

01; 10

© 1990 г.

АНАЛИЗ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ ЭЛЕКТРОНОВ

И. Н. Мондрус, А. М. Шендерович

Получены дисперсионные уравнения, описывающие поперечную неустойчивость пучка в одиночной резонаторной секции и в ускорителе, состоящем из последовательности резонаторных секций. Показано, что вблизи от параметрического резонанса любой кратности между частотой несимметричной дефокусирующей волны и частотой следования сгустков ускорителя имеет место уменьшение инкремента кумулятивной неустойчивости. При точном резонансе инкремент равен нулю, а при расстройке от резонанса в зависимости от ее знака и частоты возмущения имеет место неустойчивость либо быстрой, либо медленной волны. Показано, что этот эффект приводит к подавлению неустойчивости пучка, если располагать поочередно секции с противоположным знаком расстройки от резонанса. Полученные результаты показывают, что использование параметрического резонанса, хотя и снижает несколько пороговый ток абсолютной неустойчивости одиночной секции, позволяет эффективно подавлять кумулятивную неустойчивость. Требование к точности настройки в резонанс идентичных секций значительно уменьшается при чередовании секций с различным знаком расстройки от резонанса и могут быть легко выполнены на практике.

1. Поперечная неустойчивость является одним из основных факторов, ограничивающих интенсивность пучка в линейных ускорителях. Поэтому изучение ее закономерностей и поиск путей ее подавления представляет значительный практический интерес. Настоящая работа посвящена исследованию влияния на развитие неустойчивости параметрического резонанса между частотой дефокусирующей волны f_α и частотой продольной модуляции пучка f_s . Ранее этот вопрос рассматривался в работах [1, 2]. В [1] было показано, что при $f_s/f_\alpha = 2/3$ имеет место подавление неустойчивости пучка в бесконечном несекционированном диафрагмированном волноводе (в [1] также рассмотрен случай $f_s = f_\alpha$, который, однако, практически никогда не реализуется). В работе [2] при рассмотрении регенеративной (абсолютной) неустойчивости в одиночной резонаторной секции был обнаружен противоположный эффект, а именно снижение порогового тока при параметрическом резонансе.

В настоящей работе исследовано развитие неустойчивости как в многосекционном, так и в односекционном ускорителях при произвольном параметрическом резонансе $2f_\alpha = lf_s$ (l — целое число). Анализ проведен методом дисперсионного уравнения, что позволило единым образом рассматривать как кумулятивную, так и регенеративную неустойчивость и установить границы применимости приближения «тонких линз», на котором основывается большинство работ по кумулятивной неустойчивости (см., например, [3-5]). На основе полученных результатов предложены методы подавления кумулятивной неустойчивости.

2. Рассмотрим последовательность ускоряющих секций длиной L , расположенных с периодом D и занимающих полупространство $z > 0$. Проходящий через них в положительном направлении z пучок представляет собой последовательность точечных сгустков постоянной энергии с зарядом $q = Ne$, движущихся с заданной скоростью $v \approx c$. Исходная система уравнений состоит из уравнений Максвелла и уравнений движения каждого сгустка и

$$v^2 \frac{d^2 x_n}{dz^2} - \frac{1}{\gamma m_0} \frac{ev}{c} F_x(z, t_n) = 0,$$

$$F_x(z, t_n) = \frac{\partial A_{xj}}{\partial x} \quad \text{при } jD < z < jD + L, \quad F_x(z, t_n) = 0 \quad \text{при } jD + L < z < (j+1)D. \quad (1)$$

Здесь n — номер сгустка, $t_n = (z + \lambda_s n)/v$, λ_s — расстояние между сгустками; e и γm_0 — заряд и масса электрона, A_j — вектор-потенциал поля в j -й секции. Разлагая его по собственным модам $A_j(\mathbf{r}, t) = \sum_n \Phi_{\alpha j}(t) \mathbf{A}_{\alpha j}(\mathbf{r})$, ограничиваясь нулевой пространственной гармоникой $A_{\alpha j z} = A_{\alpha j}(x, y) \cos k_\alpha(z - jD)$, $k_\alpha = (\pi\alpha)/L$, учитывая только продольную составляющую плотности тока

$$J_z = \sum_n q \delta(y) \delta(x - x_n) \delta(t - t_n)$$

и линеаризуя уравнения по поперечной координате, получим из уравнений Максвелла вблизи точки синхронизма пучка с дефокусирующей волной

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_{\alpha j}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_\alpha}{Q_\alpha} \frac{d\Phi_{\alpha j}(t)}{dt} + \omega_\alpha^2 \Phi_{\alpha j}(t) = \\ = \frac{4\pi qc}{W_\alpha} \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x}(0) \sum_n \int_{jD}^{jD+L} dz x_n \delta(t - t_n) \cos k_\alpha(z - jD), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_\alpha = 2\pi f_\alpha$, Q_α — добротность секции, W_α — нормировочный множитель. Применяя к $\Phi_{\alpha j}(t)$ преобразование Лапласа по непрерывной переменной t , а к x_n — по дискретной переменной n [6], получим из (1), (2) уравнения для их изображений $\Phi_{\alpha j}(\omega)$ и x_ω . Поскольку x_n имеет полосы периодичности по ω с периодом $\omega_s = (2\pi v)/\lambda_s$, то для ее задания достаточно ограничиться интервалом $-(\omega_s/2) \leq \text{Re } \omega \leq \omega_s/2$. Поэтому вместо функции $\Phi_{\alpha j}(\omega)$, заданной на всем частотном интервале, будем использовать бесконечный набор функций $\Phi_{\alpha j l}(\omega) \equiv \Phi_{\alpha j}(\omega_l)$, заданных на указанном выше интервале, где $\omega_l = \omega + l\omega_s$, l — целое число. Аналогичным образом применим преобразование Лапласа функции $\Phi_{\alpha j l}(\omega) e^{-ijlk_s D}$ ($k_s = 2\pi/\lambda_s$) по дискретной переменной j и функции $x_\omega(z) e^{i(\omega/s)z}$ по непрерывной переменной z . Изображение первой из них $\Phi_{\alpha l}(k, \omega)$ имеет полосы периодичности по k с периодом $k_D = 2\pi/D$ и может быть задано на интервале $-(\pi/D) \leq \text{Re } k \leq \pi/D$. Поэтому второе изображение будем задавать на том же интервале бесконечным набором функций $x_m(k, \omega) \equiv x_\omega(k_m)$ при $k_m = k + mk_D$, m — целое число. В результате последовательного выполнения указанных преобразований, получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$-(\omega - k_m v)^2 a_m(k, \omega) - \varepsilon \omega_s^2 \sum_{\alpha, l} f_{l m \alpha}^* \Phi_{\alpha l}(k, \omega) = \varphi_m(k, \omega), \quad (3)$$

