

01: 04

© 1990 г

## АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

*Б. Н. Ивкин, С. В. Никонов, Л. С. Соловьев*

Исследуется задача о развитии аксиально-симметричной неустойчивости в плазменном цилиндре с продольным током. Численно решена система уравнений бездиссипативной двухжидкостной электромагнитной газодинамики. Показано, что основные явления, происходящие на конечной стадии разряда в установках типа  $z$ -пинча, могут быть следствием развития рассматриваемой неустойчивости. К этим явлениям относятся образование ступок плотной горячей плазмы, генерации электрического поля и ускорение заряженных частиц вдоль оси разряда.

### Введение

Как известно, начало исследованиям по проблеме управляемого термоядерного синтеза было положено экспериментальными и теоретическими работами, посвященными созданию горячей плазмы в мощных электрических разрядах, получивших затем название  $z$ -пинчей [1]. Основополагающую идею о магнитном удержании и нагреве плазмы [2, 3] в таких установках предполагалось реализовать путем адиабатического сжатия плазменного цилиндра магнитным полем собственного тока. Однако, как показали эксперименты, разряд в  $z$ -пинче происходит не так, как предсказывала теория, основанная на представлении о сохранении цилиндрической симметрии. В плазме разряда возникали перетяжки, которые, как предполагалось, мешают получению горячей плазмы с нужными параметрами.

Объяснение появления перетяжек в  $z$ -пинче вследствие развития аксиально-симметричной МГД неустойчивости дано в работе [4] на основе решения соответствующей линейной задачи. В дальнейшем было экспериментально показано, что в  $z$ -пинчах генерируется продольное электрическое поле и заряженные частицы ускоряются до энергий, во много раз превышающих приложенную разность потенциалов [5]. В работе [6] предложено объяснение этих явлений как следствий обрыва тока в пинче. В последнее время все большее значение приписывается возникающим в разрядах так называемым горячим точкам, которые характеризуются экстремально высокими значениями концентрации и температуры и являются источниками жестких излучений [7].

По мере усовершенствования экспериментальных установок, работающих на принципе  $z$ -пинча, и методик диагностики постепенно складывалось убеждение, что развитие неустойчивости является необходимым условием для получения плазмы нужных параметров. Исходя из этой концепции, в работе [8] было предпринято численное решение задачи о нелинейном развитии аксиально-симметричной неустойчивости в рамках классической одножидкостной МГД. Показано, что неустойчивость имеет конвективный (перестановочный) характер и приводит к образованию тонких слоев с концентрированными параметрами. Результатом развития неустойчивости на нелинейной стадии является также быстрый спад тока, который наблюдается в экспериментах.

В основе настоящей работы также лежит идея о принципиальной роли аксиально-симметричной неустойчивости, закономерности развития которой приводят к основным наиболее интересным физическим явлениям в плазме  $z$ -пинча:

к образованию перетяжек, генерации продольного электрического поля и ускорению частиц до больших энергий, а также к формированию горячих точек и спаду тока. Решение задачи, проведенное в рамках двухжидкостной нерелятивистской электромагнитной газодинамики, по-видимому, подтверждает такую концепцию.

### Равновесные состояния

В отсутствие диссипативных процессов, когда электронную и ионную компоненты плазмы можно рассматривать как идеальные заряженные газы, взаимодействующие посредством электромагнитных полей, система уравнений электромагнитной газодинамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \operatorname{div} n_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} &= 0, \\ \rho_{\pm} \frac{d\mathbf{v}_{\pm}}{dt} &= -\operatorname{grad} p_{\pm} \pm en_{\pm} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\pm} \mathbf{B}] \right), \\ \frac{d}{dt} p_{\pm} + \gamma p_{\pm} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\pm} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi e (n_{+} \mathbf{v}_{+} - n_{-} \mathbf{v}_{-}). \end{aligned} \quad (1)$$

Индексами «+», «-» отмечены величины, относящиеся к ионной и электронной компонентам;  $\gamma$  — показатель адиабаты; остальные обозначения общеприняты.

