных капель найдены в аналитическом виде критические условия неустойчивости по отношению к суперпозиции собственного и индуцированного зарядов в виде зависимости между параметрами Рэлея обеих капель и расстояния между ними.

Введение

В связи с задачами создания и фокусировки пучков заряженных монодисперсных капель [1], устойчивости заряженных жидкокапельных аэродисперсных систем, суспензий и двухфазных жидкостных систем [2-5], геофизическими проблемами иницирования разряда линейной молнии и выяснения физических механизмов микроскопического разделения электрических зарядов в облаках и формирования осадков [6-9] представляет значительный интерес определение равновесных форм двух близко расположенных заряженных капель и критических условий их устойчивости по отношению к имеющимся на них электрическим зарядам. Эта задача неоднократно решалась в прошлые годы (см., например, [5-11] и указанную там литературу) экспериментально и теоретически. Но экспериментальные работы ограничивались каплями значительных размеров — ≥ 100 мкм [6, 8, 9], а теоретические исследования проводились либо для капель несравнимых размеров, либо при анализе использовались экзотические системы координат, громоздкость которых сводила на нет гносеологическую ценность получаемых решений [5], либо решение искалось численно и носило сугубо частный характер [10]. В этой связи в данной работе поставленная задача решается аналитическим методом возмущений для капель сравнимых размеров при расстояниях между их центрами порядка суммы диаметров капель, методом, предложенным [12, 13].

1. Пусть имеются две капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, имеющие первоначально сферические формы с радиусами R_i ($i=1, 2$), расположенные на расстоянии R между их центрами, где $R > R_1 + R_2$. Все ниже следующее рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре i -й капли в рамках метода возмущений, используя в качестве малых параметров $v_i = R_i/R$. Имея в виду желательность применения полученных решений при $R \sim R_1 + R_2$, необходимые разложения будем проводить с точностью до членов $\sim v_i^2$. Пусть на каплях имеются собственные электрические заряды Q_i ($i=1, 2$). Тогда плотность распределения свободных зарядов по поверхности капель определится выражениями

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} + \tau_{ij}, \quad (1)$$

где σ_{ij} — поверхностная плотность заряда, индуцируемого j -й каплей на i -й капле.

Известно [14], что точечный заряд dq_j , помещенный на расстоянии R от i -й капли, индуцирует на ней заряд с поверхностной плотностью

$$d\sigma_{ij} = \frac{dq_j}{4\pi R \cdot R_i} \left[1 - \frac{R(R^2 - R_i^2)}{(R^2 + R_i^2 - 2RR_i \cos \gamma_i)^{3/2}} \right]. \quad (2)$$

Здесь γ_i — угол между радиус-вектором точки на поверхности i -й капли и направлением на dq_j . Примем во внимание осевую симметрию в распределении зарядов по поверхности капель (относительно оси, проходящей через центры капель). Распределим заряд dq_j по длине бесконечно тонкого кольца $2\pi R_j d\theta_j$ на поверхности j -й капли (имея в виду интегрирование (2) по азимутальному углу) и, интегрируя (2) по углу θ_j (по поверхности j -й капли) и подставляя в (1), получим

$$\begin{aligned} \sigma_i(\theta_i) &= \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} + \frac{R_j}{R \cdot R_i} \int \left[1 - \frac{R(R^2 - R_i^2)}{(R^2 + R_i^2 + 2RR_i \cos \gamma_i)^{3/2}} \right] \sigma_j \sin \theta_j d\theta_j \equiv \\ &\equiv \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} + \int \sigma_j(\theta_j) \cdot I(\theta_i, \theta_j) \cdot d\theta_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая i — j симметрию, получим такое же выражение для $\sigma_j(\theta_j)$:

$$\sigma_j(\theta_j) = \frac{Q_j}{4\pi R_j^2} + \int \sigma_i(\theta'_i) \cdot I(\theta_j, \theta'_i) d\theta'_i. \quad (4)$$