$$-(\omega_l - \omega_\alpha + i\beta)(\omega_l + \omega_\alpha + i\beta) \Phi_{\alpha l}(k, \omega) - \varepsilon \omega_s^2 \sum_m f_{l m \alpha} a_m(k, \omega) = \varphi_{\alpha l}(k, \omega). \quad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{c^2} \frac{evL}{\gamma m_0 \lambda_s \omega_s} \frac{\partial A_{\alpha l}}{\partial x}(0), \quad \varepsilon_2 = \frac{4\pi qc^3 L}{W_\alpha D \omega_s^2} \frac{\partial A_{\alpha l}}{\partial x}(0),$$

$$\Phi_{\alpha l}(k, \omega) = \omega_s \Phi_{\alpha l}(k, \omega), \quad a_m(k, \omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \frac{\omega_s^2}{c^2} x_m(k, \omega),$$

$$f_{l m \alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(k_{lm} + k_\alpha)L} - 1}{i(k_{lm} + k_\alpha)L} + \frac{e^{i(k_{lm} - k_\alpha)L} - 1}{i(k_{lm} - k_\alpha)L} \right], \quad k_{lm} = k + lk_s + mk_D,$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\omega_\alpha}{Q_\alpha}, \quad \varphi_m(k, \omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \frac{\omega_s^2}{c^2} \left[v^2 \frac{dx_\omega}{dz}(0) - iv(\omega - k_m v) x_\omega(0) \right],$$

$$\varphi_{\alpha l}(k, \omega) = \omega_s \left[\frac{\partial \Phi_{\alpha l}}{\partial t}(0, k) + \left(-i\omega_l + \frac{\omega_\alpha}{Q_\alpha} \right) \Phi_{\alpha l}(0, k) \right], \quad x_\omega(0) = x_\omega(z)|_z=0 = 0,$$

$$\frac{dx_\omega}{dz}(0) = \frac{dx_\omega(z)}{dz} \Big|_{z=0}, \quad \Phi_{\alpha l}(0, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{\alpha j}(0) e^{-ik_l j D},$$

$$\frac{\partial \Phi_{\alpha l}}{\partial t}(0, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial \Phi_{\alpha j}}{\partial t}(0) e^{-ij k_l D},$$

сдвигом собственной частоты из-за потерь пренебрегаем.

3. Найдем собственные решения, т. е. решения однородной системы (3), (4) с $\varphi_m(k, \omega) = 0$, $\varphi_{\alpha l}(k, \omega) = 0$. Практически всегда связь пучка с ускоряющей структурой мала, т. е. $\varepsilon \ll 1$, поэтому решения можно найти методами возмущений. Собственные решения будем искать вблизи точек синхронизма, задаваемых пересечением функций $\omega - k_m v = 0$, $\omega_l \pm \omega_\alpha + i\beta = 0$. Условия синхронизма однозначно определяют номера l и m , для которых они выполняются. Так как в точке синхронизма при $\varepsilon = 0$ a_m и $\Phi_{\alpha l}$ могут отличаться от нуля, то существует некоторый произвол в выборе малого параметра $\varepsilon^{\pm} = \nu$, по которому можно вести разложение, что не сказывается, однако, на окончательных результатах. Положим

$$\begin{aligned} a_m &= a_m^{(0)} + \nu a_m^{(1)} + \dots, & \Phi_{\alpha l} &= \nu^{1/2} (\Phi_{\alpha l}^{(0)} + \nu \Phi_{\alpha l}^{(1)} + \dots), \\ \omega &= \omega^{(0)} + \nu \omega^{(1)} + \dots, & k_m &= k_m^{(0)} + \nu k_m^{(1)} + \dots, & \nu &= \varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка (5) в уравнения (3), (4) дает следующие результаты: $\omega_{\pm}^{(0)} = \pm (\omega_\alpha - i\omega_s) - i\beta$, $k_{m\pm}^{(0)} = (1/\nu) (\pm \omega_\alpha - i\beta) \mp k_{\alpha s}$, $a_m^{(0)} = \delta_{mm'} a_{\pm}^{\pm}$, $\Phi_{\alpha l}^{(0)} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \Phi_{\pm}^{\pm}$; a_{\pm}^{\pm} и Φ_{\pm}^{\pm} связаны уравнениями

$$\begin{aligned} -(\omega_{\pm}^{(1)} - k_{m\pm}^{(1)} \nu)^2 a_{\pm}^{\pm} - \omega_s^2 f_{lm\alpha}^* (k_{m\pm}^{(0)}) \Phi_{\pm}^{\pm} &= 0, \\ -\omega_s^2 f_{lm\alpha} (k_{m\pm}^{(0)}) a_{\pm}^{\pm} \mp \omega_{\pm}^{(1)} 2\omega_\alpha \Phi_{\pm}^{\pm} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Определив из (6) $k_{m\pm}^{(1)}$, получим в первом приближении по ν

$$k_{m\pm}^{(1)} = \frac{\omega}{\nu} + \varepsilon \frac{\omega_s^2 |f_{lm\alpha}|}{\nu \sqrt{2}\omega_\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pm(\omega - \omega_{\pm}^{(0)})}}, \quad (7)$$

$$a_{m'\pm} = \frac{\varepsilon^{1/2} \omega_s^2 f_{l'm'\alpha}^*}{(m - m')^2 (k_{\nu} \nu)^2} \Phi_{\pm}^{\pm}, \quad \Phi_{\alpha'l'} = \frac{\varepsilon \omega_s^2 f_{l'l'm\alpha} a_{\pm}^{\pm}}{(\omega_{l'} - \omega_{\alpha'} - i\beta)(\omega_{l'} + \omega_{\alpha'} + i\beta)}. \quad (8)$$

