

01; 07

© 1990 г.

ТЕОРИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ОБЪЕМНЫМИ ГОЛОГРАММАМИ

В. М. Сердюк

На основе приближения медленно меняющихся амплитуд теоретически рассматривается задача дифракции света на объемной голографической решетке с учетом регулярной пространственной неоднородности записывающих и считывающих полей. В предположении малости углов преломления записывающих пучков получено приближенное аналитическое решение уравнений Такаги для амплитуд дифракционных полей, явно зависящих от координат, которое позволяет рассчитать локальные интенсивности и фазы в их поперечном сечении, а также оценить искажения регулярной структуры объектного пучка при восстановлении. В рамках геометрической оптики рассмотрены частные случаи объемных голограмм гауссовых пучков и модулированных по амплитуде и фазе гауссовых пучков.

1. Реальные световые пучки, несущие оптическую информацию о каком-либо объекте, пространственно неоднородны, причем эта неоднородность включает регулярную компоненту, определяемую крупномасштабными неоднородностями рельефа объекта и коэффициента отражения (пропускания) его поверхности (материала), а также нерегулярную составляющую, обусловленную статистическими причинами, например мелкомасштабными неоднородностями поверхности объекта и диффузным отражением от нее [1]. Для изучения эффектов пространственной неоднородности световых полей, которая не учитывалась в классической теории Когельника [2], обычно используется теоретическая модель пучка в виде спектра пространственных частот, т. е. суперпозиции большого числа плоских волн [3-5]. Однако такой подход связан с очень громоздкими вычислениями, не позволяющими получить конкретные результаты без упрощающих предположений о малой расходимости светового пучка и некоррелированности (статистической ортогональности) объектного поля и его искажений при восстановлении. Последнее предположение исключает из рассмотрения регулярные искажения крупномасштабных неоднородностей светового пучка, коррелированные с его структурой, и позволяет рассчитать только нерегулярные искажения поля мелкомасштабного характера.

Другой моделью процесса голографического восстановления световых пучков послужила так называемая двумерная теория объемных голограмм [6, 7], в которой неоднородный пучок описывается аналитической амплитудно-фазовой функцией, явно зависящей от пространственных координат. Однако и здесь серьезные математические трудности не позволили получить в явном виде обзорное аналитическое решение дифракционной задачи.

В данной работе на основе обобщения теории связанных волн Когельника теоретически исследуется процесс восстановления световых полей с регулярной пространственной неоднородностью объемными голографическими решетками. В отличие от двумерной теории [6, 7] здесь используется метод асимптотического представления решения дифракционной задачи, что позволяет приближенно записать пространственную структуру дифракционных полей в явном виде.

2. Пусть при записи голограммы на регистрирующую среду с плоскими границами $z=0$ и $z=l$ падают два световых пучка: объектный $a_0(x) \exp(-i\omega_0 t +$

$+ik_S r$) и опорный $a_R(r) \exp(-i\omega_0 t + ik_R r)$, плоскости падения которых совпадают (рис. 1) ($k_S = k_R^2 = k^2 = (\omega_0 n/c)^2$, где n — показатель преломления среды). Амплитуды пучков можно представить в виде $a_{S,R} = u_{S,R} I_{S,R}^{1/2} \exp(i\varphi_{S,R})$, где I и φ — локальные интенсивность и начальная фаза, u — единичный вектор поляризации ($|u|^2 = 1$). Они считаются медленными функциями пространственных координат в сравнении с быстрыми изменениями фазы (k_S, R) и должны удовлетворять параболическому волновому уравнению [8], а также включать экспоненциальный множитель, определяемый поглощением светочувствительного материала. Пренебрегая незначительными для дальнейшего явлениями

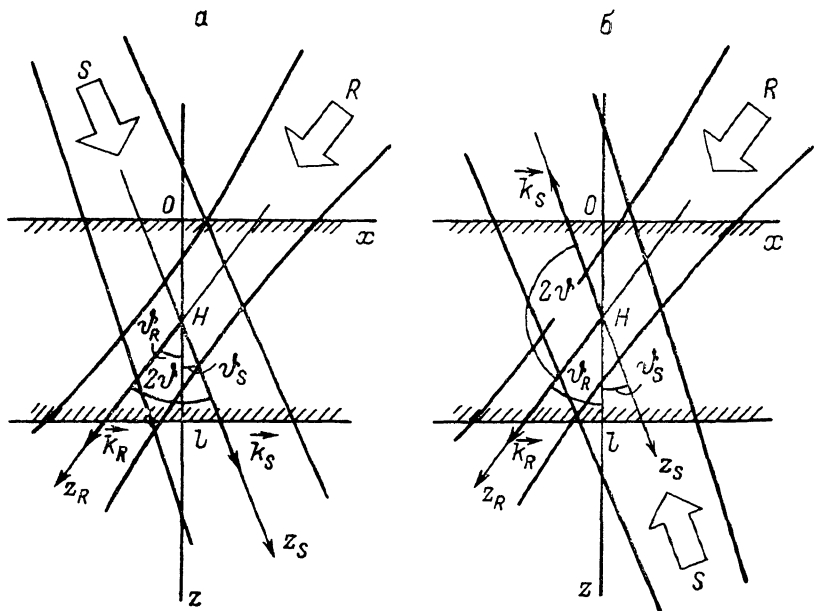


Рис. 1. Просветная (а) и отражательная (б) объемные голограммы пространственно неоднородных световых пучков (S — объектный пучок, R — опорный пучок).