Наконец, подставим (4) в (3) и получим интегральное уравнение для нахождения $\sigma_i(\theta_i)$

$$\begin{aligned} \sigma_i(\theta_i) &= \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} + \frac{Q_j}{4\pi R_j^2} \int I(\theta_j, \theta_i) d\theta_j + \iint \sigma_i(\theta'_i) \cdot I(\theta'_i, \theta_j) \cdot I(\theta_j, \theta_i) d\theta_j d\theta'_i \equiv \\ &\equiv f(\theta_i) + \int \sigma_i(\theta'_i) \cdot K(\theta'_i, \theta_i) d\theta'_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Точное решение уравнения (5) можно сразу же выписать с помощью резольвенты $B(\theta'_i, \theta_i)$ [15] в виде

$$\sigma_i(\theta_i) = f(\theta_i) + \int B(\theta'_i, \theta_i) \cdot f(\theta'_i) d\theta'_i. \quad (6)$$

$$B(\theta'_i, \theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\theta'_i, \theta_i),$$

$$K_{n+1}(\theta'_i, \theta_i) = \int K(\theta'_i, \theta_j) K_n(\theta_j, \theta_i) d\theta_j.$$

Так как интегралы в (6) не берутся в элементарных функциях, то выпишем решение в виде разложений по малым параметрам v_i с точностью до членов $\sim v_i^4$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{4\pi R^2} \left\{ Q_i \left[\frac{1}{v_i^2} + v_i^2 v_j^2 \left(-5 \frac{v_j}{v_i} + 3 \frac{v_j \cos \theta_i}{v_i^3} + 15 \frac{v_j}{v_i} \cos^2 \theta_i - 21 \frac{v_j^3}{v_i^3} \cos \theta_i \right) \right] + \right. \\ &+ Q_j \left[\left(\frac{5}{2} v_i - \frac{27}{4} v_i^3 - \frac{5}{2} v_i v_j^2 \right) + \cos \theta_i \left(-3 - 3v_j^2 - 3v_j^2 + \frac{21}{2} v_i^2 + 18v_i^2 v_j^2 \right) + \right. \\ &\left. \left. + \cos^2 \theta_i \left(-\frac{15}{2} v_i + \frac{135}{4} v_i^3 + \frac{15}{2} v_i v_j^2 \right) + 35v_i^2 \cos^3 \theta_i \left(-\frac{1}{2} - v_j^2 \right) - \frac{315}{8} v_i^3 \cos^4 \theta_i \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Примем теперь, что давление в среде есть p_0 , а внутреннее давление в сферических каплях p_i . Для изолированной i -й капли разность $p_i - p_0$ определяет равновесный радиус капли из условия баланса давлений на ее поверхности [12]

$$\frac{2\alpha}{R_i} = p_i - p_0,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

В рассматриваемой ситуации кулоновского взаимодействия заряженных капель их формы, конечно, будут отличаться от сферических, но также определяются балансом давлений на поверхности с учетом давления электростатического поля [10, 12, 13, 15]

$$2\alpha H_i = (p_i^* - p_0) + 2\pi\sigma^2, \quad (8)$$

где H_i — средняя кривизна поверхности, а p_i^* — внутреннее давление в i -й капле (отличное от p_i в связи с изменением формы капли).

Уравнение равновесных поверхностей капель с учетом кулоновского взаимодействия будем искать в наиболее общей осесимметричной форме (ввиду осевой симметрии задачи) в виде разложения по полиномам Лежандра [12, 13]

$$r_i(\theta_i) = R_i + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^i P_n(\cos \theta_i) \equiv R_i + f_i(\theta_i). \quad (9)$$

Искажение исходной сферической формы будет, конечно, мало $|f_i(\theta_i)| \ll R_i$, тогда лапласовское давление под искаженной сферической поверхностью определяется известной формулой [16]

$$P_i^* \approx \frac{2\alpha}{R_i} - \frac{\alpha}{R_i^2} (2 + \hat{L}) f_i(\theta_i), \quad (10)$$

где \hat{L} — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Учтем, что $P_n(\cos \theta_i)$ являются собственными функциями оператора \hat{L} , и получим

$$P_i^* = \frac{2\alpha}{R_i} + \frac{\alpha}{R_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+2) \alpha_n^i P_n. \quad (11)$$