Во всех выражениях двойной знак соответствует $\text{Re } \omega > 0$ и $\text{Re } \omega < 0$. Положительное значение корня в правой части (7) соответствует быстрой волне, а отрицательное — медленной. Неустойчивой является медленная волна, так как для нее при действительных ω $\text{Im } k_{m\pm} < 0$. Характер неустойчивости, т. е. асимптотическое поведение функций $\Phi_{\alpha j}(z)$ при $t \rightarrow \infty$ и $x_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$, определяется, как известно [7], точками ветвления функции $k(\omega)$, которые являются особыми точками функций $\Phi_{\alpha j l}(\omega)$ и $x_\omega(z)$ в плоскости ω . В нашем случае только в нижней полуплоскости имеются две точки ветвления $\omega_{\pm}^{(0)}$, в которых $k(\omega)$ обращается в бесконечность. Контур интегрирования в обратных преобразованиях Лапласа, которыми определяются $\Phi_{\alpha j}(z)$ и $x_n(z)$, можно совместить с действительной осью, и, следовательно, $\Phi_{\alpha j}(t)$ и $x_n(z)$ стремятся к нулю. Таким образом, неустойчивость является конвективной по крайней мере до значений ε , определяемых справедливостью выражений (6)–(8): $\varepsilon^{1/2} \ll \ll \lambda_s/D$, $(\omega_s^2 \varepsilon)/(2(\Delta\omega_\alpha)\omega_\alpha) \ll 1$. При нарушении последнего неравенства, эквивалентного условию $\varepsilon \ll (\lambda_s \nu_{\text{гп}})/(Lc)$ (где $\nu_{\text{гп}}$ — групповая скорость волны), нельзя рассматривать независимо точки синхронизма, соответствующие различным колебаниям α , а при нарушении первого нельзя выделять одну пространственную гармонику a_m .

Найденные из дисперсионного соотношения значения $k(\omega)$ являются особыми точками для решения неоднородной системы, которые после интегрирования по k можно представить в виде суперпозиции собственных решений.

4. Полученное решение (7)–(8) несправедливо вблизи параметрического резонанса, когда $\text{Re } \omega_{\pm}^{(0)}$ приближается к нулю или к $\pm(\omega_s/2)$, так как в этих случаях увеличивается кратность нулевого приближения. Рассмотрим случай, когда точки синхронизма близки к нулю, и обозначим $\omega_{\alpha} - l\omega_s = \Delta$. Положив $\Delta = v\sigma$, $\sigma \sim \omega_s$, получим вместо (6) систему из трех уравнений

$$\begin{aligned} &-(\omega^{(1)} - k_m^{(1)}v)^2 a - \omega_s^2 f_{l m \alpha}^* \Phi^+ - \omega_s^2 f_{-l m \alpha}^* \Phi^- = 0, \\ &-\omega_s^2 f_{l m \alpha} a - 2\omega_{\alpha}(\omega^{(1)} - \sigma)\Phi^+ = 0, \quad -\omega_s^2 f_{-l m \alpha} a + 2\omega_{\alpha}(\omega^{(1)} + \sigma)\Phi^- = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда следует такое выражение для k_m :

$$k_m = \frac{\omega}{v} \pm \frac{\varepsilon}{v} \frac{\omega_s^2 |f_{l m \alpha}|}{\sqrt{\omega_{\alpha}}} \sqrt{\frac{\omega^2 - \Delta^2 - \beta^2 - 2i\omega\beta\Delta}{[(\omega - \Delta)^2 + \beta^2][(\omega + \Delta)^2 + \beta^2]}}. \quad (10)$$

При приближении $\text{Re } \omega_{\pm}^{(0)}$ к $\omega_s/2$, $\text{Re } \omega_{\mp}^{(0)}$ к $-(\omega_s/2)$ аналогичные (9) уравнения связывают амплитуды поля $\Phi_{\alpha l}$ и $\Phi_{\alpha, -l-1}$ в первом случае и $\Phi_{\alpha, -l}$, $\Phi_{\alpha, l+1}$ во втором. Выражение для k_m совпадает с (10), а $\Delta = \omega_{\alpha} - (l + 1/2)\omega_s$.

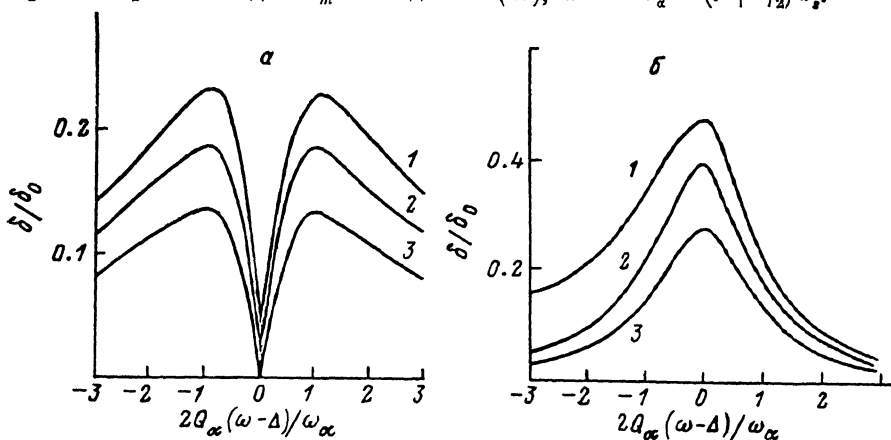


Рис. 1. Зависимость инкремента кумулятивной неустойчивости δ от частоты возмущения при параметрическом резонансе.