отражения и преломления на границах среды, предположим, что в результате воздействия записывающего поля и последующей обработки материала в среде возникает объемная решетка диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(r) = n^2 (1 + \alpha |a_S e^{ik_S r} + a_R e^{ik_R r}|^2) = n^2 (1 + \tau + 2\mu \cos[(k_S - k_R) r + \delta]), \quad (1)$$

где $\tau = \alpha (I_S + I_R)$ — некогерентная добавка, пропорциональная сумме интенсивностей записывающих пучков, $\mu = \alpha |a_S a_R^*| = \alpha (I_S I_R)^{1/2} |u_S u_R^*|$ — амплитуда решетки, α — малая (вообще говоря, комплексная) постоянная, $\delta = \varphi_S - \varphi_R + \arctg \{ \text{Im}(u_S u_R^*) / \text{Re}(u_S u_R^*) \}$.

При считывании голограммы (1) пусть на нее падает опорный считывающий пучок $A_{R0}(r) \exp(-i\omega t + ik_R r)$ ($K_R^2 = K^2 = (n\omega/c)^2$, $A_{R0} = I_{AR}^{1/2} \exp(i\Phi_R)$), направление распространения и частота которого, вообще говоря, отличаются от направления и частоты опорного пучка при записи. Вектор амплитуды считывающего поля $A_{R0}(r)$ также считается медленной функцией r , удовлетворяющей параболическому волновому уравнению. В голограмме (1) это поле возбуждает восстановленный объектный пучок $A_S(r) \exp(-i\omega t + ik_S r)$, $K_S = K_R + (k_S - k_R)$, амплитуда которого A_S вместе с амплитудой считывающего опорного пучка A_R будет меняться по глубине голограммы вследствие дифракции на решетке (1), приводящей к перекачке энергии от одного пучка к другому [2-8]. Для небольших углов схождения пучков 2ϑ ($2 \sin^2 \vartheta \ll 1$) поляризационными эффектами в голограмме можно пренебречь и считать, что поляризация восстановленного поля воспроизводит поляризацию считывающего пучка. В предположении малости амплитуды решетки $|\mu|$ по сравнению с еди-

ницей, которое соответствует предположению о медленном характере изменения амплитуд по глубине голограммы (1), из уравнений Максвелла получаются следующие дифференциальные уравнения для амплитудных функций $A_{R, S}$ [6, 7]:

$$\frac{\partial A_R}{\partial z_R} = i \frac{K}{2} \{A_R \tau + A_S \mu e^{-i\delta}\}, \quad \frac{\partial A_S}{\partial z_S} = i \frac{K}{2} h \{A_S (\tau + 2\beta) + A_R \mu e^{i\delta}\}, \quad (2)$$

где $z_R = z \cos \vartheta_R + (H \operatorname{tg} \vartheta_R - x) \sin \vartheta_R$, $z_S = z \cos \vartheta_S + (H \operatorname{tg} \vartheta_S + x) \sin \vartheta_S$ — лучевые координаты дифракционных пучков (рис. 1), $\vartheta_{R, S}$ — их углы преломления в голограмме; $h=1$ для просветной голограммы (рис. 1, а) и $h=-1$ для отражательной голограммы (рис. 1, б); $\beta = (1 - K_s^2/K^2)/2 = 2(k/K) \sin \vartheta \{\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) - (h/K) \sin \vartheta\}$ — параметр фазового рассогласования, ϑ — половина угла схождения записывающих пучков, $\Delta\vartheta$ — увеличение угла преломления опорного пучка при считывании.

В динамической теории рассеяния рентгеновских лучей [9] уравнения типа (2) известны как уравнения Такаги [10]. Если пренебречь пространственной неоднородностью световых полей и считать A_{R0} , τ , μ и δ не зависящими от координат, то эти уравнения перейдут в классические уравнения Когельника, решение которых не вызывает трудностей [2]. Однако решение более общих уравнений Такаги до сих пор удавалось записать в явном виде только с помощью функций Грина [6, 7, 9]. Ниже предлагается другой, приближенный метод построения решений этих уравнений в виде асимптотических рядов по степеням величин $\operatorname{tg} \vartheta_R$, $\operatorname{tg} \vartheta_S$ в предположении малости углов преломления пучков ϑ_R и ϑ_S .