Давление электростатического поля на поверхность i -й капли также разложим по полиномам Лежандра с точностью до членов $\sim v_i^4$

$$\begin{aligned} P_i^* = 2\pi\sigma^2 = \frac{2\alpha}{R} \left\{ W_i^2 v_i^{-1} + W_i W_j \left(-\frac{27}{4} v_i^2 v_j^2 - 6 v_i^2 v_j^2 \right) + \right. \\ \left. + W_j^2 (5 v_i^2 v_j^2 + 3 v_j^2 + 6 v_j^2) \right\} P_0 + P_1 [W_i^2 (6 v_j^2 - 42 v_j^2) + \\ + W_i W_j (-6 v_i^{-1} v_j^2 - 6 v_i^{-1} v_j^2 - 6 v_i^{-1} v_j^2 - 6 v_i^2 v_j^2) + 12 W_j^2 v_i v_j^2] + \\ + P_2 \left[20 v_i^2 v_j^2 W_i^2 + W_i W_j (-10 v_i^2 v_j^2 + 10 v_i^2 v_j^2 - \right. \\ \left. - 12 v_i^2 v_j^2) + W_j^2 (6 v_j^2 + 12 v_j^2 + \frac{176}{7} v_i^2 v_j^2) \right] + \\ + P_3 [W_i W_j 14 v_i^2 v_j^2 (-1 - 2 v_j^2) + 18 W_j^2 v_i v_j^2] + \\ \left. + P_4 \left[-18 W_i W_j v_i^2 v_j^2 + \frac{258}{7} W_j^2 v_j^2 v_i^2 \right] \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

для удобства дальнейших рассуждений введем безразмерный параметр Рэлея $W_i^2 = Q_i^2 / (16\pi\alpha R^2)$, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду. Капля устойчива при $W_i^2 < 1$, и неустойчива при $W_i^2 \geq 1$.

Встает вопрос о том, насколько верно найденное выражение для давления p_i . В [5] приведено точное выражение для напряженности электростатического поля у поверхности двух одинаковых капель с зарядами одинаковых либо противоположных знаков. К сожалению, задача об определении напряженности поля между каплями в [5] решена в бисферических координатах, что не позволяет сравнить аналитически найденное в [5] решение с нашим. Численное же сравнение найденного нами решения показывает, что найденное выше выражение для σ_i справедливо с точностью до v^3 вплоть до $R \approx 3R_i$, когда на каплях заряды разных знаков, и до v^2 при $R \approx 4R_i$, когда заряды имеют одинаковый знак.

Подставив (12), (11) в (8) и приравнявая в силу ортогональности $P_n(\cos \theta)$ коэффициенты при полиномах Лежандра равных порядков, найдем амплитуды капиллярных волн α_n^i , определяющие равновесные формы капель,

$$\begin{aligned} \frac{a_3^i}{R_i} &= 10W_i^2 v_i^3 v_j^3 + W_i W_j (-5v_i^{3/2} v_j^{3/2} + 5v_i^{1/2} v_j^{3/2} - 6v_i^{3/2} v_j^{1/2}) + \\ &+ W_j^2 (3v_i v_j^3 + 6v_i v_j^5 + \frac{88}{7} v_i^3 v_j^3), \\ \frac{a_2^i}{R_i} &= -\frac{14}{5} W_i W_j \left(\frac{1}{2} + v_j^2\right) v_i^{3/2} v_j^{3/2} + \frac{18}{5} W_j^2 v_i^2 v_j^3, \\ \frac{a_4^i}{R_i} &= -2W_i W_j v_i^{1/2} v_j^{3/2} + \frac{86}{21} W_j^2 v_i^3 v_j^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Амплитуду a_0^i можно найти из условия несжимаемости капли аналогично тому, как это сделано в [12],

$$\frac{a_0^i}{R_i} \cong - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a_n^i}{R_i}\right)^2 \cong -5W_i^2 W_j^2 v_i^3 v_j^3.$$

Возбуждение моды $\sim P_1(\cos \theta)$ соответствует трансляционному перемещению капли как целого, которое в настоящем рассмотрении не принимается во ви-