δ_0 — инкремент неустойчивости при отсутствии резонанса; $\alpha, \beta = 2Q_{\alpha}(\Delta/\omega_{\alpha})$: 1 — -0.075 , 2 — 0.05 , 3 — 0.025 .

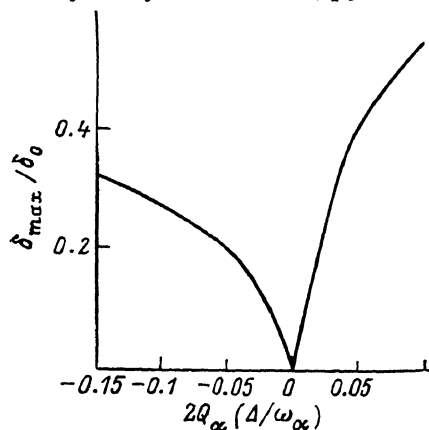
Результаты расчетов по формуле (10) зависимости пространственного инкремента неустойчивости $\delta = \text{Im } k_m$ от частоты ω (при вещественных ее значениях) приведены на рис. 1. Видно, что инкремент неустойчивости существенно зависит как от расстройки от резонанса, так и от частоты возмущения. При каждом значении расстройки существует значение ω , при котором инкремент максимален. Результаты расчетов зависимости максимального пространственного инкремента от расстройки от резонанса приведены на рис. 2. В соответствии с (10) в точном резонансе инкремент обращается в нуль. Для практического использования этого эффекта необходимо определить, с какой точностью должна поддерживаться величина расстройки для уменьшения инкремента в заданное число раз. Из формулы (10) и рис. 2 следует, что при $Q_{\alpha} = 5 \cdot 10^8$, $f_{\alpha} = 4 \cdot 10^9$ для уменьшения инкремента, например, в 3 раза расстройка должна поддерживаться с точностью 60 кГц, что технически вполне осуществимо.

Из приведенного анализа вытекает также следующий любопытный результат. Как хорошо известно, обычно неустойчивой является медленная волна, распространяющаяся со скоростью, меньшей скорости пучка, а быстрая волна является затухающей. В условиях же параметрического резонанса может иметь место обратная ситуация — неустойчивость быстрой и затухание медленной волны. Какая из волн является устойчивой, определяется, очевидно, знаком отношения мнимой и вещественной частей второго члена в правой части (10), который в свою очередь определяется знаком мнимой части в подкоренном выражении в (10), т. е. знаком $\omega\Delta$. При $\omega\Delta < 0$ неустойчивой является медленная

волна, а при $\omega\Delta > 0$ — быстрая. Этот эффект, как будет показано ниже, можно использовать для дополнительного подавления неустойчивости, если выполнить часть секции ускорителя с $\Delta > 0$, а другую часть с $\Delta < 0$. Тогда в одной части ускорителя будет нарастать быстрая волна, а медленная затухать, а в другой его части, наоборот, будет затухать быстрая волна, а медленная нарастать.

Проведенное рассмотрение становится несправедливым при приближении тока пучка к пороговому току абсолютной (глобальной) неустойчивости в одиночной секции. Поскольку, однако, последний существенно больше критического тока для кумулятивной неустойчивости, то из полученных результатов следует возможность существенного увеличения критического тока в многосекционном ускорителе при параметрическом резонансе.

5. Анализ неустойчивости при больших токах можно проводить, используя уравнения (3), (4), так как при их выводе не делалось никаких предположений о величине связи. Технически, однако, гораздо проще рассматривать регенеративную неустойчивость другим методом, решая дисперсионное уравнение для



одиночной секции, так как поправки к $\omega_{\pm}^{(0)}$ возникают только в третьем порядке по ϵ . Одиночная ускоряющая секция является конечной системой. Дисперсионным уравнением такой системы является уравнение, определяющее спектр частот ее собственных колебаний [8]. Собственные колебания можно рассматри-

Рис. 2. Зависимость максимального инкремента кумулятивной неустойчивости δ_{\max} от расстройки от параметрического резонанса (δ_0 — инкремент неустойчивости при отсутствии резонанса).

вать как наложение собственных волн безграничной системы, удовлетворяющих на концах граничным условиям [7, 8]. Так как решение дисперсионного уравнения и соответствующие собственные волны безграничной системы, взаимодействующей с пучком, можно найти только приближенно, то собственные частоты конечной системы мы будем определять методом возмущений, находя поправки к частоте секции, не взаимодействующей с пучком. Поле в секции в этом случае удобнее представлять в виде суперпозиции волноводных волн, а не собственных колебаний резонатора.

Исходными уравнениями по-прежнему являются уравнения Максвелла для поля в секции и уравнение движения (1). Используя преобразование Лапласа поперечного отклонения x_n по номеру ступки, а электрического и магнитного полей и плотности тока по времени, получим уравнения для их изображений x_ω , $E(\omega)$, $H(\omega)$, $J(\omega)$. Изображения полей и тока задаем бесконечным набором функций $E_l(\omega)$, $H_l(\omega)$, $J_l(\omega)$, определенных в интервале $-(\omega_s/2) \leq \text{Re}(\omega) \leq \omega_s/2$. Представив поля $E_l(\omega)$ и $H_l(\omega)$ в виде суперпозиции собственных волн бесконечного диафрагмированного волновода [9] $E_{s,l}$, $H_{s,l}$

$$H_l(\omega) = \sum_s (C_{s,l} H_{s,l} + C_{-s,l} H_{-s,l}) - \frac{1}{i\omega_l} H_z(0) z_0,$$

$$E_l(\omega) = \sum_s (C_{s,l} E_{s,l} + C_{-s,l} E_{-s,l}) + \frac{4\pi}{i\omega_l} J_{l,z} z_0 - \frac{1}{i\omega_l} E_z(0) z_0, \quad (11)$$