Введем функции $F(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial z_S} = \frac{K}{2} \mu \sqrt{\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R}} e^{2v}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_R} = \frac{K}{2} \mu \sqrt{\frac{\cos \vartheta_R}{\cos \vartheta_S}} e^{-2v}, \quad F(x, y, b) = 0, \quad (3)$$

где $b=0$ для просветной голограммы и $b=l$ для отражательной голограммы.

С точностью до членов первого порядка малости по $\operatorname{tg} \vartheta_R$, $\operatorname{tg} \vartheta_S$

$$F(x, y, z) = \frac{K}{2 \sqrt{\cos \vartheta_S \cos \vartheta_R}} \left(\int_b^z \mu dz + \frac{\operatorname{tg} \vartheta_R - \operatorname{tg} \vartheta_S}{2} \int_b^z dz' \int_b^{z'} \frac{\partial \mu}{\partial x} dz'' \right), \quad (4)$$

$$v(x, y, z) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_R + \operatorname{tg} \vartheta_S}{4\mu} \int_b^z \frac{\partial \mu}{\partial x} dz. \quad (5)$$

Тогда подстановка

$$A_R = B_R \frac{A_{R0}}{B_{R0}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2v_0}{\operatorname{ch} 2v}} \exp(iG + P + v - v_0),$$

$$A_S = B_S \frac{A_{S0}}{B_{S0}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2v_0 \cos \vartheta_R}{\operatorname{ch} 2v \cos \vartheta_S}} \exp(iG + P - v - v_0 + i\delta),$$

где $v_0 = v(x, y, 0)$, $B_{R0} = B(x, y, 0)$,

$$P = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_R - \operatorname{tg} \vartheta_S}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{\ln(A_{R0}/B_{R0})\} z + O(\operatorname{tg}^2 \vartheta_{S, R}),$$

$$G(x, y, z) = \frac{K}{2 \cos \vartheta_S} \int_0^z \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R} + h \right) \left(\tau + \frac{\operatorname{tg} \vartheta_R - \operatorname{tg} \vartheta_S}{2} \int_0^{z'} \frac{\partial \tau}{\partial x} dz'' \right) + \left(\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R} - h \right) \frac{\tau}{2} \operatorname{th} 2v \right\} dz' + \frac{1}{\cos \vartheta_S} \int_0^z \frac{K\beta h - \partial \delta / \partial z_S}{1 + \exp(4v)} dz + O(\operatorname{tg}^2 \vartheta_{S, R}), \quad (6)$$

позволяет свести уравнения (2) к уравнениям

$$\frac{\partial B_R}{\partial z_R} = i \frac{K}{2} \mu \sqrt{\frac{\cos \vartheta_R}{\cos \vartheta_S}} e^{-2\nu} \{-B_R(w - i\Delta w) + B_S\}, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial B_S}{\partial z_S} = i \frac{K}{2} \mu \sqrt{\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R}} e^{2\nu} \{B_S(w - i\Delta w) + hB_R\}, \quad (7b)$$

где

$$w(x, y, z) = \frac{1}{\mu \operatorname{ch} 2\nu} \sqrt{\frac{\cos \vartheta_R}{\cos \vartheta_S}} \left\{ \beta h - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R} - h \right) - \frac{1}{K} \frac{\partial \delta}{\partial z_S} - \frac{2i}{K} \frac{\partial \nu}{\partial z_S} + \right. \\ \left. + (\operatorname{tg} \vartheta_R + \operatorname{tg} \vartheta_S) \left[i \frac{\cos \vartheta_S}{K} \frac{\partial}{\partial x} (\ln A_{R0}) - \frac{1}{4} \left(\frac{\cos \vartheta_S}{\cos \vartheta_R} + h \right) \int_0^z \frac{\partial \tau}{\partial x} dz \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\Delta w(x, y, z) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_R + \operatorname{tg} \vartheta_S}{K \mu \operatorname{ch} 2\nu} \sqrt{\cos \vartheta_R \cos \vartheta_S} \frac{\partial}{\partial x} (\ln B_{R0}) + O(\operatorname{tg}^2 \vartheta_S, R).$$

При выполнении условий

$$|\Delta w(x, y, H) F_H| \ll 1, \quad \frac{1}{K} \left| \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=H} F_H^2 \right| \ll 1, \quad F_H = F(x, y, H), \quad (9a)$$

$$\left| \operatorname{tg} \vartheta_S \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{z=H} F^3 \right| \ll K |\mu|_{\max}; \quad 2 \left| \operatorname{tg} \vartheta_R \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{z=H} F^2 \right| \ll K |\mu|_{\max} \quad (9b)$$