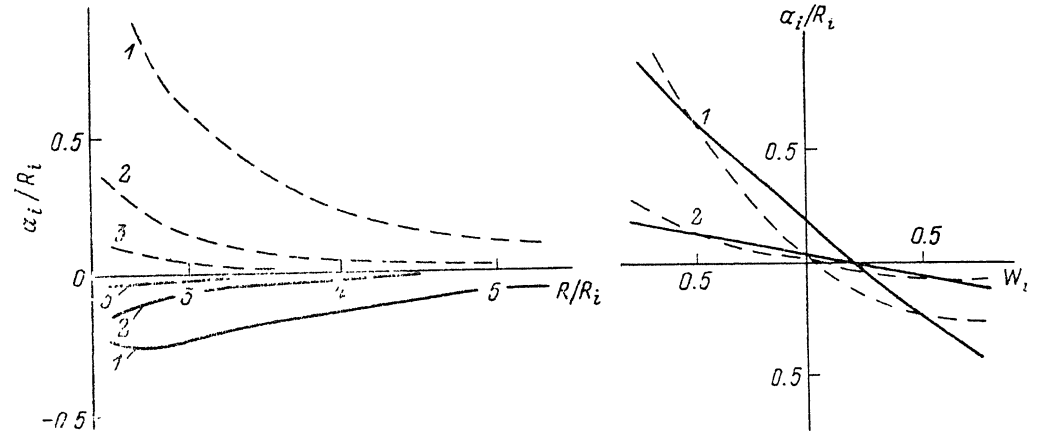


Рис. 1. Зависимости от расстояния между каплями амплитуд второй (1), третьей (2) и четвертой (3) мод капиллярных волн, определяющих отклонение формы капель от сферических.

Сплошные линии — данные для одноименно, штриховые — для разноименно заряженных капель.

Рис. 2. Зависимость амплитуд второй (1) и третьей (2) мод при $v_i = v_j = 0.33$ от величины параметра Рэлея одной из капель (от W_i) при фиксированном значении параметра Рэлея другой капли ($W_j = 0.5$).

Критическое значение $W_i = 0.65$.

вание. Из выражений (13) видно (рис. 1, 2), что 1) искажение исходной сферической формы капель при учете их кулоновского взаимодействия определяется в основном второй модой (при $R \geq 3R_i$), причем она дает сплюснутые сфероиды для одноименно заряженных капель ($a_2^- < 0$) и вытянутые для зарядов разных знаков ($a_2^- > 0$); 2) при неизменном расстоянии между каплями их форма искажается гораздо сильнее в том случае, когда они имеют заряды разных знаков, чем для случая одноименных зарядов ($|a_n^-| > |a_n^+|$); 3) амплитуды мод a_n^i и a_n^j изменяются при изменении величины зарядов приблизительно $\sim Q_i$ ($\sim W_i$); 4) в том случае, когда одна из капель незаряжена, то она в поле заряженной капли принимает грушевидную форму ($a_2^- \geq a_3 > 0$), направленную выступом в сторону другой, имеющей в использованном приближении форму слабовытянутого сфероида; 5) если создавать на незаряженной капле заряд того же знака, что и на другой, то выступ быстро уменьшится и обе капли принимают вид сплюснутых сфероидов.

2. Важным вопросом, связанным с задачей расчета форм капель, равновесных по отношению к собственному и индуцированному зарядам, является вопрос о пределах устойчивости найденных равновесных амплитуд капиллярных волн, определяющих формы капель. Известно [17, 18], что неустойчивость

капли как по отношению к собственному заряду, так и по отношению к внешнему электростатическому полю начинается с неустойчивости основной моды капли (с $n=2$), возбуждение которой соответствует вытягиванию капли в сфероид. В этой связи исследуем вопрос об устойчивости выше найденных равновесных форм капель по отношению к виртуальному искажению формы вида $\xi_0^i \cdot P_2$ (с θ_i).

Пусть равновесная форма i -й капли определяется уравнением

$$r_i(\theta_i) = R_i + A_2^i P_2(\cos \theta_i) + A_3^i P_3^*(\cos \theta_i). \quad (14)$$

и по отношению к такой поверхности задано виртуальное возмущение формы вида $\xi_0^i P_2(\cos \theta_i)$. Будем искать форму рельефа поверхности i -й капли, который установится в результате взаимодействия такого возмущения с внешним электростатическим полем в виде

$$r_i = r_i(\theta_i) + f(\theta_i) \equiv r_i(\theta_i) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i P_n(\cos \theta_i). \quad (15)$$

Несложно видеть из сказанного ранее, что форма капель (14) получается как приближенное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_i &= 0, \\ r_i &= r_i(\theta_i): \Phi_i = \text{const}, \\ P - P_i^* &= P_\sigma + P_\alpha, \end{aligned}$$

где Φ_i — потенциал поля вокруг i -ой капли.

Тогда для нахождения $f(\theta_i)$ из (15) получим систему

$$\begin{aligned} \delta P_\sigma &= \delta P_\alpha - \delta P \text{ при } r_i = r_i(\theta_i) + f(\theta_i), \\ \Delta(\delta \Phi_i) &= 0 \text{ при } r_i > r_i(\theta_i) + f(\theta_i), \\ \delta \Phi_i &= 0 \text{ при } r_i = r_i(\theta_i) + f(\theta_i), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta \Phi$, δP_α , δP_σ и δP_α — малые добавки соответствующим величинам, появляющиеся из возмущения формы поверхности $\xi_0^i \cdot P_2(\cos \theta_i)$.