Полагая в (1)  $\partial/(\partial t) = \partial/(\partial z) = \partial/(\partial \theta) = 0$ , получаем уравнения, описывающие цилиндрические равновесные конфигурации,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\pm}}{\partial r} &= \pm en (E_r - \beta_{\pm} B_{\theta}), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r = 4\pi e (n_{+} - n_{-}), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_{\theta} &= 4\pi e (n_{+} \beta_{+} - n_{-} \beta_{-}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta = v/c$ .

При  $\beta_{\pm} = \text{const}$  из (2) следует система уравнений для неизвестных  $p$  и  $n$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_{\pm}}{\partial r} = 4\pi e^2 [n_{\pm} (1 - \beta_{\pm}^2) - n_{\mp} (1 - \beta_{\mp}^2)]. \quad (3)$$

Для величин, измеряемых в собственных системах отсчета (их будем отмечать звездочкой), выражение (3) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_{\pm}^*}{\partial r} = 4\pi e^2 (n_{\pm}^* - n_{\mp}^* / \Gamma'), \quad (4)$$

где  $n_{\pm}^* = n_{\pm} \Gamma_{\pm}$ ,  $p_{\pm}^* = n_{\pm} T_{\pm}^* = n_{\pm}^* T_{\pm}^*$ ,  $T_{\pm}^* = T_{\pm} / \Gamma_{\pm}$ ,  $\Gamma_{\pm} = \sqrt{1 - \beta_{\pm}^2}$ ,  $\Gamma' = \sqrt{1 - \beta'^2}$ ,  $\beta' = (\beta_{+} - \beta_{-}) / (1 - \beta_{+} \beta_{-})$  — безразмерная инвариантная относительная скорость.

Из (4) следует, что для существования равновесных конфигураций необходимо выполнение неравенств [9]

$$\Gamma' \leq n_{+}^* / n_{-}^* \leq 1 / \Gamma', \quad (5)$$

так что разность  $|n_{+} - n_{-}|$  при малых токовых скоростях  $v'$  заключена в очень узких пределах.

При условии  $n_{+}^* / n_{-}^* = \text{const}$  (эквивалентном условию  $T_{+}^* / T_{-}^* = \text{const}$ ) из (4) вытекает связь отношений  $T_{+}^* / T_{-}^*$  и  $n_{+}^* / n_{-}^*$  при заданной относительной скорости  $v'$

$$\frac{n_{+}^*}{n_{-}^*} = \frac{1/\Gamma' + T_{+}^* / T_{-}^*}{1 + T_{+}^* / T_{-}^* \Gamma'}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае  $v_{\pm} = \text{const}$ ,  $n_{+}^{*}/n_{-}^{*} = \text{const}$ , как видно из (2), электрическое и магнитное поле пропорциональны друг другу, а их отношение равно

$$\frac{E_r}{B_{\theta}} = c \frac{n_{+}^{*}/\Gamma_{+} - n_{-}^{*}/\Gamma_{-}}{n_{+}^{*}v_{+}/\Gamma_{+} - n_{-}^{*}v_{-}/\Gamma_{-}} \equiv \frac{V}{c} = \text{const}.$$

Используя соотношение (6), формулу для  $V$  можно представить в виде

$$V = \frac{T_{+}^{*}v_{-} + T_{-}^{*}v_{+}}{T_{+}^{*} + T_{-}^{*}}. \quad (7)$$

Таким образом, электрическое поле выражается через магнитное как

$$E = -\frac{1}{c} [VB],$$

где в отличие от МГД скорость  $V$  определяется формулой (7).

Электрическое поле обращается в нуль, только когда  $V=0$ . В частности,  $V=0$  и  $E=0$ , если

$$\frac{m_{+}v_{+}}{\Gamma_{+}} + \frac{m_{-}v_{-}}{\Gamma_{-}} = 0, \quad m_{+}T_{+}^{*} = m_{-}T_{-}^{*}.$$

При  $V \neq 0$  равновесная плазма с необходимостью является заряженной.