придем к системе четырех уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dz} = \frac{i\omega}{v} x + p, \quad \frac{dp}{dz} = i \frac{\omega}{v} p + \epsilon \frac{k_s}{i} C_l^+,$$

$$\frac{dC_l^+}{dz} = \epsilon k_s^2 x + i(k_l^+ - lk_s) C_l^+ + w_-, \quad \frac{dC_l^-}{dz} = -\epsilon k_s^2 x + i(k_l^- - lk_s) C_l^- - w_+. \quad (12)$$

Здесь

$$x = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_1}} x_\omega e^{i\frac{\omega}{v}z}, \quad p = \frac{dx}{dz} - i\frac{\omega}{v}x, \quad C_i^+ = C_{s'l} e^{i(k_i^+ - l k_s)z},$$

$$C_i^- = C_{-s'l} e^{i(k_i^- - l k_s)z}, \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{e\lambda_s}{\gamma m_0 v \omega_l T_s} \frac{\partial E_{0l}^+}{\partial x} (0),$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{k_s^2} \frac{q}{N_l} \frac{\partial E_{0l}^-}{\partial x} (0), \quad \frac{\partial E_{0l}^+}{\partial x} (0) \equiv \frac{\partial E_{0l}^+}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

При получении (12) мы оставили только члены с номером l , для которых $\omega_l = \omega + l\omega_s$ попадает в полосу пропускания волны EH_{11} , а в их разложении по собственным волнам берем только распространяющиеся волны ($C_{\pm s'l}$) с волновым числом $k_i^\pm(\omega)$ и используем условие синхронизма пучка с волной $C_{\pm s'l}$. E_{0l}^\pm является амплитудой нулевой пространственной гармоники продольной составляющей электрического поля собственных волн $E_{\pm s'l}$. N_l , ω_\pm определены следующим образом:

$$N_{l\pm} = \frac{c}{4\pi} \int_{s_{\pm 1}} \{ [E_{s'l} \mathbf{H}_{-s'l}] - [E_{-s'l} \mathbf{H}_{s'l}] \} z_0 ds,$$

$$\omega_- = \frac{1}{4\pi N_l} \int_{s_{\pm 1}} [\mathbf{H}(0) \mathbf{H}_{-s'l} - \mathbf{E}(0) \mathbf{E}_{s'l}] ds, \quad \omega_+ = \frac{1}{4\pi N_{l'}} \int_{s_{\pm 1}} [\mathbf{H}(0) \mathbf{H}_{s'l} - \mathbf{E}(0) \mathbf{E}_{s'l}] ds,$$

где $\mathbf{H}(0)$ и $\mathbf{E}(0)$ — значения полей в начальный момент времени, интегрирование ведется по поперечному сечению волновода.

Для резонаторной секции длиной L система (12) должна решаться с такими граничными условиями:

$$x(0) = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_1}} x_\omega(0); \quad p(0) = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_1}} \frac{dx_\omega}{dz}(0), \quad C_i^+(0) + C_i^-(0) = 0,$$

$$C_i^+(L) + C_i^-(L) = 0. \quad (13)$$

Собственные колебания определяются однородными уравнениями (12) ($\omega_- = 0$, $\omega_+ = 0$) и однородными граничными условиями ($x(0) = 0$, $p(0) = 0$).

Обозначим через X столбец, составленный из элементов x , p , C_i^+ , C_i^- и через $A(\omega, \bar{\varepsilon})$ матрицу, составленную из коэффициентов при этих величинах в правой части (12). Однородную систему (12) можно записать так:

$$\frac{dX}{dz} = A(\omega, \bar{\varepsilon}) X. \quad (14)$$

При малой связи пучка со структурой решение можно искать методом возмущения, положив

$$X = X^{(0)} + \bar{\varepsilon} X^{(1)} + \dots, \quad \omega_{\alpha i} = \omega_{\alpha i}^{(0)} + \bar{\varepsilon} \omega_{\alpha i}^{(1)} + \dots, \quad \omega_{\alpha} = \omega_{\alpha} - l\omega_s, \quad (15)$$

$\omega_{\alpha i}$ — частота собственных колебаний системы.

В результате получим, что $\omega_{\alpha i}^{(0)} = \omega_{\alpha i}^{(0)'} + i\omega_{\alpha i}^{(0)''}$ является решением уравнений $k_i^{\pm}(\omega_{\alpha}) = \pi\alpha/L$, $k_i^{\pm}(\omega_{\alpha}) = 0$ и совпадает с частотой резонатора с потерями $\omega_{\alpha} + i\beta$. Поправка к $\omega_{\alpha i}^{(0)}$ в первом приближении $\omega_{\alpha i}^{(1)} = 0$, а мнимая часть поправки второго порядка имеет вид

$$\text{Im } \omega_{\alpha i}^{(2)} = -\frac{1}{2} (k_s v_+) (k_s L)^2 \left[\frac{2(\cos \theta' - 1)}{\theta'^3} + \frac{\sin \theta'}{\theta'^2} \right], \quad (16)$$

где $\theta' = \text{Re } \theta$, $\theta = (\omega_{\alpha i}^{(0)}/v) - k_i^+$, v_+ — групповая скорость собственной волны.

Выражение (16) соответствует случаю, когда число ячеек, составляющих ускоряющую секцию, велико и точка синхронизма соответствует колебаниям с большими номерами α .