Выражение для лапласовского давления под искривленной поверхностью несложно получить в виде разложения по степеням A_n^i/R_i [12, 13]

$$\begin{aligned} \delta P_\alpha &= -\frac{\alpha}{R_i^2} \left\{ \left[2 - \frac{A_2}{R_i} (4 - 12 \cos^2 \theta_i) - \frac{A_3}{R_i} (18 \cos \theta_i - 2 \cos^3 \theta_i) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \hat{L} \left[1 - \frac{A_2}{R_i} (3 \cos^2 \theta_i - 1) - \frac{A_3}{R_i} ((5 \cos^3 \theta_i) - 3 \cos \theta_i) \right] \right\} f(\theta_i), \end{aligned}$$

где

$$\hat{L} f(\theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i [-n(n+1) P_n(\cos \theta_i)].$$

Раскладывая произведения $\cos^k \theta_i \cdot P_n(\cos \theta_i)$ по $P_m(\cos \theta_i)$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta P_\alpha &= -\frac{\alpha}{R_i^2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^i \left\{ [2 - n(n+1)] P_n - \frac{A_2}{R_i} [4 + n(n+1)] \times \right. \\ &\quad \times \left[P_n - 3 \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} P_{n-2} + 3 \frac{2n(n+1)-1}{(2n-1)(2n+3)} P_n - \right. \\ &\quad - 3 \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2} \left. \right] - \frac{A_3}{R_i} \left[\frac{18-3n(n+1)}{(2n+1)} [nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1}] + \right. \\ &\quad + \frac{-2+5n(n+1)}{(2n+1)} \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} P_{n-3} + \right. \\ &\quad + \frac{3n(n^2-2)}{4n^2-9} P_{n-1} + \frac{3(n+1)(n^2+2n+1)}{(2n-1)(2n+5)} P_{n+1} + \\ &\quad \left. \left. \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} P_{n+3} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы найти выражение для добавки δP_σ к давлению электрического поля на поверхность i -й капли формы (14), претерпевшей виртуальное возмущение

$P_2(\cos \theta_i)$, учтем, что согласно приведенным результатам возмущение поверхности $\xi(\theta) = \xi_0^i P_2(\cos \theta_i)$ не изменяется в нулевом приближении сфероидальной формы капли, но соответствует лишь увеличению ее эксцентриситета [12, 13].

Напряженность поля в окрестности сфероидальной капли, связанная с возмущением ее формы, находится аналогично тому, как это было сделано в разделе 1 (см. также [13]).

Изолированная сфероидальная капля, будучи в изоляции, имеет поверхностную плотность заряда, согласно [19],

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi} E(\theta_i) = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} \frac{(1-e^2)^{1/2} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta_i}}{\sqrt{1-2e^2 \cos^2 \theta_i + e^4 \cos^2 \theta_i}},$$

где e — эксцентриситет сфероида, связанный с амплитудой второй моды соотношением $A_2/R_i \simeq e^2/3$.

В нашем случае $e^2 = 3(A_2/R_i) \simeq 3(-5W_i W_j \nu_i^3 \nu_j^3 + 3W_j^2 \nu_i^3 \nu_j^3)$. Поверхностная плотность заряда выразится соотношением

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2} \frac{(1-e^2)^{1/2} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta_i}}{\sqrt{1-2e^2 \cos^2 \theta_i + e^4 \cos^2 \theta_i}} + \sigma'_{ij},$$

где σ'_{ij} — плотность индуцированного заряда.

Изменение напряженности поля, связанное с возмущением формы капли, будет равно

$$\delta E_x^i = 4\pi \delta \sigma_i = (\delta \sigma_i + \delta \sigma'_{ij}) 4\pi.$$

Из $i-j$ симметрии

$$\delta E_x^j = 4\pi \delta \sigma_j = (\delta \sigma_j + \delta \sigma'_{ji}) 4\pi.$$

Изменение индуцированной плотности заряда, связанное с возмущением формы i -ой капли, будет равно

$$\delta \sigma'_{ij} = \delta \left(\int \sigma_j I(\theta_j; \theta_i) d\theta_j \right) = \int \sigma_j \delta I(\theta_j; \theta_i) d\theta_j + \int (\delta \sigma_j) I(\theta_j; \theta_i) d\theta_j.$$