В случае одинаковых температур  $T_{+}^{*} = T_{-}^{*}$ , когда  $n_{+}^{*} = n_{-}^{*}$  в системе координат, где  $v_{+} = -v_{-} = v$ , имеем

$$n_{+} = n_{-}, \quad E = 0, \quad B = \frac{4\pi envr}{c}, \quad p = 2\pi e^2 a^2 n^2 \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (8)$$

### Аксиально-симметрическая неустойчивость в линейном приближении

В линейном приближении по возмущениям, пропорциональным  $\exp(ikz - i\omega t)$ , система (1) приводит к трем уравнениям для возмущений  $F = eE_z$ ,  $f_{\pm} = rv_{\pm}^{\pm}/(\omega - kv_{\pm})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(rF')' - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left(1 - \left\langle \pm \frac{x^2 c^2}{s} \right\rangle\right) F &= \left\langle \left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right) \left[\frac{c_s^2 k}{s} f' + \left(\frac{v'}{\Omega} + \frac{k \mathcal{S}'}{\rho s}\right) f\right] \right\rangle, \\ \left(\frac{\gamma p \Omega^2}{sr} f'\right)' + \left[\frac{\rho \Omega^2}{r} - \frac{n' \mathcal{S}'}{nr} \pm \frac{en\Omega}{kc} \left(\frac{B}{r}\right)' + \left(\frac{\Omega^2 \mathcal{S}'}{rs}\right)' - \frac{k^2 \mathcal{S}'^2}{\rho sr}\right] f &= \\ = \mp \left\{ \frac{\rho}{k^2 - \omega^2/c^2} \left[\frac{x^2 \Omega}{r} \langle \Omega f \rangle - \left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right) \frac{F'}{m}\right] - \left(\frac{\gamma p k F}{ms}\right)' + \frac{k \mathcal{S}'}{ms} F \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\Omega = \omega - kv$ ,  $x^2 = 4\pi ne^2/mc^2$ ,  $s = \Omega^2 - k^2 c_s^2$ ,  $c_s^2 = \gamma p/\rho$ ,  $\mathcal{S}' = \pm en \left(E_r - \frac{\omega B}{kc}\right)$ .

Угловыми скобками обозначены разности, так что  $\langle f \rangle = f_{+} - f_{-}$ ; штрих означает дифференцирование по  $r$ . Невозмущенные функции в (9) удовлетворяют уравнениям равновесия (2).

Уравнения (9) существенно упрощаются в предположении о несжимаемости  $c_s^2 \rightarrow \infty$ ,  $n_{\pm} = \text{const}$  [10, 11]. Полагая при этом, что  $\omega^2/k^2 c^2 \ll 1$ , приходим к системе двух уравнений, содержащих только функции  $f_{\pm} = rv_{\pm}^{\pm}$ ,

$$\left(\frac{1}{r} |f'\right) - \left\{ \frac{k^2}{r} + \frac{1}{\Omega} \left[\left(\frac{\Omega'}{r}\right)' \pm \frac{ek}{mc} \left(\frac{B}{r}\right)'\right] \right\} f = \pm \frac{x^2}{r} \langle f \rangle. \quad (10)$$

Согласно (10), граница области устойчивости соответствует однородному току  $v_{\pm} = \text{const}$ , а неустойчивость имеется при возрастающем токе  $v_{\pm}'(r) > 0$ .

Точное решение задачи можно получить для плоского слоя, по которому течет однородный ток ( $nv_z = \text{const}$ ). Такая конфигурация описывается системой уравнений с постоянными коэффициентами

$$f'' - \left(k^2 \pm \frac{kx^2}{\Omega} \langle v \rangle\right) f = \pm x^2 f, \quad f \equiv v_x,$$

и ее решение выражается тригонометрическими функциями

$$f_{\pm} = A_{\pm} \sin k_1 x.$$

При  $k_1 = \pi/a$  дисперсионное уравнение имеет вид [10]

$$\frac{\omega}{k} - \frac{1}{2} \frac{(1 + 2kz) v_+ + (1 + 2kz) v_-}{1 + z_+^2 + z_-^2} = \frac{\sqrt{1 - 4z_+ z_-}}{1 + z_+^2 + z_-^2} |v_+ - v_-|,$$

где  $z_{\pm} = z_{\pm} / \bar{k}^2$ ,  $\bar{k}^2 = k^2 + k_1^2$ .