Ограниченная система является неустойчивой, когда какая-либо из собственных частот расположена в верхней полуплоскости ω [7, 8]. Так как $\omega'' = \omega^{(0)''} + \bar{\varepsilon}^2 \omega^{(2)''}$, $\omega^{(0)''} < 0$, $v_+ < 0$, то это возможно при $\text{ctg } \frac{\theta'}{2} > \frac{2}{\theta'}$ и зна-

чениях коэффициента связи, превышающих пороговое значение ε_n , которое определяется условием

$$\omega^{(0)''} - \varepsilon_n^2 \omega^{(2)''} = 0. \quad (17)$$

Вблизи параметрического резонанса в полосу пропускания попадают члены с двумя значениями l . Так как нас интересует максимальное изменение порогового тока, то ограничимся случаем точного резонанса. Уравнение (14) соответствует теперь системе из шести уравнений

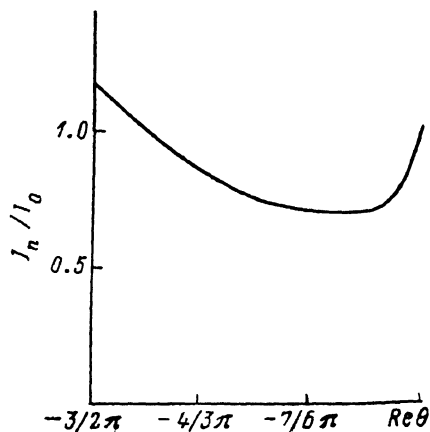
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= i \frac{\omega}{v} x + p, & \frac{dp}{dz} &= i \frac{\omega}{v} p + \varepsilon \frac{k_s}{i} C_i^+ + \varepsilon \frac{k_s}{i} C_{-i}^+, \\ \frac{dC_i^+}{dz} &= \varepsilon k_s^2 x + i(k_i^+ - lk_s) C_i^+, & \frac{dC_{-i}^-}{dz} &= -\varepsilon k_s^2 x + i(k_{-i}^- - lk_s) C_{-i}^-, \\ \frac{dC_{-i}^+}{dz} &= \varepsilon k_s^2 x + i(k_{-i}^+ + lk_s) C_{-i}^+, & \frac{dC_i^-}{dz} &= -\varepsilon k_s^2 x + i(k_i^- + lk_s) C_i^-. \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае

$$\omega_{nl}^{(2)} = \frac{1}{2} (k_s v_+) (k_s L)^2 [-i \operatorname{Re} F_1 \pm \sqrt{(\operatorname{Im} F_1)^2 - |F_2|^2}],$$

$$F_1 = \frac{1}{\theta'^3} [2(e^{i\theta'} - 1) - i\theta'(e^{i\theta'} + 1)], \quad F_2(\theta') = \frac{1}{\theta'^3} [i\theta' e^{i\theta'} - \frac{1}{2}(e^{2i\theta'} - 1)]. \quad (19)$$

Сравнение (19) и (16) показывает, что пороговый ток абсолютной неустойчивости (пропорциональный ε_n^2) уменьшается при резонансе (рис. 3), что согласуется с результатами работы [2].



6. Перейдем к рассмотрению неоднородной системы (12) с неоднородными граничными условиями ($x(0) \neq 0$, $p(0) \neq 0$). Эти решения мы используем для рассмотрения возможности подавления конвективной (кумулятивной) неустой-

Рис. 3. Зависимость порогового тока абсолютной неустойчивости при параметрическом резонансе I_n от набега фазы частицы θ относительно дефокусирующей волны на длине секции (I_0 — минимальный пороговый ток при отсутствии резонанса).

чивости при параметрическом резонансе в ускорителе из неидентичных секций, имеющих $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

Решение будем искать вблизи найденных собственных частот ω_{nl} , которые для неоднородной системы являются особыми точками. Рассмотрим сначала случай отсутствия параметрического резонанса. Обозначив через w столбец $(0, 0, w_-, w_+)$, представим в матричном виде систему (12) и граничные условия

$$\frac{dX}{dz} = A(\omega, \varepsilon) X + w(z, \omega), \quad \alpha_1 X(\omega, L) + \alpha_2 X(\omega, 0) = \beta(\omega). \quad (20)$$

Здесь α_1 — 4×4 матрица, у которой не равны нулю элементы $\alpha_{1(33)} = \alpha_{1(44)} = 1$; α_2 — единичная 4×4 матрица; β — столбец с элементами $x(\omega, 0)$, $p(\omega, 0)$, 0 , 0 . Решение вблизи особой точки ω_{nl} ищем в виде ряда

$$X = \frac{X_{-1}}{\omega - \omega_{nl}} + X_0 + X_1(\omega - \omega_{nl}) + \dots \quad (21)$$

Из (20) получим следующие уравнения для определения X_{-1} , X_0 и т. д.:

$$\frac{dX_{-1}}{dz}(\omega_{\alpha l}) = A(\omega_{\alpha l}, \varepsilon) X_{-1}, \quad \alpha_1 X_{-1}(\omega_{\alpha l}, L) + \alpha_2 X_{-1}(\omega_{\alpha l}, 0) = 0,$$

$$\frac{dX_0}{dz}(\omega_{\alpha l}) = A(\omega_{\alpha l}, \varepsilon) X_0 + \frac{\partial A}{\partial \omega}(\omega_{\alpha l}, \varepsilon) X_{-1} + w(z, \omega_{\alpha l}),$$

$$\alpha_1 X_0(\omega_{\alpha l}, L) + \alpha_2 X_0(\omega_{\alpha l}, 0) = \beta(\omega_{\alpha l}) \quad (22)$$

и т. д. Последовательность уравнений (22) будем решать методом возмущений, раскладывая X_i и $\omega_{\alpha l}$ по степеням малого параметра ε : $X_i = X_i^{(0)} + \varepsilon X_i^{(1)} + \dots$, $\omega_{\alpha l} = \omega_{\alpha l}^{(0)} + \varepsilon \omega_{\alpha l}^{(1)} + \dots$. В результате получим при равных нулю начальных значениях полей

$$X = W \left[I + \frac{\varepsilon}{\omega - \omega_{\alpha l}} \bar{\Theta}(L) + \frac{\varepsilon^2}{\omega - \omega_{\alpha l}} \Theta(z) \bar{\Theta}(L) \right] b^{(0)} + \frac{\varepsilon^2 W B^{(2)}}{\omega - \omega_{\alpha l}}, \quad (23)$$