Учитывая эти рассуждения, получим выражение для $\delta \sigma_i$

$$\begin{aligned} \delta \sigma_i &= \delta \sigma_i^* + \int \sigma_j \cdot \delta I(\theta_j, \theta_i) d\theta_j + \int I(\theta_j, \theta_i) \int \sigma_i(\theta'_i) \times \\ &\times \delta I(\theta'_i, \theta_j) d\theta'_i d\theta_j + \iint \delta \sigma_i(\theta'_i) I(\theta'_i; \theta_j) I(\theta_j, \theta_i) d\theta'_i d\theta_j. \end{aligned}$$

В этой формуле первый член указывает изменение плотности заряда, возникающее при взаимодействии возмущения формы капли с полем собственного заряда, второй член учитывает взаимодействие заряда второй капли, наводящего σ'_i с полем, третий и четвертый — изображение на i -й капле собственного возмущения, «отраженного» в j -й капле. Очевидно, что последние два члена, учитывающие двойное наведение, малы по сравнению с первыми двумя, поэтому мы их учитывать не будем. В итоге соответствующая добавка к давлению поля примет вид

$$\begin{aligned} \delta P_i^* &= \frac{9}{4\pi} \frac{Q_j^2}{R_j^2} \frac{3\xi_0}{5R_i} \left[\frac{79}{35} e_0^2 P_0 + \left(\frac{6}{7} + \frac{79}{15} e_0^2 \right) P_2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{8}{7} + \frac{1663}{770} \right) P_4 \right] + \frac{9\xi_0 Q_i^2}{4\pi R_i^2} \left[\frac{8}{135} e_0^2 P_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{67}{126} e_0^2 \right) \times P_2 + \frac{16}{105} e_0^2 P_4 \right] + \\ &+ \frac{9Q_j Q_i \xi_0}{4\pi R_j^2 R_i^2} \left[\left(\frac{2}{15} - 0.122 e_0^2 \right) P_1 + \left(\frac{6}{10} + \frac{421}{450} e_0^2 \right) P_3 + \frac{46}{63} e_0^2 P_5 \right], \\ e_0^2 &= \frac{3A_2}{R_i} = 3(-5W_i W_j \nu_i^3 \nu_j^3 + 3W_j^2 \nu_i^3 \nu_j^3). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в (16) и приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра равных порядков, найдем значение равновесной амплитуды основной моды i -й капли, определяющей, согласно [12, 13], условие перехода к неустойчивому состоянию

$$a_2^i \left(1 - \frac{275}{14} W_i W_j v_i^2 v_j^2 \right) = \xi_0 \left\{ W_i^2 + \frac{162}{35} W_j^2 v_i^2 v_j^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{553}{30} (5W_i W_j v_i^2 v_j^2 + 3W_j^2 v_i^2 v_j^2) \right] \right\}. \quad (19)$$

Несложно видеть, что в зависимости от величин W_i , W_j , v_i , v_j соотношение между амплитудами a_2^i и ξ_0^i будет изменяться. В частности, амплитуда исходного возмущения ξ_0^i уменьшается, а форма капли стремится к (13), когда $a_2^i < \xi_0^i$. Если же выполняется противоположное неравенство, то амплитуда a_2^i будет расти [12, 13], т. е. исходное виртуальное возмущение ξ_0^i будет неограниченно увеличиваться, что соответствует проявлению неустойчивости. Предельные значения W_i , W_j , v_i , v_j , разделяющие растущие и убывающие возмущения, определяются из соотношения $a_2^i = \xi_0^i$. Критические значения параметров, определяющих порог неустойчивости запишутся в виде

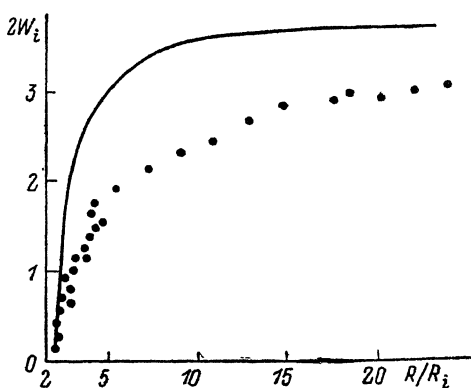
$$\frac{W_i + \frac{162}{35} W_j^2 v_i^2 v_j^2 \left[1 + \frac{553}{30} (3W_j^2 v_i^2 v_j^2 - 5W_i W_j v_i^2 v_j^2) \right]}{1 - \frac{10}{7} (3W_j^2 v_i^2 v_j^2 - 5W_i W_j v_i^2 v_j^2)} \geq 1 \quad (20)$$