в уравнениях (7) можно приближенно считать $\Delta w \approx 0$, $w(x, y, z) \approx w(x, y, H)$ и пренебречь производной $\partial w(x, y, H)/\partial x$. Физический смысл данного приближения состоит в том, что вместо истинного значения некогерентной добавки диэлектрической проницаемости τ (точнее, величины $(\beta + \tau)/\mu$) для всего объема голограммы берется ее значение в плоскости пересечения осей пучков $z=H$ (рис. 1). Математически такое приближение обосновывается разложением функций w и Δw в асимптотические ряды Тейлора по F_H и поиском решений уравнений (7) B_R, B_S также в виде асимптотических разложений по F_H и F , где первые члены этих разложений определяются из (7) при условии, что $w = w(x, y, H)$, $\Delta w = 0$, $\partial w/\partial x \approx 0$, $\partial B_{R0}/\partial x \approx 0$. Условия (9) при этом позволяют пренебречь всеми членами искомых асимптотических разложений выше первого. Тем самым уравнения (7) с помощью (3) фактически сводятся к дифференциальным уравнениям относительно переменной F , решения которых

$$B_R = \cos(F \sqrt{\xi^2 + h}) - \frac{i\xi}{\sqrt{\xi^2 + h}} \sin(F \sqrt{\xi^2 + h}), \quad B_S = ih \frac{\sin(F \sqrt{\xi^2 + h})}{\sqrt{\xi^2 + h}},$$

где $\xi = w(x, y, H)$ (8).

Тогда решение дифракционной задачи на выходе просветной голограммы запишется в виде

$$A_R(x, y, l) = \frac{A_{R0}(x, y, 0)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\nu_l}} \left\{ \cos(F \sqrt{1 + \xi^2}) - \frac{i\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \sin(F \sqrt{1 + \xi^2}) \right\} \times \\ \times \exp(iG_l + P_l + \nu_l), \quad (10a)$$

$$A_S(x, y, l) = i \frac{A_{R0}(x, y, 0)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\nu_l}} \sqrt{\frac{\cos \vartheta_R}{\cos \vartheta_S}} \frac{\sin(F \sqrt{1 + \xi^2})}{\sqrt{1 + \xi^2}} \exp(iG_l + P_l + i\delta - \nu_l) \quad (10b)$$

и на выходе отражательной голограммы

$$A_R(x, y, l) = A_{R0}(x, y, 0) \sqrt{\operatorname{ch} 2\nu_0} \left\{ \operatorname{ch}(F \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{i\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sh}(F \sqrt{1 - \xi^2}) \right\}^{-1} \times \\ \times \exp(iG_l + P_l - \nu_0), \quad (11a)$$

$$A_S(x, y, 0) = i A_{R0}(x, y, 0) \sqrt{\frac{\cos \vartheta_R}{\cos \vartheta_S}} \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{cth}(F \sqrt{1 - \xi^2}) + i\xi \right\}^{-1} \exp(i\delta - 2\nu_0), \quad (11b)$$

где $v_l = v(x, y, l)$, $v_0 = v(x, y, 0)$; $F = hF(x, y, l - b)$, $G_l = G(x, y, l)$, $P_l = (\operatorname{tg} \vartheta_R - \operatorname{tg} \vartheta_S) \{ \partial (\ln A_{R0}) / \partial x \} l / 2$.

Полученные решения (10, 11), хотя и напоминают известные решения Когельника [2], но существенно отличаются от них тем, что все входящие в (10), (11) параметры, за исключением углов ϑ_R , ϑ_S , зависят от координат x и y . Другими словами, решения (10), (11) определяют не интегральные характеристики дифракционных полей, как у Когельника, а их локальные интенсивности и фазы в каждой точке выходной плоскости голограммы. Дальнейшее распространение дифракционных пучков за голограммой на небольших расстояниях может быть описано в геометрооптическом приближении, для которого распределение интенсивности и фазы в поперечном сечении каждого пучка также будет даваться выражениями (10) или (11) при условии замены $x \rightarrow \{x + (z - l) \times \operatorname{tg} \vartheta_R\}$ у опорного и $x \rightarrow \{x - (z + b - l) \operatorname{tg} \vartheta_S\}$ у объектного поля. Однако на больших расстояниях от голограммы для расчета поперечной структуры дифракционных пучков необходимо использовать дифракционный интеграл Френеля [8].

Следует отметить, что при выводе решения (10), (11) не использовался явный вид функций $I_{S, R}(x, y, z)$, $\varphi_{S, R}(x, y, z)$, поэтому данное решение справедливо при достаточно общих предположениях относительно зависимости амплитуд и фаз записывающих пучков от пространственных координат, которые должны только удовлетворять условиям (9). В частности, здесь может учитываться их изменение по глубине голограммы вследствие поглощения и самодифракции [11].