При  $z_+ z_- > 1/2$  имеется неустойчивость. В случае больших погонных концентраций, когда  $z_{\pm} \gg 1$ , получаем

$$\frac{\omega}{k} = \frac{m_+ v_+ + m_- v_-}{m_+ + m_-} \pm i \frac{|v_+ - v_-|}{\sqrt{m_+/m_-} + \sqrt{m_-/m_+}}, \quad (11)$$

т. е. фазовая скорость волны совпадает со скоростью центра масс ионов и электронов, а инкремент развития неустойчивости пропорционален относительной скорости. При  $m_+ v_+ + m_- v_- = 0$  неустойчивость (перетяжка) развивается в неподвижной (лабораторной) системе координат.

Таким образом, для развития неустойчивости в предположении о несжимаемости требуются достаточно большие концентрации, характеризующиеся параметром  $z_{\pm}$  (в рамках МГД абсолютные значения концентраций влияют лишь на инкремент [12]). При учете сжимаемости область неустойчивости расширяется. Из (11) следует, что при  $m_+ \gg m_-$  инкремент неустойчивости  $\delta = k |v_+ - v_-| \sqrt{m_-/m_+}$  существенно меньше характерного альфвеновского  $v_A/a \approx B(a) / \sqrt{4\pi n m^+}$ . Этот же результат справедлив для трубчатого пучка толщины  $d \ll 4a \sqrt{m_-/m_+}$  [11].

Из изложенного видно, что использование двухжидкостного приближения приводит к новым результатам по сравнению с классической одножидкостной МГД уже на уровне равновесий и линейной теории устойчивости.

### Нелинейное развитие неустойчивости

Задача о нелинейном развитии аксиально-симметричной неустойчивости решалась численными методами при заданном начальном возмущении скоростей. В целях максимального упрощения счета массы положительно и отрицательно заряженных частиц предполагались одинаковыми  $m_+ = m_- = m$ , и задача решалась в системе координат, в которой их начальные газодинамические скорости равны и противоположны  $v_+^0 = -v_-^0$ . Согласно линейной теории в этой системе координат мы имеем дело с неподвижной перетяжкой.

Отметим, что в такой постановке задачи результаты могут представлять интерес и для описания других, нежели z-пинч, физических систем. Так, в работе [13] предлагается использовать противоположно направленные потоки электронов и позитронов с взаимно скомпенсированным зарядом для получения сверхсильных магнитных полей и мощных импульсов электромагнитного излучения. Такие потоки могут существовать в окрестности пульсара [14, 15]. Заметим, что в этом случае возникающее при развитии неустойчивости сильное продольное электрическое поле может быть причиной ускорения космических лучей до экстремально высоких энергий.

В переменных, которые в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  безразмерны на значения  $[r] = [z] = a$ ,  $[t] = a/c$ ,  $[v] = c$ ,  $[E] = [B] = 4\pi en_0 a$ ,  $[\rho] = mn_0$ ,  $[S] = c^2 (mn_0)^{1-\gamma}$ , движение газов описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v_r + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (S \rho^{\gamma}) \pm \bar{x}^2 (E_r - v_z B),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (S \rho^{\gamma}) \pm \bar{x}^2 (E_z + v_r B),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_r \frac{\partial S}{\partial r} + v_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\rho_+}{m} v_r^+ - \frac{\rho_-}{m} v_r^-, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rB - \frac{\rho_+}{m} v_z^+ + \frac{\rho_-}{m} v_z^-, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Давление связано с функцией энтропии  $S$  зависимостью  $p = S\rho^\gamma$ . Магнитное поле имеет одну компоненту  $B = B_\theta$ , а знаки « $\pm$ » относятся соответственно к по-