или в линейном приближении по v^3

$$W_i \geq 1 + \frac{50}{7} W_j v_i^2 v_j^2. \quad (21)$$

Следует отметить, что W_j в этом выражении необходимо брать со знаком минус, так как все проведенное рассмотрение справедливо лишь для капель разных знаков в связи с тем, что при анализе использовалось выражение для напряженности поля в окрестности вытянутого сфероида, реализующегося только при различных знаках зарядов капель. В соответствии с этим из (21) видно, что критические условия для пары разноименно заряженных капель менее жесткие, чем для изолированных капель.

Рис. 3. Зависимость от расстояния между каплями критического значения параметра Рэлея для двух капель одинакового размера, несущих одинаковые заряды противоположных знаков.



При $W_j = 0$, т. е. при отсутствии заряда на j -й капле, критическое условие (21) сводится к известному условию Рэлея $W_i^2 \geq 1$. При отсутствии заряда на i -й капле и достаточно большом расстоянии до j -й капли формально можно получить условие неустойчивости незаряженной капли во внешнем поле $E_j = -Q_j/R^2$, внешне совпадающее с известным критерием Тейлора. Реально же неустойчивость незаряженной i -й капли в поле заряженной j -й капли не может наблюдаться, так как поле E_j не может достичь критической величины из-за неустойчивости j -й капли по отношению к собственному заряду.

На рис. 3 приведена зависимость критического значения параметра Рэлея от расстояния между каплями, рассчитанная по (21) при $R_i = R_j$ и $Q_i = -Q_j$. Точками на том же графике отмечены экспериментальные работы [11]. Качественное согласование очевидно. Что же касается отсутствия количественного совпадения, то его причина в том, что эксперименты в [11] проводились с крупными каплями ($R = 134$ мкм), для которых существенно влияние гравитационных сил. В проведенном же выше рассмотрении действие гравитационных сил, равно как и аэродинамических, не учитывалось, что ограничивает область применимости полученных результатов размерами капель $R_i \leq 10$ мкм [7, 20].

Найденные искажения равновесной формы электростатически взаимодействующих капель могут заметно сказаться на величинах констант броуновской, турбулентной и электрической коагуляции капель в жидкокапельных облаках различной природы.

Список литературы

- [1] *Дмитриев А. С.* // Сб. науч. тр. № 185. М., 1988. С. 5—10.
- [2] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6—13.
- [3] *Вережагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. Э., Пашин М. М.* // Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия, 1974. 480 с.
- [4] *Сыщиков Ю. В.* Автореф. канд. дис. Л., 1987. 20 с.
- [5] *Панченко Г. М., Цабек Л. К.* Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М.: Химия, 1959. 190 с.
- [6] *Sartor J. D., Abbot C. E.* // J. Geophys. Res. 1968. Vol. 73. N 20. P. 6415—6423.
- [7] *Ким В. М., Мамонова Н. Г.* // Сб. Тр. ин-та экспер. метеорологии. № 44 (134). Обнинск, 1987. С. 31—52.
- [8] *Adam J. R., Lindblad N. R., Hendrics C. D.* // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. N 11. P. 5173—5180.
- [9] *Miller A. H., Shelden C. E., Atkinson W. R.* // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. N 11. P. 1921—1928.
- [10] *Brazier-Smith P. R.* // Proc. Roy. Soc. 1966. Vol. A295. N 1. P. 84—97.
- [11] *Latham J., Roxburg I. W.* // Proc. Roy. Soc. 1966. Vol. 14. N 1. P. 84—97.
- [12] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1701—1713.
- [13] *Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27—34.
- [14] *Кошляков Н. С., Глиер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
- [15] *Gaylor G.* // Proc. Roy. Soc. London. 1964. Vol. A280. N 2. P. 383—397.
- [16] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1944. 624 с.
- [17] *Григорьев А. И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272—1278.
- [18] *Григорьев А. И., Синкевич О. А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10—15.
- [19] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [20] *Верковский Б. М., Краков М. С., Никифоров И. В., Полевиков В. К.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 4—8.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
17 июля 1989 г.