В формулах (10), (11) параметр F (4) имеет смысл локальной силы голограммы, а параметр $\xi = \omega(x, y, H)$ (8) — обобщенной брэгговской расстройки. Последний оказывается комплексным, причем фазовая расстройка β и слагаемые с производными $\partial v / \partial z_S$, $\partial (\ln A_{R0}) / \partial x$ входят в действительную и мнимую части ξ по отдельности. Отсюда следует, что фазовая расстройка β не может компенсировать расстройки, вызываемой пространственной неоднородностью записывающих и считывающих пучков, которая, естественно, снижает интенсивность восстановленного поля. Физически это означает, что никаким изменением частоты и направления распространения считывающего пучка нельзя добиться равенства нулю брэгговской расстройки по всему поперечному сечению восстановленного объектного пучка. Однако таким путем можно уменьшить негативную роль хотя бы одной, действительной или мнимой, части брэгговской расстройки с тем, чтобы интенсивность этого пучка в целом достигала максимально возможного значения. Именно в этом смысле следует говорить о брэгговском считывании объемных голограмм пространственно неоднородных световых полей. Для нахождения условий такого считывания рассмотрим среднюю по сечению расстройку

$$\xi_M = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, y) \mu^2(x, y, H) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2(x, y, H) dx \right)^{-1}, \quad (12)$$

где усреднение проводится с учетом дифракционного вклада каждой точки поперечного сечения. Брэгговское считывание объемной голограммы будет отвечать такому значению β , при котором действительная (для фазовой голограммы, $\operatorname{Im} \alpha = 0$) или мнимая (для амплитудной голограммы, $\operatorname{Re} \alpha = 0$) часть (12) равна нулю. Полуширина брэгговского пика $\Delta\beta$, характеризующая селективные свойства объемной голограммы в целом по частоте и направлению распространения считывающего пучка [11], также может быть приближенно оценена с помощью средней брэгговской расстройки ξ_M (12). Она равна разности значений β , отвечающих первому минимуму интенсивности восстановленного поля и брэгговскому максимуму, причем первое значение β_{\min} по аналогии со случаем плоских волн [11] может быть определено из условия $\xi_M(\beta_{\min}) = \{(\pi/FM)^2 - h\}^{1/2}$, где средняя сила голограммы F_M равна

$$F_M = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, l - b) \mu^2(x, y, H) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2(x, y, H) dx \right)^{-1}.$$

3. Исследуем полученное выше решение дифракционной задачи применительно к световым пучкам с гауссовым распределением интенсивности в поперечном сечении. Пусть записывающие и считывающие поля представляют собой гауссовы пучки одинакового радиуса σ

$$I_R(x, z) = I_{Rm} \exp \left\{ -2p_R z - 2 \left[x \cos \vartheta + \left(z - \frac{l}{2} \right) \sin \vartheta \right]^2 / \sigma^2 \right\}, \quad \varphi_R = \text{const},$$

$$I_{AK}(x) = I_{Rm} \exp \left\{ -2 \left(x \cos \vartheta - \frac{l}{2} \sin \vartheta \right)^2 / \sigma^2 \right\}, \quad \Phi_R = \text{const}$$

($H = l/2$), поляризованные перпендикулярно общей плоскости падения ($u_S u_R^+ = 1$), причем нормально падающий на голограмму объектный пучок промодулирован по амплитуде и фазе

$$I_S(x, z) = I_{Rm} u^2(x) \exp \{ 2p_S(b-z) - 2x^2/\sigma^2 \}, \quad \varphi_S = \varphi_S(x), \quad (13)$$

что соответствует прохождению этого пучка перед голограммой через амплитудно-фазовый транспарант (зависимость от координаты y не играет существенной роли и ее можно не учитывать). Предполагается, что в пределах голограммы пучки можно рассматривать в геометрикооптическом приближении, т. е. что $l \ll \sigma^2$. Предполагается также, что при записи голограммы самодифракция пучков не имеет места, но присутствует поглощение $p_R \approx p = kx(\omega_0)/n$, $p_S = \approx h\rho$ (x — коэффициент поглощения), которое для считывающего излучения становится пренебрежимо малым $x(\omega) = 0$. Тогда при $(l \sin \vartheta / 2\sigma)^2 \ll 1$ выражения (4)–(6), (8) для параметров дифракционных полей (10), (11) запишутся следующим образом:

$$v = h \frac{\text{tg } \vartheta}{4} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{4x}{\sigma^2} \right) \frac{e^{2\chi l} - 1}{2\chi}, \quad v_H = h \frac{\text{tg } \vartheta}{4} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{4x}{\sigma^2} \right) \frac{e^{\chi l} - 1}{2\chi}, \quad (14a)$$

$$F = \frac{K\mu_H}{2} \frac{\text{sh } \chi l}{\chi} (1 + v e^{-\chi l/2}), \quad \mu_H = \alpha I_{Rm} u e^{-p l - 2x^2/\sigma^2}, \quad (14б)$$