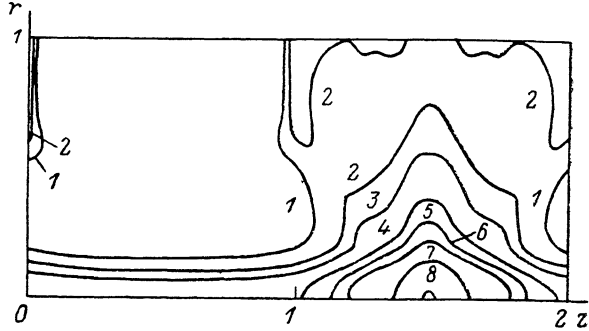
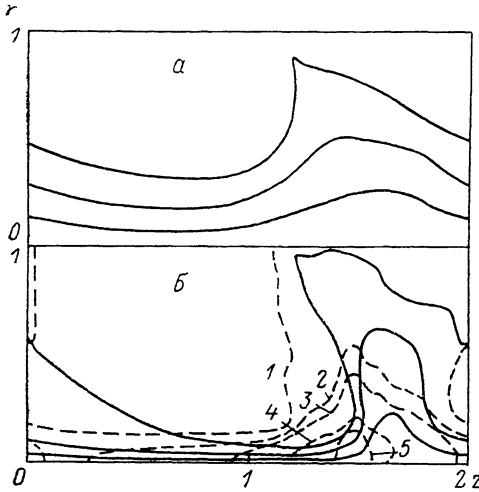


Рис. 2. Линии постоянной полной концентрации.

←  
Рис. 1. Изэнтропы и линии постоянной концентрации электронного потока.

$a - \tau = 2.4$ ,  $b = 2.7$ .

ложительно и отрицательно заряженным газам. Система (12) содержит постоянный безразмерный параметр

$$\bar{x}^2 = 4\pi n_0 e^2 a^2 / mc^2.$$

Параметры начального равновесного состояния были выбраны в виде

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \quad E = 0, \quad \rho_{\pm} = 1, \quad v_z^{\pm} = \mp \beta, \\ S &= \frac{\bar{x}^2 \beta^2}{2} (1 - r^2), \quad B = -\beta r. \end{aligned}$$

В этом состоянии продольный ток однороден, электрическое поле равно нулю и тепловое расталкивание полностью уравновешивается магнитным сжатием.

Система (12) решалась численно в области  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_r = E_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial E_z}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = 0, \\ v_r = \frac{\partial E_z}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = 1. \end{aligned}$$

При этом все величины считались периодическими функциями  $z$  с периодом  $L = 2$ . Начальные возмущения скоростей (удовлетворяющие условию  $\text{div } v = 0$ ) задавались функцией тока  $\Psi = \lambda r^2 (1 - r^2) \sin \pi z$

$$v_z^{\pm} = \pm \lambda \pi r (1 - r^2) \cos \pi z, \quad v_z^{\pm} = \mp 2\lambda (1 - 2r^2) \sin \pi z, \quad \lambda = \text{const}. \quad (13)$$

Возмущения (13) близки к собственным функциям линейной задачи. Используемые граничные условия согласованы как с системой уравнений, так и с начальными возмущениями. Отметим, что из них следует, что возмущение магнитного поля обращается в нуль на границе плазменного цилиндра при  $r = 1$ . Расчеты, если это не оговорено особо, проводились при  $\beta = 0.1$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $\bar{x}^2 = 2$ ,  $\gamma = 5/3$ .

Из симметрии исходной равновесной конфигурации и выбранного вида возмущения скорости следует, что имеется следующая симметрия искомым функций относительно сечений  $z=1/2$  и  $z=3/2$ . Если точки  $z_1, z_2$  и  $z_3, z_4$  равноудалены от этих сечений, то

$$\begin{aligned} n_+(z_1) &= n_-(z_2), \quad v_z^+(z_1) = -v_z^-(z_2), \quad v_r^+(z_1) = v_r^-(z_2), \\ S_+(z_1) &= S_-(z_2), \quad E_z(z_1) = E_z(z_2), \quad E_r(z_1) = -E_r(z_2), \quad B(z_1) = B(z_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичные соотношения справедливы также для точек  $z_3, z_4$ . Несимметрия относительно сечения  $z=1$  обусловлена видом начального возмущения (13).

На рис. 1, а, б представлена эволюция замороженных в электронный поток изэнтропических линий  $S_+ = \text{const}$  (сплошные линии). В начальный момент они представляли собой прямые  $r=1/4, r=1/2, r=3/4$ . На всех рисунках время указано в пролетных временах невозмущенного движения  $\tau = t(c) \cdot v_z^0(\text{см/с})/a(\text{см})$ .