где W — фундаментальная матрица системы (14), I — единичная матрица, $\Theta(z) = \int_0^z W^{-1}(\partial A/\partial \varepsilon)((\omega_{\alpha l}^{(0)}, 0)W) dz'$, $\bar{\Theta}(L)$ — матрица с неравными нулю элементами

$$\bar{\Theta}_{31} = -\bar{\Theta}_{41} = -\frac{k_+^2 v}{2i} f_{\alpha l}, \quad \bar{\Theta}_{32} = -\bar{\Theta}_{42} = -\frac{k_+^2 v_+}{2i} g_{\alpha l}, \quad f_{\alpha l} = f_{\alpha l}^+ - f_{\alpha l}^-,$$

$$g_{\alpha l} = g_{\alpha l}^+ - g_{\alpha l}^-,$$

$$f_{\alpha l}^- = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}, \quad g_{\alpha l}^- = \frac{e^{i\theta} - i\theta e^{i\theta} - 1}{\theta^2}, \quad \theta = \left(\frac{\omega_{\alpha}}{v} - k_l^+ \right) L,$$

$f_{\alpha l}^+$ и $g_{\alpha l}^+$ получаются из $f_{\alpha l}^-$ и $g_{\alpha l}^-$ заменой k_l^+ на $(-k_l^+)$; $b^{(0)} = [x(\omega_{\alpha l}^{(0)}, 0), p(\omega_{\alpha l}^{(0)}, 0), 0, 0]$; $B_1^{(2)} = B_2^{(2)} = 0$.

Выражение (23) определяет все 4 составляющие вектора X в произвольной точке сечения z как функцию поперечного отклонения $x(\omega_{\alpha l}^{(0)}, 0)$ и поперечной скорости $p(\omega_{\alpha l}^{(0)}, 0)$ на входе в сечение. Не делая значительной ошибки, в начальных значениях x и p можно заменить $\omega_{\alpha l}^{(0)}$ на ω . Переходя затем к двумерным векторам

$\begin{pmatrix} x_w(z) \\ p_w(z) \end{pmatrix}$, $p_w(z) = (dx_w)/(dz)$, которые соответствуют двум первым компонентам, получим из (23) следующее соотношение, связывающее Фурье-образы поперечных отклонений и скоростей на выходе и входе в сечение,

$$\begin{pmatrix} x_w(L) \\ p_w(L) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_w(0) \\ p_w(0) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где матрица G определяется таким выражением:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon^2 L k_+^3 v_+}{2(\omega - \omega_{\alpha l})} a_{11} & L + \frac{\varepsilon^2 L k_+^3 v_+}{2(\omega - \omega_{\alpha l})} a_{12} \\ \frac{\varepsilon^2 L k_+^3 v_+}{2(\omega - \omega_{\alpha l})} a_{21} & 1 + \frac{\varepsilon^2 L k_+^3 v_+}{2(\omega - \omega_{\alpha l})} a_{22} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$a_{11} = -f_{\alpha l} g_{\alpha l}^- + L f_{\alpha l} f_{\alpha l}^-, \quad a_{12} = -g_{\alpha l} g_{\alpha l}^- + L g_{\alpha l} f_{\alpha l}^-, \quad a_{21} = f_{\alpha l} f_{\alpha l}^-, \quad a_{22} = g_{\alpha l} f_{\alpha l}^-.$$

Матрица $G(\omega)$ является матрицей передачи и ее элементы представляют коэффициенты передачи гармонического входного сигнала вблизи собственной частоты $\omega_{\alpha l}$. Матрица передачи резонаторной сечения использовалась ранее для рассмотрения кумулятивной неустойчивости в работе [10], ее элементы для токов, меньших пороговых, были получены там применением преобразования Фурье к импульсным переходным функциям резонаторной сечения, вычисленным на основании результатов работы [11]; результирующая матрица многосекционного ускорителя получалась перемножением матриц одиночной сечения.

Рассмотрим регенеративный режим работы сечения при токах, близких к пороговому. С приближением тока к его пороговому значению коэффициент передачи на частоте $\omega = \text{Re } \omega_{\alpha l}$ резко возрастает и при $\varepsilon = \varepsilon_n$ обращается в бесконеч-

ность. В системах, в которых существует нелинейный механизм ограничения роста амплитуды, при токах, больших порогового, устанавливается конечное значение амплитуды, не зависящее от величины входного сигнала (режим генерации). В нашем случае такой нелинейный механизм отсутствует, а рост амплитуды поперечного отклонения ограничен апертурой секции, при достижении которой происходит потеря тока. Очевидно, что при достаточно больших длительностях импульса критический ток, при котором поперечное отклонение превосходит апертуру секции, будет несколько меньше порогового, так как стационарное значение отклонения при $\varepsilon = \varepsilon_0$ стремится к бесконечности.