$$\xi = \frac{1}{\text{ch } 2v_H} \left\{ \frac{\beta h}{\mu_H} + \frac{h-1}{2} \frac{u^2+1}{u} - \frac{1+h}{2} \text{tg } \vartheta \left[\frac{du}{dx} - \frac{2ux}{\sigma^2} - \frac{2x}{u\sigma^2} \exp \left(\frac{x l}{\sigma^2} \sin \vartheta \right) \right] \frac{l}{2} \times \right. \\ \left. \times e^{p l/2} - \frac{i}{K\mu_H} \left(h \frac{\partial v_H}{\partial l} - \frac{P_l}{l} \right) \right\}, \quad P_l = -\frac{\text{tg } \vartheta}{\sigma^2} \left(x - \frac{l \sin \vartheta}{2} \right) l, \quad (14в)$$

$$G_l = \frac{K\mu_H}{2} \left\{ \frac{1+h}{2} \left[\frac{1}{u} \frac{\text{sh}(\chi + x \sin \vartheta/\sigma^2) l}{\chi + x \sin \vartheta/\sigma^2} \left(1 - \frac{x l}{\sigma^2} \text{tg } \vartheta \right) + u \frac{\text{sh } p l}{p} \left(1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{2x}{\sigma^2} \right) \frac{l}{2} \text{tg } \vartheta \right) \right] + (1-h) \frac{1+u^2}{u} v_H \right\} + \frac{K\beta h l}{2} (1 - v e^{-\chi l/2}), \quad (14г)$$

где $v = v(x, l-b)$, $\chi = p(1+h)/2 + hx \sin \vartheta/\sigma^2$.

Условия (9) применимости приближенных решений (10), (11) примут вид

$$\frac{|F\xi|}{4} \left\{ \frac{1+h}{2} \left(pl + |u \text{tg } \vartheta| \frac{l}{2\Delta} \right) + \frac{l}{\sigma} |\sin \vartheta| \right\} \ll 1, \\ |F\xi| \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{4}{\sigma} \right) l |\text{tg } \vartheta| \ll 1, \quad \frac{1-h}{8} |F|^2 \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{4}{\sigma} \right) l |\text{tg } \vartheta| \ll 1,$$

где $\Delta \sim |u|(du/dx)$ — характерный масштаб изменения функции амплитудной модуляции u вдоль оси x .

Фазовая модуляция объектного пучка $\varphi_S(x)$ при его нормальном падении на голограмму практически не влияет на распределение интенсивности в поперечном сечении дифракционных полей (10), (11), (14) и не вызывает каких-либо искажений пространственной структуры объектного поля на этапе восстановления. В соответствии с определением средней брэгговской расстройки (12) условием брэгговского считывания фазовой просветной и амплитудной голограмм здесь будет условие $\beta = 0$, фазовой отражательной голограммы — условие $\beta = -\alpha I_{Rm} \exp(-pl)/\sqrt{2}$, а полуширина брэгговского пика для фазовой голограммы оказывается равной $\Delta\beta = \{3(\lambda/l)^2 - 2h(\alpha I_{Rm})^2 u_{\text{max}}^2 \exp(-2pl)\}^{1/2}/2$,

что примерно в $2/\sqrt{3}$ раза меньше полуширины брэгговского пика фазовой голограммы плоских волн [11] при прочих равных условиях.

На рис. 2 приведены результаты расчетов распределения интенсивностей дифракционных пучков и дополнительного набега фазы восстановленного объектного пучка $\Delta\Phi = \arctg(\text{Im} A_S / \text{Re} A_S) - \pi/2$ в выходной плоскости голограммы по формулам (10), (11), (14) в частном случае $\vartheta = 10^\circ$, $\rho\sigma = 1/2$, $K\alpha I_{Rm} u \sigma = \pi$ и $u = 1/3$, т. е. когда объектный пучок при записи является чисто гауссовым. Здесь обращает на себя внимание сильная неоднородность распределения фазы в поперечном сечении восстановленного пучка, которая обуслов-