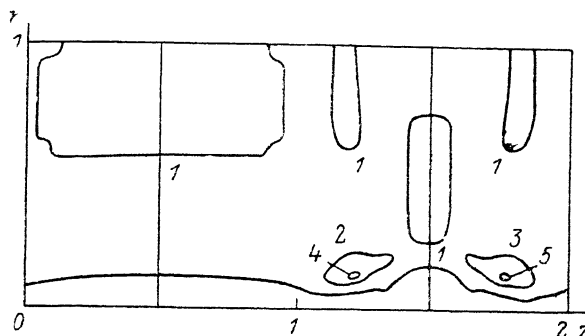


Рис. 3. Линии постоянной плотности заряда.

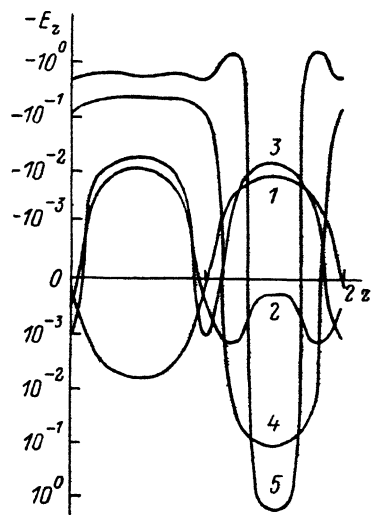


Рис. 4. Эволюция осевого распределения электрического поля.

Штриховыми линиями на рис. 1, б показаны уровни постоянной концентрации  $n_- = \text{const}$  для  $n_- = 1, 3, 5, 12, 15$  (кривые 1—5 соответственно). Линии  $S_+ = \text{const}$  и  $n_+ = \text{const}$  эволюционируют аналогичным образом в соответствии с условиями симметрии (14). Так, функция  $S_+ = \text{const}$  располагается симметрично относительно плоскости  $z=3/2$ .

На рис. 2 приведены линии постоянной полной концентрации  $n_+ + n_- = \text{const}$  при  $\tau = 2.7$  для  $n_+ + n_- = 1, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 40$  (кривые 1—8 соответственно). На рис. 3 представлены линии постоянной плотности заряда  $n_+ - n_- = 0, 3, -3, 5, -5$  (кривые 1—5 соответственно) для  $\tau = 2.7$ .

Видно, что развитие неустойчивости на нелинейной стадии приводит к заострению профилей  $S = \text{const}$  и их сдвигу в сторону движения газа. В основной части расчетной области вещество группируется в приосевой зоне (перетяжка). При этом слева образуется большая область разреженной плазмы, а в окрестности  $z=1.5$  формируется сфероидальный сгусток с высокой концентрацией. Здесь происходит разделение зарядов и возникает сильное электрическое поле.

На рис. 4 представлена зависимость  $E_z(z)$  при  $r=0$  в моменты времени  $\tau = 0.51, 1.95, 2.15, 2.75, 3.68$  (кривые 1—5 соответственно). Острый максимум при  $z=3/2$  обусловлен разделением зарядов и формированием электрического диполя, ориентированного вдоль оси цилиндра. Знак электрического поля здесь положителен; на границах  $E_z(0, 0) = E_z(0, 2)$  поле отрицательно и растет со временем.

Таким образом, рассмотрение в рамках двухжидкостной электромагнитной газодинамики показывает, что наряду с генерацией индукционного электрического поля развитие неустойчивости сопряжено с разделением зарядов, приводящих к образованию электрических диполей и резкой неоднородности электрического поля вдоль оси разряда. Создающееся электрическое поле является

ответственным за ускорение обеих заряженных компонент в окрестности оси. На рис. 5 представлена зависимость от  $z$  осевой скорости электронов  $v_z^-(r=0)$ , нормированной на начальную скорость  $v_z^-(r=0, t=0)$  для моментов времени  $\tau = 2.15, 2.75, 2.95, 3.40$  (кривые 1—4 соответственно). Видно, что максимальное ускорение достигается примерно на середине периода  $z=1$ , затем скорость резко падает и снова нарастает к концу периода. На рис. 6 показана зависимость от времени осевой скорости  $v_z^-(r=0)$  в сечениях  $z=0, 2$  (кривая 1) и  $z=1$  (кривая 2). Наблюдается также полное ускорение на периоде  $\Delta z=(0, 2)$ , которое, однако, примерно в 3 раза меньше максимального.