7. Матрица передачи $G(\omega)$ позволяет по-другому подойти к результатам, полученным выше для кумулятивной неустойчивости. Очевидно, что собствен-

ным решениям для последовательности идентичных секций (5)–(8) будут соответствовать собственные векторы матрицы $G(\omega)$, определяемые уравнением

$$G(\omega) \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \quad (26)$$

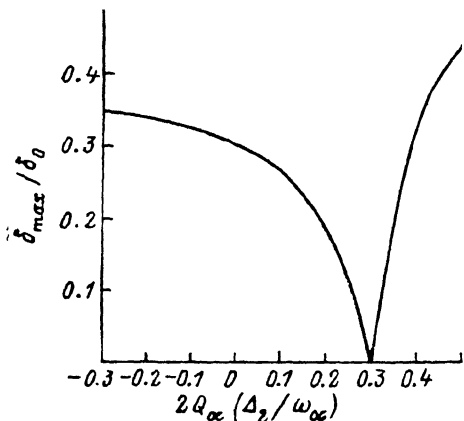


Рис. 4. Зависимость максимального инкремента кумулятивной неустойчивости δ_{\max} в ускорителе с чередующимися секциями с различной расстройкой от параметрического резонанса Δ_1 и Δ_2 от расстройки Δ_2 при $2Q_\alpha (\Delta_1/\omega_\alpha) \approx -0.3$ (δ_0 — инкремент неустойчивости при отсутствии резонанса).

Представим $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ и λ в виде разложений

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1, \quad (27)$$

получим $\lambda_0 = 1$, $x_0 = 1/\sqrt{2}$, $p_0 = 0$,

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{L^2 k_s^3 v_+ a_{21}}{2(\omega - \omega_\alpha^{(q)})}}, \quad x_1 = 0, \quad p_1 = \frac{\lambda_1 x_0}{2},$$

$$\lambda = \exp \left[\pm i \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega - \omega_\alpha^{(q)}}} \sqrt{\frac{k_s^3 |v_+| a_{21}}{2}} L \right] = e^{i \left(k - \frac{\omega}{v} \right) L}. \quad (28)$$

В случае параметрического резонанса собственные значения λ по-прежнему определяются формулой (28), в которой k дается выражением (10).

Возникновению абсолютной неустойчивости соответствует переход особой точки $G(\omega)$, в которой λ обращается в бесконечность в верхнюю полуплоскость. Так как в первое приближение (28) входит невозмущенное значение собственной частоты $\omega_\alpha^{(0)}$ с отрицательной мнимой частью, чтобы подойти к пороговому току, то нужно использовать приближения более высокого порядка.

С другой стороны, легко убедиться, что даваемая выражением (28) постоянная распространения соответствует приближению «тонких линз», используемому для описания кумулятивной неустойчивости в многосекционных ускорителях [3–5]. Действительно, в этом приближении учитывают только изменение поперечной скорости сгустка под действием возбуждаемого в секции поля. Матрица G принимает вид (при замене ω_α на $\omega_\alpha^{(0)}$)

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{\varepsilon^2 L k_s^3 v_+}{2(\omega - \omega_\alpha^{(0)})} a_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

и ее собственные значения совпадают с (28). Границы применимости приближения «тонких линз» определяются, таким образом, областью токов, в которой справедливо первое приближение в (27).

8. Рассмотрим многосекционный ускоритель, состоящий из чередующихся секций с различными величинами расстройек от параметрического резонанса Δ_1 и Δ_2 , описываемых матрицами G_1 и G_2 . Для нахождения инкремента неустойчивости в такой системе необходимо найти собственные значения матрицы $G_1 G_2$. Учитывая, что $|k|L \ll 1$, после соответствующих вычислений получим

$$\lambda = \exp \left[\pm 2iL \sqrt{\frac{\left(k_1 - \frac{\omega}{v}\right)^2 + \left(k_2 - \frac{\omega}{v}\right)^2}{2}} \right], \quad (29)$$

где k_1 и k_2 определяются из (10) и соответствуют расстройкам Δ_1 и Δ_2 .

Пользуясь (29), легко определить пространственный инкремент неустойчивости. Видно, что при $\Delta_2 = -\Delta_1$ инкремент равен нулю. Результаты расчета инкремента неустойчивости при невыполнении этого условия приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что подавление неустойчивости имеет место в широком диапазоне расстройек. Поэтому требуемая для подавления неустойчивости точность настройки секций является существенно менее жесткой, чем при использовании параметрического резонанса в идентичных секциях. Например, выбирая Δ_2/β в пределах от 0 до 0,4, можно обеспечить уменьшение пространственного инкремента более чем в 3 раза. Требуемая для этого точность настройки секций по отношению к параметрическому резонансу при $Q_\alpha = 5 \cdot 10^3$ составляет 160 кГц (вместо 60 кГц для идентичных секций).

Таким образом, проведенный на основании полученных дисперсионных соотношений анализ показал, что использование параметрического резонанса, хотя и снижает несколько пороговый ток абсолютной неустойчивости в одиночной секции, позволяет эффективно ослаблять кумулятивную неустойчивость в многосекционных ускорителях. Требования к точности настройки идентичных секций в резонанс значительно уменьшаются при чередовании секций с положительной расстройкой относительно параметрического резонанса и могут быть легко выполнены на практике.

Авторы благодарны Н. И. Айзацкому за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Курилко В. И. // ЖТФ. 1968. Т. 38. Вып. 1. С. 118—127.
- [2] Масунов Э. С., Смирнов А. В. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Техника физического эксперимента. 1984. № 1 (18). С. 38—41.
- [3] Ratofsky W. K. H., Bander M. // Rev. Sci. Instr. 1968. Vol. 39. N 2. P. 206—212.
- [4] Курилко В. И., Толстолужский А. П. // Атомная энергия. 1970. Т. 28. № 6. С. 498
- [5] Gluckstern R. L., Cooper R. K., Channell P. J. // Particle Accelerators. 1985. Vol. 16. N 3. P. 125—153.
- [6] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 287 с.
- [7] Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
- [8] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [9] Вайнштейн Л. А. // ЖТФ. 1953. Т. 23. Вып. 4. С. 654—666.
- [10] Мондрус И. Н. // Атомная энергия. 1978. Т. 45. № 2. С. 124.
- [11] Крамской Г. Д., Курилко В. И., Шендрик В. А. // УФЖ. 1972. Т. 17. № 10. С. 1600—1608.

Харьковский физико-технический
Институт АН УССР

Поступило в Редакцию
13 июня 1989 г.
В окончательной редакции
3 марта 1990 г.