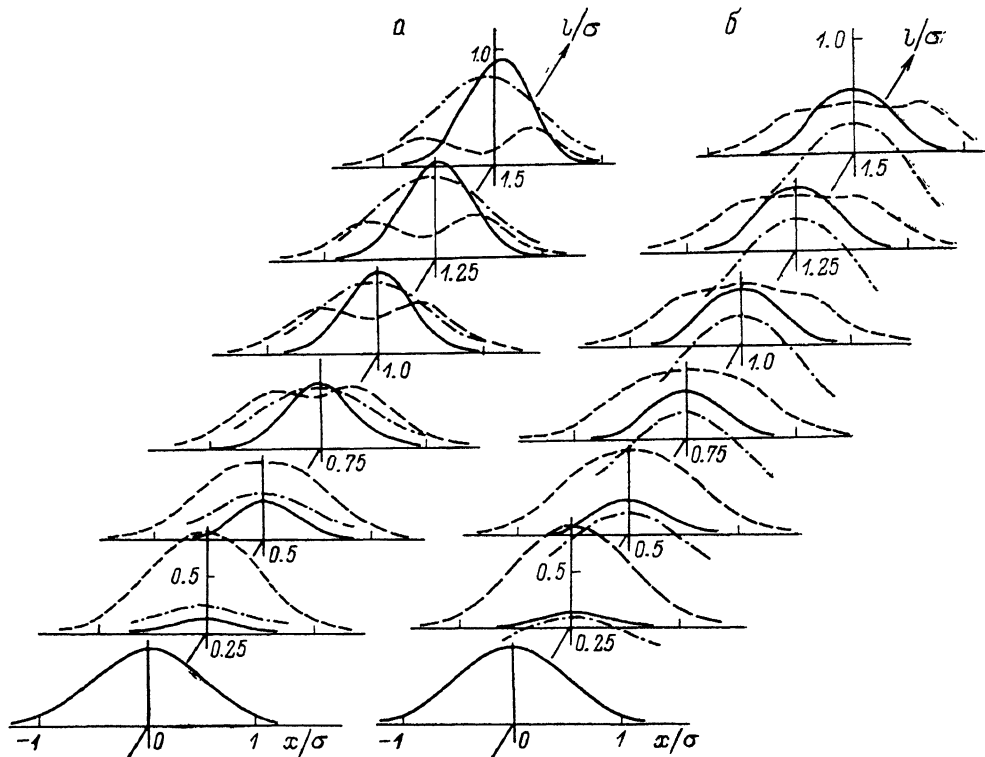


Рис. 2. Распределение локальных интенсивностей объектного $|A_S|^2 / I_{Rm}$ (сплошные кривые) и опорного $|A_R|^2 / I_{Rm}$ (штриховые кривые) дифракционных пучков, а также дополнительного набега фазы объектного пучка $\Delta\Phi/\pi$ (штрихпунктир) в выходной плоскости просветных (а) и отражательных (б) фазовых голограмм разной толщины l при брэгговском считывании (в плоскости $l=0$ показана поперечная структура интенсивности записанного объектного пучка с гауссовым профилем).

ливает фазовые искажения и растет с ростом толщины. При этом радиус восстановленного объектного поля, определяемый шириной области с ненулевой интенсивностью $|A_S|^2$, с ростом толщины растет значительно медленнее максимума этой интенсивности и при больших l стабилизируется, оставаясь меньше радиуса записанного объектного пучка.

Рис. 2. показывает, что объемная голограмма приблизительно воспроизводит профиль интенсивности записанного поля, хотя и с некоторыми искажениями, возрастающими по мере роста ее толщины. Действительно, локальная сила голограммы F (146) пропорциональна величине амплитуды объектного пучка $u \exp(-x^2/\sigma^2)$, так что более высоким значениям этой амплитуды соответствуют более высокие значения F и, следовательно, более высокие значения амплитуды восстановленного поля (106), (116). Здесь, правда, оказывает определенное влияние неоднородность опорных пучков, а также при достаточно больших толщинах и нелинейный характер зависимости A_S от F , что приводит к искажениям амплитудной структуры объектного поля. Более наглядно эти искажения проявляются для пучков с более сложным профилем поперечного

сечения. В качестве примера на рис. 3 представлены результаты численных расчетов локальной интенсивности и фазы восстановленного объектного поля по формулам (10), (11), (14) с теми же исходными данными, что и для рис. 2, но применительно к случаю модулированного гауссова объектного пучка (13) с амплитудной функцией модуляции $u(x) = \{2 + \cos(8\pi x/\sigma)\}/9$. Здесь пространственные неоднородности фазы воспроизводят неоднородности интенсивности в поперечном сечении объектного поля, а для последних характерны рост величины локальных максимумов и уменьшение до нуля локальных минимумов с увеличением толщины голограммы l , так что на больших толщинах голограмма усиливает контраст отдельных деталей записанного изображения.