Законы симметрии (13) позволяют представить картину ускорения как для электронов, так и для ионов. Согласно (14), графики функций  $v_z^-(z)$  и  $v_z^+(z)$  являются зеркальным отражением друг друга от плоскостей  $z=1/2$  и  $z=3/2$ . На рис. 5 зависимость  $v_z^+(r=0)$  при  $\tau = 2.75$  дана штриховой кривой. Ионы ускоряются в противоположном направлении, и модули их скоростей в сечениях

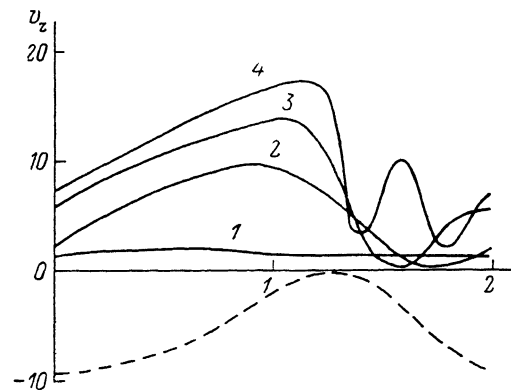


Рис. 5. Эволюция осевого распределения скорости электронов.

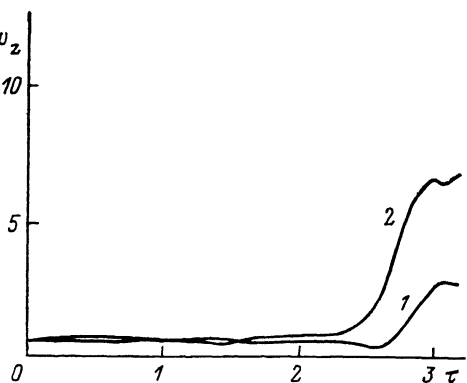


Рис. 6. Изменение осевой скорости электронов в различных сечениях.

$z=0, 2$  и  $z=1$  совпадают со скоростями электронов в сечениях  $z=1$  и  $z=0, 2$ . Следовательно, полное увеличение скорости ионов на периоде  $(0 \leq z \leq 2)$  оказывается больше, чем у электронов, причем этот эффект существует независимо от разницы в массах, поскольку принято  $m_+ = m_-$ . Несимметрия ускорения частиц с противоположными знаками зарядов проистекает из выделенности направления тока, от которого зависит направление вектора магнитного поля и выбранного вида возмущений скорости (13). Если в (13) изменить знаки возмущений  $v$  или при данном виде возмущений рассмотреть задачу на периоде, сдвинутом по  $z$  на единицу, то полное приращение скорости на расчетном периоде будет больше у электронов.

Таким образом, картина распределения скоростей частиц вдоль оси в фиксированный момент времени следующая. При подходе к плоскости  $z=3/2$  частицы обоих знаков, движущиеся в противоположных направлениях, медленно ускоряются, вблизи  $z=3/2$  быстро замедляются, а затем в конце периода их скорости возвращаются к своим исходным значениям. При этом скорости на концах периода монотонно растут со временем, так что период представляет собой ускоряющую ячейку для частиц обоих знаков. Несимметрия распределения продольного электрического поля на периоде  $0 \leq z \leq 2$  приводит к различию ускорения положительно и отрицательно заряженных частиц на границах выбранного расчетного периода.

Расчеты показали весьма существенное влияние тока смещения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint B dl - \frac{4\pi}{c} I,$$

возникающего в процессе генерации продольного электрического поля, которое создает изменяющийся поток  $\Phi = \int_0^a E_z 2\pi r dr$ . Поскольку  $\oint B dl = \text{const}$  (в силу граничного условия  $B(a, z) = \text{const}$ ), то сохраняется «полный ток»

$$I + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{const},$$

вследствие чего зависимость изменения тока  $I = \int_0^a j_z 2\pi r dr$  от времени оказывается

различной в разных сечениях плазменного цилиндра. В процессе развития неустойчивости «ток проводимости»  $I$  на границах периода  $z=0, 2$  и в центре  $z=1$  сначала падает (примерно до половины), а затем возрастает, а в сечении  $z=3/2$ , наоборот, сначала возрастает, а затем спадает в соответствии с изменениями тока смещения.