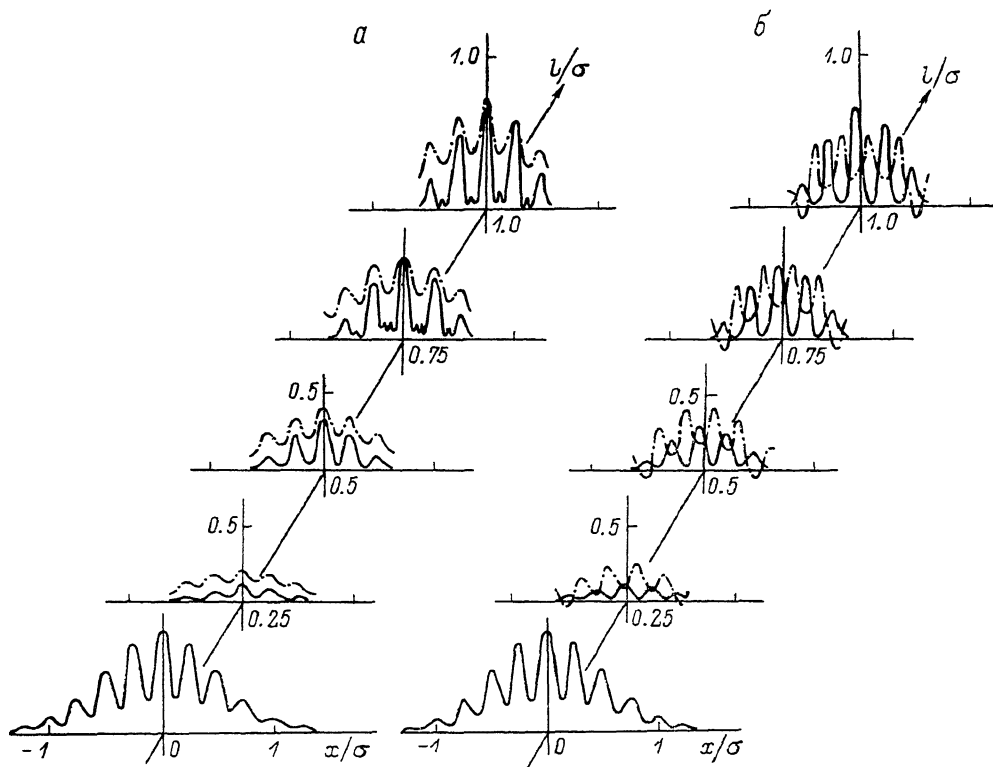


Рис. 3. Распределение локальной интенсивности $|A_S|^2/I_{Rm}$ (сплошные кривые) и дополнительного набег фазы $\Delta\Phi/\pi$ (штрихпунктир) восстановленного объектного пучка в выходной плоскости просветных (а) и отражательных (б) фазовых голограмм разной толщины l при брэгговском считывании (в плоскости $l=0$ показана поперечная структура интенсивности записанного объектного пучка с модулированным гауссовым профилем).

Формулы (14) для параметров дифракционных полей значительно упрощаются в случае малой толщины голограммы, когда $l \ll \sigma$, $l \ll |u/(du/dx)|$,

$$v = 0, \quad P_l = 0, \quad F = \frac{K\mu_H}{2} \frac{\text{sh}\{p(1+h)l/2\}}{p(1+h)/2},$$

$$\xi = \frac{\beta h}{\mu_H} + \frac{h-1}{2} \frac{u^2+1}{u} - i \frac{\text{tg}\vartheta}{K\mu_H} \left(\frac{1}{2u} \frac{du}{dx} - \frac{x}{\sigma^2} \right),$$

$$G_l = \frac{K\mu_H}{4} (1+h) \frac{\text{sh}pl}{p} \frac{u^2+1}{u} + \frac{K\beta hl}{2}.$$

Эти выражения переходят в соответствующие выражения для плоских волн [11], если $u = \text{const}$ и радиус пучков σ стремится к бесконечности.

Список литературы

- [1] *Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.* Статистическая теория голографии. М.: Радио и связь, 1981. С. 16—18.
- [2] *Kogelnik H.* // Bell Syst. Techn. J. 1969. Vol. 48. N 9. P. 2909—2947.
- [3] *Сидорович В. Г.* // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 6. С. 1306—1312.
- [4] *Зельдович Б. Я., Шкунов В. В., Яковлева Т. В.* // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 511—549.
- [5] *Корвинин Ю. Л., Суханов В. И.* // Оптическая голография с записью в трехмерных средах. Л.: Наука, 1986. С. 52—74.
- [6] *Solymar L., Cooke D. J.* Volume Holography and Volume Gratings. London: Academic Press, 1981. P. 164—207.
- [7] *Russell P.* // Phys. Rep. 1981. Vol. 71. N 4. P. 210—312.
- [8] *Хаус Х.* Волны и поля в оптоэлектронике. М.: Мир, 1988. 432 с.
- [9] *Пинскер З. Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982. С. 291—328.
- [10] *Takagi S.* // Acta Crystallographica. 1962. Vol. 15. N 12. P. 1311—1312.
- [11] *Сердюк В. М.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 7. С. 1341—1349.

Научно-исследовательский институт
прикладных физических проблем
им. А. Н. Севченко
Белорусского государственного
университета им. В. И. Ленина
Минск

Поступило в Редакцию
12 апреля 1989 г.