Описанные процессы происходят в идеальной плазме при бесконечной проводимости. Однако необходимо иметь в виду, что спецификой рассматриваемой неустойчивости на нелинейной стадии является образование тонких слоев с большими плотностями тока, внутри которых магнитное число Рейнольдса  $R_m$  может стать достаточно малым, так что ток  $I$  начнет быстро спадать вследствие диссипации на омическом сопротивлении даже при большой проводимости  $\sigma$ . Инкремент развития неустойчивости при  $\sigma \neq \infty$  зависит от безразмерных параметров  $R_m \gg 1$  и  $\kappa \gg 1$ , характеризующих проводимость и число частиц в сечении. В согласии с линейной теорией неустойчивость развивается внутри периода, движущегося со скоростью центра масс электронов и ионов в невозмущенном состоянии.

По начальным данным ( $\beta^0=0.1$ ) исследуемая задача является нерелятивистской, однако в процессе развития неустойчивости рассчитываемые значения скоростей возрастают более чем на порядок и мы выходим из области применимости нерелятивистского приближения. Однако основные эффекты, возникающие при развитии неустойчивости (перетяжка, образование «горячих точек», ускорение частиц и др.), являются нерелятивистскими, они проявляются еще при  $\beta^2 \ll 1$ . Это же подтвердил проверочный расчет с  $\beta^0=0.03$ . В связи с этим полученные выше результаты следует интерпретировать как качественное описание динамических процессов в установках типа  $z$ -пинча [16, 17]. Для получения корректных количественных результатов необходимо решать полностью релятивистскую задачу. Развитие рассмотренной неустойчивости имеет много общего с конвективными неустойчивостями: внутренние слои вещества выносятся наружу, а наружные попадают внутрь; на нелинейной стадии образуются узкие слои с концентрированными параметрами [8, 18]. Поэтому задачу о динамике плазмы в  $z$ -пинче можно отнести к классу задач о формировании новых структур вследствие развития неустойчивости [19].

Авторы благодарны М. А. Власову за полезные обсуждения.

### Список литературы

- [1] Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1—4.
- [2] Тамм И. Е. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 3—19.
- [3] Сахаров А. Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 20—30.
- [4] Трубников Б. А. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 289—298.
- [5] Anderson O. A., Baker W. R., Colgate S. A. et al. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. N 6. P. 1375—1387.
- [6] Трубников Б. А. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 87—97.
- [7] Sethian J. D., Robson A. E., Gerber K. A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. N 8. P. 892—895.
- [8] Герлаш Н. И., Зуева Н. М., Соловьев Л. С. // Препринт ИПМ АН СССР. № 83. М., 1979. 20 с.
- [9] Соловьев Л. С., Гурович В. Ц. // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 7. С. 845—850.
- [10] Соловьев Л. С. // Физика плазмы. 1982. Т. 8. Вып. 5. С. 947—949.
- [11] Соловьев Л. С. // Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 3. С. 325—335.
- [12] Кадошцеа В. В. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132—176.



- [13] *Winterberg F.* // Phys. Rev. 1979. Vol. A19. N 3. P. 1356—1362.
- [14] *Штерн Б. Е.* // Препринт ИЯИ АН СССР. № П-036Б. М., 1984. 25 с.
- [15] *Волокитин А. С., Красносельских В. В., Мачабели Г. Э.* // Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 5. С. 531—538.
- [16] *Филиппов Н. В.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 1. С. 25—43.
- [17] *Филиппов Н. В., Филиппова Т. И.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 4. С. 733—739.
- [18] *Никонов С. В., Соловьев Л. С.* // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. Вып. 4. С. 163—166.
- [19] *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.

Всесоюзный электротехнический  
институт им. В. И. Ленина  
Москва

Поступило в Редакцию  
20 февраля 1989 г.

---